Barcodes Berechnen

TDA:

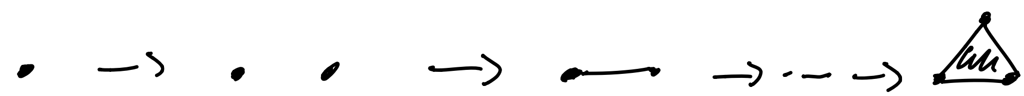
Punktwolken $\xrightarrow{(1)}$ Simplizialkomplexen $\xrightarrow{(2)}$ barcode

Heute: (2)

Ripser, Uli Bauer

(1) Set up

$\emptyset = K_1 \subseteq \dots \subseteq K_N =: K$ Filtration von Simpliz. Komplexen

Ex: 

Für $\sigma \in K$

$$b(\sigma) := \min\{t \mid \sigma \in K_t\}$$

Ordnen $K = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ sodass

$$i \le j \Rightarrow b(\sigma_i) \le b(\sigma_j)$$

$(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ ist geordnete Basis von $C_*(K)$.

Schreibe D für die Matrix die $\partial : C_*(K) \circlearrowleft$ bezüglich $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ darstellt.

② Barcode

Für $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$ definieren wir

$$\operatorname{pivot}(v) := \max\{i \mid v_i \neq 0\} \qquad (\max \emptyset = -\infty)$$

Wir sagen $M \in \mathbb{F}^{n \times r}$ ist reduziert, wenn $\operatorname{pivot}(M_j) = \operatorname{pivot}(M_i) \neq -\infty$ impliziert, dass $i = j$.

Ex: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ X

Wir wollen R, V mit $R = D \cdot V$ und R reduziert, V obere Δ-Matrix und $\det V \neq 0$.

Definiere:

$$\mathcal{N} := \{i \mid R_i \neq 0\}$$
$$\mathcal{P} := \{i \mid R_i = 0\}$$
$$\mathcal{E} := \{i \in \mathcal{P} \mid \nexists j \in \mathcal{N} : i = \operatorname{pivot} R_j\}$$

Thm A (Cohen-Steiner et al.)

$$\mathcal{B}(H_*(K_\bullet)) = \left([b(\sigma_j), N] \right)_{j \in \mathcal{E}}$$

$$\cup\left(\left[b(\sigma_{\mathrm{pivot}(R_j)}),\ b(\sigma_j)\right[\right)_{j\in\tilde{\mathcal{N}}}$$

ohne leere Intervalle

"Bew:" $\left(V_j \mid i\in\mathcal{E}, \sigma_j\in K_t\right) \cup \left(R_j \mid j\in\mathcal{N}, \sigma_{\mathrm{pivot} R_j}\in K_t, \sigma_j\notin K_t\right)$

repräsentiert eine Basis $H_*(K_t)$

3 Reduktion

Input D

Output R, V

$R \leftarrow D$, $V \leftarrow I$

while $\exists i<j$: $\mathrm{pivot}\, R_i = \mathrm{pivot}\, R_j \neq -\infty$

$R_j \leftarrow R_j - \frac{(R_j)_{\mathrm{pivot}\, R_i}}{(R_i)_{\mathrm{pivot}\, R_i}} \cdot R_i$

$V_j \leftarrow V_j -$ " $\cdot V_i$

end while

4 Optimierungen

4.1. Clearing & Kohomologie

In D

Out R, V

$R \leftarrow D$, $V \leftarrow I$
for $d = \dim K, \dots, 0$
  reduziere $(R_j \mid \dim \sigma_j = d)$
  if $\dim \sigma_j = d$ and $i = \text{pivot}(R_j) \neq -\infty$
    $R_i \leftarrow 0$
  end if
end for

Funktioniert, weil $R_j = \sum_{k \in P} d_k V_k$

$$\text{pivot } R_j = \text{pivot}\left(\sum_{k \in P} d_k V_k\right)$$
$$= \max\{\text{pivot } V_k = k \mid d_k \neq 0\} \in P$$

$$K_1 \subseteq \dots \subseteq K$$

$$H_*(K_1) \to \dots \to H_*(K) \qquad H_*(K_\bullet)$$
$$H^*(K_1) \leftarrow \dots \leftarrow H^*(K) \qquad H^*(K_\bullet)$$

$$H_*(K) \to H_*(K, K_1) \to \dots \to H_*(K, K) \quad H_*(K, K_\bullet)$$
$$H^*(K) \leftarrow H^*(K, K_1) \leftarrow \dots \leftarrow H^*(K, K) \quad H^*(K, K_\bullet)$$

Prop (de Silva et al.)

(1) $B(H_*(K_\bullet)) = B(H^*(K_\bullet))$

(2) $\underline{B(H_*(K,K_0)) = B(H^*(K,K_0))}$

<u>Pf</u>: Universelle Koeffizienten

<u>Prop</u> (de Silva et al.)

$$B_0(H_*(K_0)) = B_0(H_*(K,K_0))$$

nicht endlichen Intervalle

$$B_\infty(H_*(K_0)) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} B_{-\infty}(H_*(K,K_0))$$

$$[a,\infty) \longleftrightarrow (-\infty, a[$$

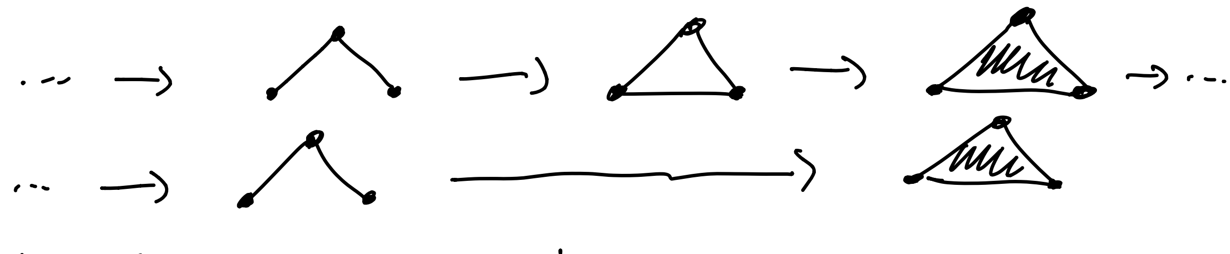
<u>Pf</u>: Lange exakte Sequenz.

Neuer Algo:

Berechne relative Kohomologie mit Clearing,

d.h. reduziere $D^\perp$

<u>4.1. Emergent pairs</u>



(σ, τ) ist emergent pair, wenn

τ der letzte Rand von σ ist, der in der Filtr. auftaucht.

$[b(\tau), b(\sigma)[$ ist immer im Barcode.