p-adische Zahlen

Proseminar Zahlentheorie
im Wintersemster 2020/21

Dieses Seminar bietet eine elementare Einführung in die Theorie der p-adischen Zahlen und ist für alle Studierenden ab dem zweiten Semester geeignet. Es ist als bunte Mischung aus Analysis, Algebra, Zahlentheorie, Topologie und Geometrie geplant und führt wichtige Konzepte dieser Gebiete anhand des konkreten Beispiels der p-adischen Zahlen ein.

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind die Vervollständigung der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bezüglich der üblichen euklidischen Metrik. Für eine Primzahl p sind die p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$ ebenfalls eine Vervollständigung von $\mathbb{Q}$, allerdings bezüglich der p-adischen Metrik. Wie sich jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ als Reihe

$$x = a_n \cdot 10^n + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 \cdot 10^0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_{-2} \cdot 10^{-2} + \ldots$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ schreiben lässt, so kann man jede p-adische Zahl $x \in \mathbb{Q}_p$ als Reihe

$$x = a_{-n} \cdot p^{-n} + \ldots + a_{-1} \cdot p^{-1} + a_0 \cdot p^0 + a_1 \cdot p^1 + a_2 \cdot p^2 + \ldots$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ ausdrücken. Wie in den rellen Zahlen die Folge $(10^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null konvergiert (bezüglich der euklidischen Metrik), so bildet die Folge $(p^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in den p-adischen Zahlen (bezüglich der p-adischen Metrik). Die daraus resultierende Geometrie weist einige kuriose Eigenschaften auf: jeder Punkt eines Kreises ist sein Mittelpunkt und jedes Dreieck ist gleichschenklig. Auch die Analysis auf den p-adischen Zahlen verhält sich anders: eine Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ konvergiert in $\mathbb{Q}_p$ genau dann, wenn die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist!

Themen: Bewertete Körper und Vervollständigung, der Körper $\mathbb{Q}_p$ der p-adischen Zahlen und sein Unterring $\mathbb{Z}_p$ der ganzen p-adischen Zahlen, das Henselsche Lemma, der Satz von Ostrowski, topologische Eigenschaften von $\mathbb{Q}_p$ und Analysis darin (Folgen und Reihen, stetige Funktionen).

Literatur: Hauptquelle ist das Buch von Svetlana Katok. Eine alternative – und über das Seminar hinausgehende – Quelle ist das Buch von Fernando Gouvêa, aus welchem das erste Kapitel „Apéritif“ eine schöne Einführung in das Thema bietet.

- Katok, Svetlana: *p-adic Analysis compared with Real*, AMS 2007.
- Gouvêa, Fernando: *p-adic Numbers. An Introduction*, Third Edition, Springer 2020.

Vorkenntnisse: Analysis I, Lineare Algebra I.

Zeit und Ort: Donnerstag, 14–16 Uhr. Ort noch nicht festgelegt.

Vorbesprechung: Freitag 31.07.2020, 13:30 Uhr, über webex:

`https://uni-heidelberg.webex.com/meet/cy428`

Bei Interesse bitte in die Sammelgruppe im Müsli eintragen!

Kontakt: Marius Leonhardt, `mleonhardt@mathi.uni-heidelberg.de`;
Christian Dahlhausen, `christian.dahlhausen@math.uzh.ch`.