Voevodskys Beweis der Milnor/Bloch/Kato-Vermutung

Ein Leitfaden für das Hauptseminar im Wintersemester 2011/12

Alexander Schmidt

Sei k ein Körper, und m, n positive ganze Zahlen, $\mathrm{char}(k) \nmid m$. Die Kummersequenz und der Hilbertsche Satz 90 zeigen den Isomorphismus $H^1_{et}(k, \mu_m) \cong k^\times/k^{\times m}$, so dass das Cup-Produkt einen Homomorphismus

$$(k^\times/k^{\times m})^{\otimes n} \longrightarrow H^n_{et}(k, \mu_m^{\otimes n})$$

induziert. Bass und Tate haben gezeigt, dass dieser Homomorphismus über $K_n^M(k)/m$ faktorisiert, wobei $K_n^M(k)$ die n-te Milnorsche K-Gruppe von k ist, also die Faktorgruppe von $(k^\times)^{\otimes n}$ nach der von allen Tensoren der Form $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_i + a_j = 1$ für ein Paar (i, j), $i \neq j$, erzeugten Untergruppe. Der induzierte Homomorphismus $K_n^M(k)/m \to H^n_{et}(k, \mu_m^{\otimes n})$ heißt *Normresthomomorphismus.* Ziel des Seminars ist es, den Beweis des folgenden Theorems zu verstehen:

Theorem 1 (Milnor/Bloch/Kato-Vermutung [=Satz von Voevodsky/Rost]). *Der Normresthomomorphismus*

$$K_n^M(k)/m \longrightarrow H^n_{et}(k, \mu_m^{\otimes n})$$

ist ein Isomorphismus.

Für $m = 2$ war dieser Satz 1970 von Milnor vermutet worden (in der Sprache der quadratischen Formen). Die MBK-Vermutung ist für $n = 0$ und $n = 1$ trivialerweise bzw. wegen Hilberts Satz 90 erfüllt. Der Fall $n = 2$ wurde 1982 von Merkurjev und Suslin bewiesen, später fanden Merkurjev, Suslin und Rost einen Beweis für die Milnor-Vermutung (also $m = 2$) im Falle $n = 3$. Der Beweis der vollen Milnor-Vermutung erfolgte 2001 durch Voevodsky, der Beweis der MBKV im allgemeinen Fall wurde 2010 komplettiert (Voevodsky/Rost). Der Beweis basiert auf der Idee (welche auf Beilinson und Lichtenbaum zurückgeht), den Normresthomomorphismus als Vergleich zweier verschiedener Kohomologietheorien aufzufassen.

Zentral für alles ist die von Voevodsky definierte *motivische Kohomologie*: Für eine glatte algebraische Varietät X über k und eine abelsche Gruppe A hat man die sogenannten motivischen Kohomologiegruppen

$$H^{i,j}(X, A), \quad i, j \in \mathbb{Z}, \ j \geq 0.$$

Die motivische Kohomologie für algebraische Varietäten bildet ein Analogon zur singulären Kohomologie für CW-Komplexe, nur dass wir hier den zusätzlichen zweiten Parameter j (einen „Twist“) haben. Nach Konstruktion ist

$$H^{i,j}(X, A) = H^i_{Nis}(X, A(j)),$$

wobei *Nis* die Nisnevich-Topologie bezeichnet (eine Grothendieck-Topologie die bzgl. Feinheit zwischen Zariski- und Etalkohomologie liegt). Es ist $A(j) = \mathbb{Z}(j) \otimes A$, wobei $\mathbb{Z}(j)$ ein bestimmter nach oben beschränkter *Komplex* von Garben ist, dessen Existenz und Eigenschaften bereits von Lichtenbaum vermutet wurde. Der Komplex $\mathbb{Z}(0)$ ist quasiisomorph zur konstanten Garbe $\mathbb{Z}$ (plaziert in Grad 0), $\mathbb{Z}(1)$ ist quasiisomorph zu $\mathbb{G}_m[-1]$. Es gilt $\mathcal{H}^i(\mathbb{Z}(j)) = 0$ für $i > j$. (Für $j \geq 1$ gilt vermutungsweise auch $\mathcal{H}^i(\mathbb{Z}(j)) = 0$ für $i \leq 0$.) Der Dimensionssatz für die Nisnevich-Kohomologie impliziert somit

$$H^{i,j}(X, A) = 0 \text{ für } i \geq 1 + j + \dim X.$$

Die Komplexe $\mathbb{Z}(j)$ sind sogar Komplexe von étalen Garben (also nicht nur Nisnevich-Garben). Ersetzt man die Nisnevich-Topologie durch die etale, so erhält man analog Gruppen $H_L^{i,j}(X, A)$ (das L steht für Lichtenbaum). Zur besseren Unterscheidung schreiben wir von nun an $H^{ij}(X, A) = H_B^{ij}(X, A)$ (B für Beilinson). Auf offensichtliche Weise erhalten wir natürliche Homomorphismen

$$H_B^{i,j}(X, A) \longrightarrow H_L^{i,j}(X, A).$$

Da (grob gesprochen) Galoiskohomologie stets Torsion ist, ist $H_B^{i,j}(X, \mathbb{Q}) \to H_L^{i,j}(X, \mathbb{Q})$ ein Isomorphismus für alle i, j. Insbesondere gilt

$$H_L^{i,j}(X, \mathbb{Q}) = H_B^{i,j}(X, \mathbb{Q}) = 0 \text{ für } i \geq 1 + j + \dim X.$$

Die motivischen Kohomologiegruppen sind bereits für den Einpunktraum $X = \operatorname{Spec}(k)$ interessant. Ist m wie vorher prim zu $\operatorname{char}(k)$, so haben wir kanonische Isomorphismen

$$H_B^{n,n}(k, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong K_n^M(k)/m\,, \quad H_L^{n,n}(k, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong H_{et}^n(k, \mu_m^{\otimes n}),$$

und der Normresthomomorphismus der MBKV entpuppt sich als „Wechsel der Topologie"-Homomorphismus. Offenbar kann man sich beim Beweis der MBKV auf den Fall $m = \ell^v$ (ℓ Primzahl) beschränken.

Das folgende Theorem 2 zeigt, dass aus der Surjektivitätaussage der BMKV für alle endlich erzeugten Erweiterungskörper sogar ihre Verallgemeinerung, die *Beilinson-Lichtenbaum-Vermutung* folgt. Theorem 2 wurde zunächst von Suslin und Voevodsky für Körper mit Singularitätenauflösung (also nach heutigem Wissensstand char = 0) bewiesen. Für allgemeine Körper wurde Theorem 2 von Geißer und Levine bewiesen, die allerdings eine andere Definition motivischer Kohomologie verwendeten (mittels Blochscher höherer Chowgruppen), von der zum damaligen Zeitpunkt nur bekannt war, dass sie in char = 0 mit der von Suslin-Voevodsky übereinstimmt. Schließlich zeigte Voevodsky, dass beide Definitionen motivischer Kohomologie über beliebigen Körpern übereinstimmen. Wir formulieren hier das Ergebnis mit $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}$-Koeffizienten ($\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)} = \varinjlim_r \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$), da dies technische Vorteile liefert.

Theorem 2. *Angenommen für alle $w \leq n$, und jeden über k endlich erzeugten Körper K ist*

$$K_w^M(K) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)} \longrightarrow H_{et}^w(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}(w))$$

surjektiv.

Dann ist für jede glatte Varietät X über k der Homomorphismus

$$H_B^{i,j}(X, \mathbb{Z}_{(\ell)}) \longrightarrow H_L^{i,j}(X, \mathbb{Z}_{(\ell)})$$

ein Isomorphismus für $i - 1 \leq j \leq n$ und injektiv für $i = j + 2$, $j \leq n$. Desweiteren ist für jedes $r \geq 1$

$$H_B^{i,j}(X, \mathbb{Z}/\ell^r) \longrightarrow H_L^{i,j}(X, \mathbb{Z}/\ell^r)$$

ein Isomorphismus für $i \leq j \leq n$ und injektiv für $i = j + 1$, $j \leq n$. Insbesondere gilt die MBKV für n und $m = \ell$-Potenz.

Einfach erhält man das folgende Ergebnis:

Lemma 3. *Es sei $\ell \neq \mathrm{char}(k)$ eine Primzahl. Es gelte die MBKV für jeden über k endlich erzeugten Körper K, $m = \ell$-Potenz und in allen Gewichten $w \leq n-1$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Für jeden über k endlich erzeugten Körper K ist $K_n^M(K) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)} \longrightarrow H_{et}^n(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}(n))$ surjektiv.*

(ii) *Für jeden über k endlich erzeugten Körper K gilt $H_L^{n+1,n}(K, \mathbb{Z}_{(\ell)}) = 0$.*

Beweis. Ein Vergleich der langen exakten (B- bzw. L-) Kohomologiefolgen zu $0 \to \mathbb{Z}_\ell \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)} \to 0$ zeigt, da $H_B^{n,n}(K, \mathbb{Q}) \to H_L^{n,n}(K, \mathbb{Q})$ ein Isomorphismus ist, dass (ii) die Surjektivität von $K_n^M(K) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)} \to H_{et}^n(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}(n))$, also (i) impliziert. Umgekehrt, impliziert (i) nach Theorem 2 und der Annahme, dass die BMKV in allen Gewichten $w \leq n-1$ richtig ist, dass $0 = H_B^{n+1,n}(K, \mathbb{Z}_{(\ell)}) \to H_L^{n+1,n}(K, \mathbb{Z}_{(\ell)})$ ein Isomorphismus ist. □

Für $n = 1$ haben wir

$$H_L^{2,1}(K, \mathbb{Z}_{(\ell)}) = H_{et}^2(K, \mathbb{G}_m[-1]) \otimes \mathbb{Z}_{(l)} = H_{et}^1(K, \mathbb{G}_m) \otimes \mathbb{Z}_{(l)} = 0,$$

weshalb die Aussage $H_L^{n+1,n}(K, \mathbb{Z}_{(\ell)}) = 0$ als „Höherer Hilbertscher Satz 90“ bezeichnet wird (genauer: Höherer HS 90 für n und ℓ, kurz $H90(n, \ell)$).

Eine elementare Reduktion zeigt überdies, dass man sich im Beweis der MBKV auf den Fall von Körpern der Charakteristik Null beschränken kann, was wir von nun an annehmen (obwohl es für große Teile des Beweises nicht nötig ist, es wird erst sehr spät verwendet, im Fall $\ell = 2$ gar nicht). Desweiteren können wir (Standard res-cores-Argument) stets annehmen, dass unser Körper „ℓ-speziell“ ist, d.h. keine endlichen Erweiterungen vom Grad prim-zu-ℓ besitzt. Wir haben also $H90(n, \ell)$ für alle n, ℓ für ℓ-spezielle Körper der Charakteristik Null zu zeigen, um die Beilinson-Lichtenbaum-Vermutung (d.h. die Aussage von Theorem 2) über beliebigen Körpern zu erhalten.

Wir verfahren mittels Induktion über n, nehmen also an, dass wir in Grad $\leq n-1$ bereits alles bewiesen haben. Ein erster Schritt, welcher nur „Standard“argumente der Galoiskohomologie benutzt besagt

Theorem 4. *Ist k ℓ-speziell und gilt $H90(w, \ell)$ für $w \leq n-1$, so folgt aus $K_n^M(k)/\ell = 0$, dass ($H_L^{n,n}(k, \mathbb{Z}/\ell) =$) $H_{et}^n(k, \mu_\ell^{\otimes n}) = 0$.*

Unter der Voraussetzung von Theorem 4 folgt nun aus der langen Kohomologiefolge zu $0 \to \mathbb{Z}_{(\ell)} \to \mathbb{Z}_{(\ell)} \to \mathbb{Z}/\ell \to 0$, dass $H_L^{n+1,n}(k, \mathbb{Z}_{(\ell)})$ torsionsfrei ist. Tensor $\mathbb{Q}$ ist es aber Null, was $H90(n, \ell)$ impliziert. Wir haben also den Induktionsschritt $H90(w, \ell)$ für $w \leq n-1 \Rightarrow H90(n, \ell)$ für ℓ-spezielle Körper mit $K_n^M(k)/\ell = 0$ gezeigt. Hiermit folgt $H90(n, \ell)$ in voller Allgemeinheit, wenn wir zu jedem Körper k einen ℓ-speziellen Erweiterungskörper K/k finden, so dass $K_n^M(K)/\ell = 0$ und die natürliche Abbildung $H_L^{n+1,n}(k, \mathbb{Z}_{(\ell)}) \to H_L^{n+1,n}(K, \mathbb{Z}_{(\ell)})$ injektiv ist. Ein elementares Reduktionsarguments zeigt nun, dass es genügt, das folgende Theorem zu zeigen.

Theorem 5. *Zu jedem Symbol $a = \{a_1, \ldots, a_n\} \in K_n^M(k)$ existiert eine Körpererweiterung K_a von k so dass gilt*

(i) *das Bild von a in $K_n^M(K_a)$ ist durch ℓ teilbar.*

(ii) *die natürliche Abbildung $H_L^{n+1,n}(k, \mathbb{Z}_{(\ell)}) \to H_L^{n+1,n}(K_a, \mathbb{Z}_{(\ell)})$ ist injektiv.*

Historisch gesehen, sind wir jetzt im Jahr 1996 angekommen. Im Jahr 2001 konnte dann Voevodsky Theorem 5 im Fall $\ell = 2$ beweisen. Der gesuchte Körper K_a ist der Funktionenkörper zur Pfister-Quadrik des Symbols a. (Der schon lange vorher bekannte Fall $n = 2$ (Merkurjev-Suslin) kann wohl auch auf diese Weise behandelt werden, man benutzt den Funktionenkörper der Brauer-Severi-Varietät zur zyklischen Algebra zum Symbol a).

Schauen wir uns zunächst den Beweisgang im (einfacheren) Fall $\ell = 2$ an. Zu einem Tupel $a = (a_1, \ldots, a_n) \in (k^\times)^n$ bezeichne $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ die zugehörige quadratische Form $\sum a_i x_i^2$. Die *Pfister-Form* $\langle\!\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\!\rangle$ ist das Tensorprodukt

$$\langle\!\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\!\rangle = \langle 1, -a_1 \rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, -a_n \rangle .$$

Mit Q_a bezeichnet man die $(2^{n-1} - 1)$-dimensionale projektive Quadrik, die zur Form $\langle\!\langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle\!\rangle \oplus \langle -a_n \rangle$ assoziiert ist. Diese ist eine 2-*Zerfällungsvarietät* zum Symbol $\{a_1, \ldots, a_n\}$, d.h. sie hat (schon lange bekannt) die Eigenschaft, dass für jeden Körper K/k mit $Q_a(K) \neq \varnothing$ gilt: $a \in 2K_n^M(K)$. Da die Quadrik Q_a über ihrem Funktionenkörper den tautologischen Punkt besitzt, erfüllt $K_a := k(Q_a)$ die Bedingung (i) von Theorem 5.

Schwierig ist es nun, Bedingung (ii) nachzuweisen. Zunächst haben wir das folgende Resultat von M. Rost über die Top-Kohomologie von Q_a:

Theorem 6. *(Rost) Es gibt eine natürliche Inklusion*

$$H_B^{2^n-1, 2^{n-1}}(Q_a, \mathbb{Z}) \hookrightarrow k^\times .$$

Dies ist der Moment, von glatten Varietäten zu allgemeineren Objekten überzugehen. Zunächst kann man motivische Kohomologie ganz formal auf glatte *simpliziale* Schemata erweitern. Die Aussagen von Theorem 2 bleiben gültig. Eine weitere Verallgemeinerung ist die auf *Motive*. Hierzu erweitern wir zunächst die Kategorie Sm_k der glatten (quasiprojektiven) Varietäten über k zur Kategorie $SmCor_k$, indem wir als Morphismen nicht nur Schema-Morphismen, sondern beliebige *endliche Korrespondenzen* zulassen. Die Kategorie $SmCor_k$ ist additiv. Eine *Nisnevich-Garbe mit Verlagerungen* ist ein Funktor

$$(SmCor_k)^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b,$$

der, eingeschränkt auf Sm_k eine Nisnevich-Garbe ist. Die Kategorie der Nisnevich-Garben mit Verlagerungen ist abelsch. Jede glatte Varietät X definiert durch

$$L[X](Y) = Hom_{SmCor_k}(Y, X)$$

eine Nisnevich-Garbe mit Verlagerungen. Sei nun $D^-N^{tr}(k)$ die derivierte Kategorie der nach oben beschränkten Komplexe von Nisnevich-Garben mit Verlagerungen. Ein Komplex $C^\bullet$ von Nisnevich-Garben mit Verlagerungen heißt *homotopieinvariant* oder auch $\mathbb{A}^1$-*lokal*, wenn für jede glatte Varietät X der durch die Projektion $X \times \mathbb{A}^1 \to X$ induzierte Homomorphismus

$$Hom_{D^-N^{tr}(k)}(L[X], C^\bullet) \longrightarrow Hom_{D^-N^{tr}(k)}(L[X \times \mathbb{A}^1], C^\bullet)$$

ein Isomorphismus ist. Die Komplexe $\mathbb{Z}(j)$, $j \geq 0$, sind wichtige Beispiele von $\mathbb{A}^1$-lokalen Komplexen von Nisnevich (sogar étalen) Garben mit Verlagerungen. Die Kategorie $DM_-^{\mathit{eff}}(k)$ ist die volle Unterkategorie von $D^-N^{tr}(k)$ bestehend aus den $\mathbb{A}^1$-lokalen Komplexen. Insbesondere sind für jede abelsche Gruppe A die Komplexe $A(i) = \mathbb{Z}(i) \otimes A$ Objekte von $DM_-^{\mathit{eff}}(k)$. Die Inklusion $DM_-^{\mathit{eff}}(k) \hookrightarrow D^-N^{tr}(k)$ hat ein Linksadjungiertes, die $\mathbb{A}^1$-*Lokalisierung*. Die $\mathbb{A}^1$-Lokalisierung von $L[X]$ wird mit $M(X)$ bezeichnet und heißt das *Motiv* von X. Diese Konstruktion setzt sich natürlich auf simpliziale Varietäten fort. Ein wichtiger Spezialfall sind die projektiven Räume. Deren Motive zerfallen in natürlicher Weise in eine direkte Summe in $DM_-^{eff}(k)$

Theorem 7.
$$M(\mathbb{P}_k^n) \cong \mathbb{Z}(0) \oplus \mathbb{Z}(1)[2] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}(n)[2n].$$

Für die motivische Kohomologie gilt nun

Theorem 8. *Für jedes $i \in \mathbb{Z}$, $j \geq 0$, und jede glatte simpliziale Varietät $\mathcal{X}$ gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$H_B^{i,j}(\mathcal{X}, A) \cong Hom_{DM_-^{eff}(k)}(M(\mathcal{X}), A(j)[i]).$$

Wir haben also eine motivische Interpretation der motivischen Kohomologie (!) und können die rechte Seite benutzen, um motivische Kohomologie für beliebige Elemente aus $DM_-^{eff}(k)$ zu definieren.

Sei nun Q eine Quadrik über k. Über jeder Erweiterung K von k mit $Q(K) \neq \varnothing$ wird Q rational und $M(Q_K)$ zerfällt in $DM_-^{eff}(K)$ wie in Theorem 7. M. Rost hat nun bewiesen, dass die Pfister-Quadriken $M(Q_a)$ schon in $DM_-^{eff}(k)$ einen interessanten Faktor M_a abspalten, der sich nach Basiswechsel zu jedem Körper K mit $Q(K) \neq \varnothing$ mit dem Summanden $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(2^{n-1}-1)[2^n-2]$ aus Theorem 7 identifiziert. Aus Theorem 6 erhalten wir das folgende

Korollar 9. *Für jede Körpererweiterung K/k ist der induzierte Homomorphismus*

$$H_B^{2^n-1,2^{n-1}}(M_a, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_B^{2^n-1,2^{n-1}}((M_a)_K, \mathbb{Z})$$

injektiv.

Für eine Varietät X kann man stets das sogenannte Čech-simpliziale Schema $\check{C}(X)$ betrachten, welches in Grad i durch X^{i+1} gegeben ist und die Rand- und Entartungsabbildungen durch Projektionen und Diagonalabbildungen. Hat X einen k-rationalen Punkt, so ist (in einem präzisen Sinne) die Strukturabbildung $\check{C}(X) \to \mathrm{Spec}(k)$ eine Homotopieäquivalenz und insbesondere

$$H_B^{i,j}(k, A) \cong H_B^{i,j}(\check{C}(X), A)$$

für alle i, j, A. Da étale lokal immer Punkte existieren, gilt diese Gleichung in der étalen Version ganz unabhängig von der Existenz eines rationalen Punktes.

Das Čech-simpliziale Schema zu Q_a und das Rost-Motiv M_a sind durch ein ausgezeichnetes Dreieck in $DM_-^{eff}(k)$ verbunden.

Theorem 10. *Wir haben das ausgezeichnete Dreieck in $DM_-^{eff}(k)$*

$$M(\check{C}(Q_a))(2^{n-1}-1)[2^n-2] \to M_a \to M(\check{C}(Q_a)) \to M(\check{C}(Q_a))(2^{n-1}-1)[2^n-1].$$

Mit Hilfe dieses Dreiecks und Theorem 2 zeigt man dann

Theorem 11. *Angenommen $H90(w,2)$ gilt für $w \leq n-1$ und außerdem gelte $H_B^{n+1,n}(\check{C}(Q_a), \mathbb{Z}_{(2)}) = 0$. Dann ist*

$$H_L^{n+1,n}(k, \mathbb{Z}_{(2)}) \to H_L^{n+1,n}(K_a, \mathbb{Z}_{(2)})$$

injektiv.

Um also die Milnor-Vermutung zu beweisen, verbleibt es $H_B^{n+1,n}(\check{C}(Q_a), \mathbb{Z}_{(2)}) = 0$ zu zeigen. Zunächst kommt man nur an eine deutliche höhere Dimension heran:

Theorem 12.
$$H_B^{2^n-1,2^{n-1}}(\check{C}(Q_a), \mathbb{Z}_{(2)}) = 0.$$

Beweisskizze: Aus dem Dreieck aus Theorem 10 erhalten wir eine Injektion

$$H_B^{2^n-1,2^{n-1}}(\check{C}(Q_a), \mathbb{Z}_{(2)}) \hookrightarrow H_B^{2^n-1,2^{n-1}}(M_a, \mathbb{Z}_{(2)}).$$

Wählt man nun ein Körpererweiterung K/k über der Q_a einen rationalen Punkt bekommt und vergleicht die Abbildungen auf Stufe k und K, so entsteht links die Null und rechts haben wir eine Injektion nach Korollar 9.

Im Fall $n = 2$ sind wir fertig, für $n > 2$ würde es nun genügen, einen injektiven Homomorphismus

$$H_B^{n+1,n}(\check{C}(Q_a), \mathbb{Z}_{(2)}) \longrightarrow H_B^{2^n-1,2^{n-1}}(\check{C}(Q_a), \mathbb{Z}_{(2)})$$

zu konstruieren. Nun haben Quadriken stets einen rationalen Punkt in einer Erweiterung vom Grad 2, über der ihr Čech-Schema also homotopieäquivalent zum Punkt ist, der in diesen Dimensionen keine (Nisnevich) motivische Kohomologie mehr besitzt. Also sind beide Gruppen durch 2 annulliert und betten sich in die entsprechende Kohomologie mit $\mathbb{Z}/2$-Koeffizienten ein. Es genügt daher, einen injektiven Homomorphismus

$$H_B^{n+1,n}(\check{C}(Q_a), \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H_B^{2^n-1,2^{n-1}}(\check{C}(Q_a), \mathbb{Z}/2)$$

zu konstruieren. Dies geschieht mit Hilfe gewisser *kohomologischer Operationen*, also Endomorphismen des bigraduierten Funktors $H_B^{*,*}(-, \mathbb{Z}/\ell)$. Genauer gesagt ist die obige Abbildung die Komposition $Q_{n-2} \cdots Q_1 Q_0$ sogenannter *Milnor-Operationen* (Q_i ist eine Operation vom Bigrad $(2\ell^i - 1, \ell^i - 1)$). Dass die Q_i hier injektiv sind, folgt aus dem Verschwinden gewisser *Margolis*-Kohomologiegruppen und der Induktionsannahme $H90(w, 2)$ für $w \leq n-1$. Damit hat man die Milnor-Vermutung bewiesen!

Nun sei ℓ nicht notwendig gleich 2. Damit fehlen uns die Pfister-Quadriken und ihre Rostmotive. Ein Ersatz hierfür sind die v_n-(bzw. $v_{\leq n}$)-Varietäten und ihre verallgemeinerten Rostmotive.

Hierzu benötigt man zunächst charakteristische Klassen. Für eine glatte projektive Varietät X und ein Vektorbündel E auf X gibt es in natürlicher Weise eine Klasse
$$s_d(E) \in H_B^{2d,d}(X, \mathbb{Z}).$$
Diese heißt die d-te *Milnorklasse* von E. Im Spezialfall, dass $E = \mathcal{L}$ ein Geradenbündel ist, gilt $s_d(L) = c_1(\mathcal{L})^d$, wobei $c_1(\mathcal{L})$ die Klasse von $\mathcal{L}$ in $Pic(X) = H^1(X, \mathbb{G}_m) = H_B^{2,1}(X, \mathbb{Z})$ bezeichnet. Für Vektorbündel E und F auf X gilt $s_d(E \oplus F) = s_d(E) + s_d(F)$. Verlangt man diese Eigenschaften in funktorieller Weise in X, so kann man zeigen, dass s_d damit festgelegt ist (s_d ist das d-te Newtonpolynom in den Chernklassen). Ist $E = T_X$ das Tangentialbündel (bei anderen Autoren das Normalenbündel, das ändert aber nur das Vorzeichen), so schreibt man

$$s_d(X) := s_d(T_X).$$

Im weiteren benutzen wir die *Gradabbildung*: $\deg : H_B^{2d,d}(X, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$, $d = \dim X$. Für eine glatte projektive Varietät X der Dimension $\ell^n - 1$ ist es bekannt, dass $\deg s_{\ell^n-1}(X)$ stets durch ℓ teilbar ist.

Definition. Eine glatte projektive Varietät X heißt v_n-Varietät, wenn $\dim X = \ell^n - 1$ und

$$\deg(s_{\ell^n-1}(X)) \not\equiv 0 \bmod \ell^2$$

gilt. Sie heißt $v_{\leq n}$-Varietät, wenn sie eine v_n-Varietät ist und es es für jedes $i \leq n-1$ einen Morphismus $X_i \to X$ von einer v_i-Varietät nach X gibt.

Beispiel. Sei H eine glatte Hyperfläche vom Grad d im $\mathbb{P}^{\ell^n}$. Dann gilt

$$s_{\ell^n-1}(H) = d(1 - d^{\ell^n-1} + \ell^n).$$

Für $n > 0$ ist diese Zahl durch ℓ teilbar. Es ist H eine v_n-Varietät falls d durch ℓ aber nicht durch ℓ^2 teilbar ist. In diesem Fall (man betrachte glatte Hyperebenenschnitte) ist H sofort auch eine $v_{\leq n}$-Varietät. Dies wendet sich zum Beispiel auf die Pfister-Quadriken Q_a zu Symbolen $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ an, die Hyperflächen vom Grad 2 im $\mathbb{P}^{2^n}$ sind

Einen Ersatz für das Rost-Motiv erhält man durch den folgenden Satz von Voevodsky.

Theorem 13. *Sei X eine v_n-Varietät mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass ein $\delta \in H_B^{n+1,n}(X, \mathbb{Z}/\ell)$ existiert, mit*

$$Q_0 Q_1 \cdots Q_n(\delta) \neq 0,$$

wobei Q_i die Milnor-Operationen sind. Dann existieren Objekte M_i, $i = 1, \ldots, \ell-1$, in $DM_-^{\mathrm{eff}}(k)$ mit den folgenden Eigenschaften. Mit $M_0 = M(\check{C}(X))$ und $b = (\ell^n - 1)/(\ell - 1)$ gilt:

(i) *Wir haben ein ausgezeichnete Dreiecke für $i = 1, \ldots, \ell - 1$*

$$M_{i-1}(b)[2b] \longrightarrow M_i \longrightarrow M(\check{C}(X)) \longrightarrow M_{i-1}(b)[2b+1],$$

$$M(\check{C}(X))(bi)[2bi] \longrightarrow M_i \longrightarrow M_{i-1} \longrightarrow M(\check{C}(X))(bi)[2bi+1].$$

(ii) *$M_{\ell-1}$ ist direkter Summand in $M(X)$.*

(iii) *$M_{\ell-1} \cong \mathcal{H}om_{DM_-^{\mathrm{eff}}(k)}(M_{\ell-1}, \mathbb{Z}(d)[2d]), \qquad d = \ell^n - 1 = \dim X.$*

Theorem 13 ist der Ersatz für Theorem 10 und mit seiner Hilfe kann man nun Theorem 11 auf beliebiges ℓ ausdehnen.

Theorem 14. *Sei X eine v_{n-1}-Varietät mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass ein $\delta \in H_B^{n,n-1}(X, \mathbb{Z}/\ell)$ existiert, mit $Q_0 Q_1 \cdots Q_{n-1}(\delta) \neq 0$. Angenommen $H90(w, \ell)$ gilt für $w \leq n-1$ und $H_B^{n+1,n}(\check{C}(X), \mathbb{Z}_{(\ell)}) = 0$. Dann ist*

$$H_L^{n+1,n}(k, \mathbb{Z}_{(\ell)}) \to H_L^{n+1,n}(k(X), \mathbb{Z}_{(\ell)})$$

injektiv.

Jetzt muss also gezeigt werden, dass $H_B^{n+1,n}(\check{C}(X), \mathbb{Z}_{(\ell)}) = 0$ gilt. Hierzu verschiebt man das Problem wieder nach j.w.d. Benutzt man, wie im Fall $\ell = 2$, die Komposition $Q_{n-1} \cdots Q_0$, so landet man in $H_B^{2\ell\frac{\ell^{n-2}}{\ell-1}+3, \ell\frac{\ell^{n-2}}{\ell-1}+2}(\check{C}(X), \mathbb{Z}_{(\ell)})$, und diese Gruppe ist für $\ell \neq 2$ laut Voevodsky auch nicht besser zu verstehen, als die Ausgangsgruppe $H_B^{n+1,n}(\check{C}(X), \mathbb{Z}_{(\ell)})$. Daher legt man noch Q_{n-1} drauf und betrachtet die mit Hilfe von $Q_{n-1} \cdots Q_0$ konstruierte Abbildung

$$H_B^{n+1,n}(\check{C}(X), \mathbb{Z}_{(\ell)}) \to H_B^{2lb+2, lb+1}(\check{C}(X), \mathbb{Z}_{(\ell)}), \quad b = \frac{\ell^{n-1} - 1}{\ell - 1},$$

welche sich unter der Annahme $H90(w, \ell)$ für $w \leq n-1$ als Inklusion herausstellt. Jetzt benötigt man einen Ersatz für Theorem 12. Dieser ist

Theorem 15. *Es ist* $H_B^{2lb+2,lb+1}(\check{C}(X), \mathbb{Z}_{(\ell)}) = 0$*, wenn die Folge*

$$H_{-1,-1}(X \times X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{(p_1)_* - (p_2)_*} H_{-1,-1}(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{-1,-1}(k, \mathbb{Z}) = k^\times$$

exakt ist. Hier ist für eine Varietät Y *die Homologiegruppe* $H_{-1,-1}(Y, \mathbb{Z})$ *definiert durch*

$$H_{-1,-1}(Y, \mathbb{Z}) = Hom_{DM_-^{\mathrm{eff}}(k)}(\mathbb{Z}, M(Y)(1)[1]).$$

Einen Beweis für das folgende Theorem hatte M. Rost angekündigt, publiziert wurde er von Suslin und Joukhovitski. Er benutzt in essentieller Weise Rosts *Kettenlemma*.

Theorem 16. *Sei* ℓ *eine Primzahl und* k *ein Körper der Charakteristik* 0 *mit* $\mu_\ell \subset k$*. Dann gibt es zu jedem nichttrivialen Symbol* $a = \{a_1, \ldots, a_n\} \in K_n^M(k)/\ell$ *eine glatte Varietät* X *über* k*, so dass*

- X *zerfällt* a*, d.h. das Bild von* a *in* $K_n^M(k(X))/\ell$ *ist Null.*
- X *ist eine* $v_{\leq n-1}$*-Varietät.*
- *Die Folge*

  $$H_{-1,-1}(X \times X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{(p_1)_* - (p_2)_*} H_{-1,-1}(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{-1,-1}(k, \mathbb{Z}) = k^\times$$

  ist exakt.

Erinnern wir uns, dass wir die MBKV nur für ℓ-spezielle Körper beweisen müssen. Wir können daher ohne weiteres $\mu_\ell \subset k$ annehmen. Fügt man alles zusammen, so hat man den allgemeinen Fall der MBKV bewiesen, wenn man das folgende Theorem zeigt, welches die ausstehende Voraussetzung der Theoreme 13 und 14 verifiziert.

Theorem 17. *Sei* $\mu_\ell \subset k$*,* $a = \{a_1, \ldots, a_n\} \in K_n^M(k)/\ell$ *nicht-trivial und sei* X_a *eine* $v_{\leq n-1}$*-Varietät, die* a *zerfällt. Dann gibt es ein* $\delta \in H_B^{n,n-1}(X, \mathbb{Z}/\ell)$ *mit* $Q_0 \cdots Q_{n-1}(\delta) \neq 0$*.*

Fertig!