Übungen zur Algebra II

Sommersemester 2019

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. P. Sechin

Blatt 13
keine Abgabe

Dieses Blatt dient zur Klausurvorbereitung. Die Lösung soll nicht abgegeben werden. Lösungshinweise werden am 18.7. online gestellt.

Aufgabe 1. Es sei A ein Hauptidealring und $\mathfrak{a} \subset A$, $\mathfrak{a} \neq 0$, ein Ideal. Zeigen Sie, dass der Faktorring $A/\mathfrak{a}$ artinsch ist.

Aufgabe 2. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und A eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A) \cong {}_nA \stackrel{df}{=} \{a \in A \mid na = 0\} \subset A.$$

Aufgabe 3. Es seien p, q Primzahlen. Zeigen Sie:

(a) Gilt $p \neq q$, so ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein projektiver $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$-Modul.

(b) Gilt $p = q$, so ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ kein projektiver $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$-Modul.

Aufgabe 4. Man zeige: Ist A ein kommutativer, noetherscher Ring und sind M und N endlich erzeugte A-Moduln, so ist $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ ein endlich erzeugter A-Modul.

Aufgabe 5. Es sei A ein Hauptidealring und M_1, M_2, N endlich erzeugte A-Moduln. Man zeige:

$$M_1 \oplus N \cong M_2 \oplus N \;\Rightarrow\; M_1 \cong M_2.$$

Man gebe ein Beispiel mit nicht endlich erzeugten Moduln an, in dem die obige Aussage falsch wird!

Aufgabe 6. Sei A ein Ring und Σ die Menge der Ideale in A, die nur aus Nullteilern bestehen. Zeigen Sie, dass Σ maximale Elemente bezüglich der Inklusion besitzt und, dass jedes maximale Element von Σ ein Primideal ist. Insbesondere kann die Menge der Nullteiler als Vereinigung von Primidealen dargestellt werden.

Aufgabe 7. Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\phi : V \to V$ ein K-Vektorraumendomorphismus von V. Es sei $f \in K[X]$ das Minimalpolynom von ϕ. Dann wird V in kanonischer Weise ein Modul über dem Ring $A = K[X]/(f)$, indem K wie vorgeben und X wie ϕ wirkt. Man zeige: Ist f irreduzibel, so ist V ein freier A-Modul. Gilt die Umkehrung dieser Aussage?

Aufgabe 8. Es sei p eine Primzahl. Wir betrachte die Inklusion von $\mathbb{Z}$-Moduln

$$M = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \subset N = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},$$

die auf dem n-ten Summanden durch die Inklusion $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, $1 \mapsto p^{n-1}$, gegeben ist. Man zeige: Die Vervollständigung $\widehat{M}$ von M bezüglich der

(a) (p)-adischen Topologie auf M ist natürlich isomorph zu M.

(b) Einschränkung der (p)-adischen Topologie von N auf M ist natürlich isomorph zum direkten Produkt $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.