Übungen zur Algebra II

Sommersemester 2019

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. P. Sechin

Blatt 12
Abgabetermin: Donnerstag, 11.07.2019, 9.15 Uhr

Aufgabe 1. *(Nilpotenz und artinsche Ringe)* Sei A ein noetherscher Ring, in dem jedes Element entweder eine Einheit oder nilpotent ist. Zeigen Sie, dass A ein artinscher lokaler Ring ist.

Aufgabe 2. *(Universelle Eigenschaften)*

(a) Zeigen Sie, dass das kartesische Produkt topologischer Räume zusammen mit der in der Vorlesung definierten Topologie die Universaleigenschaft für das Produkt in der Kategorie der topologischen Räume erfüllt.

(b) Sei I eine gerichtete halbgeordnete Indexmenge und $(T_i)_{i\in I}$ ein projektives System topologischer Räume (die Übergangsabbildungen sind als stetig vorausgesetzt). Zeigen Sie: Die Menge $\varprojlim T_i$ versehen mit der Unterraumtopologie in $\prod T_i$ erfüllt die Universaleigenschaft von $\varprojlim$ in topologischen Räumen.

Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe G zusammen mit einer Topologie, so dass die Abbildungen $G \times G \to G$, $(g,h) \longmapsto gh$ und $G \to G$, $g \longmapsto g^{-1}$, stetig sind.

Aufgabe 3. *(Abschluss von Untergruppen)* Es sei G eine topologische Gruppe. Zeigen Sie: Ist H eine Untergruppe von G, dann ist auch ihr Abschluss $\overline{H}$ eine Untergruppe von G. Ist H ein Normalteiler von G, dann ist auch $\overline{H}$ ein Normalteiler von G.

Die folgende Aufgabe ist Teil einer Serie von Aufgaben über das Spektrum eines Ringes.

Aufgabe 4. *(Trennungseigenschaften der Zariski-Topologie)*
Sei A ein kommutativer Ring mit 1 und $X = \operatorname{Spec} A$. Zeigen Sie:

(a) X erfüllt T_0.

(b) Sei überdies A noethersch. Dann sind äquivalent:

(i) X erfüllt T_2.
(ii) X erfüllt T_1.
(iii) A ist artinsch.
(iv) X ist endlich und diskret.

bitte wenden!

Ein topologischer T Raum heißt *quasi-kompakt*, wenn er die folgende Eigenschaft hat:

Gilt $T = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \subset T$ offen für alle $i \in I$, so existiert eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit $T = \bigcup_{j \in J} U_j$.

Ein topologischer Raum T heißt *kompakt*, wenn er quasi-kompakt und hausdorffsch ist.

Zusatzaufgabe 5. *(Proendliche Gruppen)*

Sei G eine kompakte topologische Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Jede offene Untergruppe U ist von endlichem Index in G und enthält einen offenen Normalteiler von G.

(b) Angenommen, jede offene Teilmenge M von G mit $1 \in M$ enthält einen offenen Normalteiler (eine solche Gruppe nennt man *proendlich*). Dann ist jede abgeschlossene Untergruppe H von G der Durchschnitt aller sie enthaltenden offenen Untergruppen von G:

$$\overline{H} = \bigcap_{\substack{U \subset G \text{ offen} \\ H \subset U}} U \ .$$