Übungen zur Algebra II

Sommersemester 2019

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. P. Sechin

Blatt 11
Abgabetermin: Donnerstag, 04.07.2019, 9.15 Uhr

Aufgabe 1. *(Tor über noetherschen Ringen)* Sei A ein kommutativer, noetherscher Ring und M, N endlich erzeugte A-Moduln. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Tor}_n^A(M,N)$ für alle n ein endlich erzeugter A-Modul ist.

Aufgabe 2. *(Irreduzible Ideale)*
Sei A ein noetherscher Ring und $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ ein Ideal. Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathfrak{a}$ irreduzibel, so gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{p}^n \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$.

(b) Ist A ein Hauptidealring, so ist $\mathfrak{a}$ genau dann irreduzibel, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^n$ für ein Primideal $\mathfrak{p}$ und ein $n \in \mathbb{N}$.

(c) Im Allgemeinen sind Ideale der Form $\mathfrak{p}^n$ nicht notwendig irreduzibel. Weisen Sie dies am Beispiel $A = \mathbb{C}[X,Y]$, $\mathfrak{p} = (X,Y)$, $n = 2$ nach.

Aufgabe 3. *(Minimale Primideale und Nullteiler)* Sei A ein noetherscher Ring und $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m$ die minimalen Primideale in A. Zeigen Sie:

(a) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\mathfrak{p}_1^n \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_m^n = (0)$.
Hinweis: Benutzen Sie die Nilpotenz des Nilradikals.

(b) Jedes minimale Primideal in A besteht aus Nullteilern.
Hinweis: Sei $x_1 \in \mathfrak{p}_1$ und für $i = 2, \dots, m$, $x_i \in \mathfrak{p}_i \smallsetminus \mathfrak{p}_1$. Folgern Sie aus $x_1^n x_2^n \cdot \ldots \cdot x_m^n = 0$, dass x_1^n und damit auch x_1 ein Nullteiler ist.

Die folgende Aufgabe ist Teil einer Serie von Aufgaben über das Spektrum eines Ringes.

Aufgabe 4. *(Strukturgarbe)* Sei A ein nullteilerfreier kommutativer Ring mit 1, K sein Quotientenkörper und $X = \operatorname{Spec} A$. Ein Element $f \in K$ heißt *regulär* bei einem Punkt $\mathfrak{p} \in X$, wenn $f = \frac{g}{h}$ mit $g \in A$, $h \in A \smallsetminus \mathfrak{p}$, mit anderen Worten, wenn $f \in A_{\mathfrak{p}}$. Für eine (Zariski-)offene Teilmenge U von X sei $\mathcal{O}_X(U)$ die Menge der Elemente in K, die an jedem Punkt von U regulär sind, d. h.

$$\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}} \subset K.$$

Zeigen Sie: Für beliebiges $h \in A$ gilt $\mathcal{O}_X(X_h) = A_h$.
Hinweis: Sie können sich auf den Beweis von $\mathcal{O}_X(X) = A$ (also $h = 1$) beschränken (warum?). Sei $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Dann gibt es zu jedem $\mathfrak{p}_i \in X$ Elemente $g_i, h_i \in A$ mit $f = \frac{g_i}{h_i}$ und $\mathfrak{p}_i \in X_{h_i}$ ($\Leftrightarrow h_i \notin \mathfrak{p}_i$). Da X quasi-kompakt ist, reichen endlich viele der X_{h_i} aus, um X zu überdecken. Sei also

$$f = \frac{g_1}{h_1} = \ldots = \frac{g_n}{h_n} \quad \text{und} \quad \bigcup_{i=1}^{n} X_{h_i} = X.$$

Zeigen Sie: Es gibt $a_1, \dots, a_n \in A$ mit $\sum_{i=1}^n a_i h_i = 1$, und für diese folgt $f = \sum_{i=1}^n a_i g_i \in A$.

Zusatzaufgabe 5. *(Endomorphismen noetherscher Moduln)*
Sei A ein kommutativer Ring, M ein noetherscher A-Modul und $\varphi : M \to M$ ein surjektiver Endomorphismus. Zeigen Sie, dass φ ein Isomorphismus ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass für $n \gg 0$ gilt: $\ker(\varphi^n) = \ker(\varphi^{2n})$. Folgern Sie $\ker(\varphi^n) \cap \operatorname{im}(\varphi^n) = 0$ und daraus die Behauptung.