Übungen zur Algebra II

Sommersemester 2019

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. P. Sechin

Blatt 10
Abgabetermin: Donnerstag, 27.06.2019, 9.15 Uhr

Aufgabe 1. *(Gruppenringe)* Sei $\mathcal{R}$ die Kategorie der Ringe mit 1 (nicht notwendig kommutativ) und $\mathcal{G}$ die Kategorie der Gruppen. Betrachten Sie den Funktor $F\colon \mathcal{R} \to \mathcal{G}$, $R \mapsto R^\times$. (Ist $f\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus, so ist $F(f)$ die Einschränkung von f auf die Einheitengruppen von R und S.) Zeigen Sie, dass F einen linksadjungierten Funktor besitzt und beschreiben Sie diesen.

Aufgabe 2. *(Abelsche topologische Gruppen)* Sei A eine abelsche Gruppe und $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ein projektives System von Untergruppen mit Inklusionen als Übergangsabbildungen. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent mit Grenzwert* $a \in A$ (bzw. *Cauchyfolge*), wenn für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl N existiert, so dass $a_n - a \in A_i$ für alle $n \geq N$ (bzw. $(a_n - a_m) \in A_i$ für alle $n, m \geq N$). Zeigen Sie:

(a) Der Grenzwert einer konvergenten Folge in A ist genau dann eindeutig, wenn $\varprojlim_i A_i = 0$.

(b) Es konvergiert genau dann jede Cauchyfolge in A, wenn $\varprojlim_i^1 A_i = 0$.

Hinweis: Für (b) zeige man, dass genau dann jede Cauchyfolge in A konvergiert, wenn der natürliche Homomorphismus $A \to \varprojlim_i A/A_i$ surjektiv ist. (Ist $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge, so nehme man nach Übergang zu einer Teilfolge an, dass $(a_n - a_m) \in A_i \;\forall\, n, m \geq i$ und betrachte das Element $(a_i \bmod A_i)_i \in \varprojlim_i A/A_i$.)

Aufgabe 3. *(Leerer projektiver Limes)* Sei I die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$, halbgeordnet durch Inklusion. Für $i \in I$ sei $M_i := \{\alpha : i \to \mathbb{Q} \mid \alpha \text{ injektive Mengenabbildung}\}$. Für $i \subset j$ sei $\varphi_{ij} : M_j \to M_i$, $\alpha \mapsto \alpha|_i$, die Einschränkung. Zeigen Sie:

(a) (M_i, φ_{ij}) ist ein projektives System nichtleerer Mengen mit surjektiven Übergangsabbildungen.

(b) Es gilt $\varprojlim_{i\in I} M_i = \emptyset$.

Die folgende Aufgabe ist Teil einer Serie von Aufgaben über das Spektrum eines Ringes.

Aufgabe 4. *(Irreduzibilität)* Ein topologischer Raum X heißt *irreduzibel*, falls $X \neq \emptyset$ und X nicht als Vereinigung zweier echter abgeschlossener Teilmengen dargestellt werden kann, oder äquivalent dazu, falls jede nichtleere offene Teilmenge dicht in X ist.

Sei A ein kommutativer Ring und $X = \operatorname{Spec} A$. Zeigen Sie:

(a) X ist genau dann irreduzibel, wenn das Nilradikal $\mathfrak{N}(A)$ von A prim ist.

(b) A ist genau dann nullteilerfrei, wenn X irreduzibel und A reduziert ist (d.h. $\mathfrak{N}(A) = 0$).

Die Nullteilerfreiheit von A beinhaltet somit eine globale topologische Komponente (die Irreduzibilität von $\operatorname{Spec} A$) und eine lokale algebraische Komponente (die Reduziertheit von A).

bitte wenden!

Zusatzaufgabe 5. *(Absolut flache Ringe)* Ein kommutativer Ring A heißt *absolut flach*, wenn jeder A-Modul flach ist. Zeigen Sie:

(a) Absolute Flachheit ist eine lokale Eigenschaft: A ist genau dann absolut flach, wenn $A_{\mathfrak{p}}$ für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ absolut flach ist.
Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3 von Blatt 9.

(b) Ein lokaler Ring ist genau dann absolut flach, wenn er ein Körper ist.
Hinweis: Betrachten Sie den A-Modul $A/\mathfrak{m}$, wobei $\mathfrak{m}$ das Maximalideal von A ist, und verwenden Sie Satz 14.2. Folgern Sie: Absolut flache Ringe sind reduziert (vgl. Blatt 5, Aufgabe 3).

(c) Sei A ein reduzierter Ring. Dann ist A genau dann absolut flach, wenn jedes Primideal von A ein Maximalideal ist.