Übungen zur Algebra II

Sommersemester 2019

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. P. Sechin

Blatt 9
Abgabetermin: Mittwoch, 19.06.2019, 18:00 Uhr

Aufgabe 1. *(Dimensionsverschiebung)*
Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend vielen Projektiven, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein rechtsexakter Funktor in eine abelsche Kategorie $\mathcal{B}$ und

$$0 \to K_m \to P_{m-1} \to P_{m-2} \to \ldots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

eine exakte Folge in $\mathcal{A}$ mit F-azyklischen (z.B. projektiven) Objekten $P_{m-1}, \ldots, P_0$. Zeigen Sie: Es gibt natürliche Isomorphien

$$\begin{aligned} L_nF(M) &\cong L_{n-m}F(K_m) \qquad\qquad \forall\ n > m, \\ L_mF(M) &\cong \ker(FK_m \to FP_{m-1}). \end{aligned}$$

Hinweis: Man behandle zunächst den Fall $m = 1$ mit der langen exakten Homologiefolge für linksabgeleitete Funktoren und spalte im allgemeinen Fall obige Folge in kurze exakte Folgen auf.

Aufgabe 2. *(Ext und Tor)*

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$, $n, m \in \mathbb{N}$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^i(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3. Es seien A ein kommutativer Ring, $S \subset A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge und M, N $S^{-1}A$-Moduln, die wir über die natürliche Abbildung $A \to S^{-1}A$ auch als A-Moduln auffassen. Zeigen Sie: es existieren natürliche Isomorphismen von A-Moduln

$$\mathrm{Tor}_i^A(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_i^{S^{-1}A}(M, N)$$

für alle $i \geq 0$. Insbesondere ist M genau dann flacher $S^{-1}A$-Modul wenn es flacher A-Modul ist.

Die folgende Aufgabe ist Teil einer Serie von Aufgaben über das Spektrum eines Ringes.

Aufgabe 4. *(Induzierte Eigenschaften von Spektrenmorphismen)*
Sei $\phi\colon A \to B$ ein Homomorphismus von kommutativen Ringen und $\phi^*\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ die induzierte stetige Abbildung der Spektren. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist ϕ injektiv, so ist das Bild von ϕ^* dicht in $\operatorname{Spec} A$, d. h. der Abschluss des Bildes ist ganz $\operatorname{Spec} A$.

(b) Ist B treuflach über A, so ist ϕ^* surjektiv.

bitte wenden!

Zusatzaufgabe 5. *(Projektive Dimension)*
Sei R ein Ring. Zu einem R-Modul M definiert man seine *projektive Dimension* durch

$$\operatorname{projdim} M := \sup \{n \in \mathbb{N}_0 \mid \text{ es gibt einen Modul } N \text{ mit } \operatorname{Ext}_R^n(M,N) \neq 0\},$$

falls $M \neq 0$, und setzt $\operatorname{projdim} 0 = -\infty$. Mit anderen Worten: Es gilt $\operatorname{projdim} M \leq m$ genau dann, wenn $\operatorname{Ext}_R^n(M,N) = 0$ für alle $n > m$ und alle R-Moduln N.
Sei M ein R-Modul und $m \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $\operatorname{projdim} M \leq m$.

(b) Es gilt $\operatorname{Ext}_R^{m+1}(M,N) = 0$ für alle R-Moduln N.

(c) Es gibt eine projektive Auflösung $0 \to P_m \to P_{m-1} \to \ldots \to P_1 \to P_0 \to 0$ von M.

Für $m = 0$ ergibt sich insbesondere: M ist genau dann projektiv, wenn $\operatorname{projdim} M \leq 0$.
Folgern Sie: Ein R-Modul mit $\operatorname{projdim} M \leq m$ erfüllt $L_n F(M) = 0$ für jeden rechtsexakten Funktor F und jedes $n > m$.
Hinweis: Behandeln Sie zunächst den Fall $m = 0$. Im allgemeinen Fall wählen Sie eine projektive Auflösung $P_\bullet$ von M und setzen $K_m = \operatorname{im}(P_m \to P_{m-1})$. Zeigen Sie, dass K_m projektiv ist.