Übungen zur Algebra II

Sommersemester 2019

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. P. Sechin

Blatt 8
Abgabetermin: Donnerstag, 13.06.2019, 9.15 Uhr

Aufgabe 1. *(Adjungierte Funktoren)*
Sei R ein nicht notwendig kommutativer Ring mit 1. Für eine abelsche Gruppe N werden $R \otimes_{\mathbb{Z}} N$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, N)$ mit den Multiplikationsabbildungen

$$\begin{aligned} R \times (R \otimes_{\mathbb{Z}} N) \to R \otimes_{\mathbb{Z}} N, &\qquad (r, s \otimes n) \mapsto (rs) \otimes n, \\ R \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, N), &\qquad (r, \phi) \mapsto \big(s \mapsto \phi(sr)\big) \end{aligned}$$

in natürlicher Weise zu R-Linksmoduln.

(a) Zeigen Sie: Der additive Funktor $R \otimes_{\mathbb{Z}} - : \mathcal{A}b \to R\text{-Mod}$ ist linksadjungiert und der additive Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, -) : \mathcal{A}b \to R\text{-Mod}$ rechtsadjungiert zu dem Vergissfunktor $R\text{-Mod} \to \mathcal{A}b$. *Hinweis:* Vergleichen Sie mit dem Beweis von Lemma 6.15 aus der Vorlesung.

(b) Folgern Sie: Der Vergissfunktor $R\text{-Mod} \to \mathcal{A}b$ ist exakt (das hätte man auch einfacher zeigen können), für jede projektive abelsche Gruppe P ist $R \otimes_{\mathbb{Z}} P$ ein projektiver R-Modul und für jede injektive abelsche Gruppe I ist $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, I)$ ein injektiver R-Modul.

Aufgabe 2. *(Hufeisenlemma)*
Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ eine kurze exakte Folge in $\mathcal{A}$. Angenommen, wir haben zwei Monomorphismen $i' : A' \to I'^0$ und $i'' : A'' \to I''^0$ mit I'^0, I''^0 injektiv.

(a) Konstruieren Sie einen Monomorphismus $i : A \to I'^0 \oplus I''^0$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I'^0 \arrow[r] & I'^0 \oplus I''^0 \arrow[r] & I''^0 \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[u, hook, "i'"] & A \arrow[r] \arrow[u, hook, dashed, "i"] & A'' \arrow[r] \arrow[u, hook, "i''"] & 0 \end{tikzcd}$$

Dabei seien die Morphismen in der ersten Zeile die natürliche Inklusion bzw. Projektion.

(b) Wiederholen Sie nun das obige Argument für die exakte Folge

$$0 \to \mathrm{coker}(i') \to \mathrm{coker}(i) \to \mathrm{coker}(i'') \to 0$$

usw., um induktiv Satz 10.12 der Vorlesung zu zeigen: Ist $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ eine kurze exakte Folge in $\mathcal{A}$ und besitzen A' und A'' injektive Auflösungen $I'^\bullet$ und $I''^\bullet$, so gibt es eine injektive Auflösung $I^\bullet$ von A, die in eine kurze exakte Folge von Komplexen $0 \to I'^\bullet \to I^\bullet \to I''^\bullet \to 0$ passt.

Aufgabe 3. *(Euler-Charakteristik)*
Sei K ein Körper und $\mathcal{V}$ die (abelsche) Kategorie der endlich-dimensionalen K-Vektorräume. Zu einem Komplex $A^\bullet$ in $\mathcal{V}$ definieren wir seine *Euler-Charakteristik* als

$$\chi(A^\bullet) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \dim_K H^i(A^\bullet),$$

falls nur endlich viele der $H^i(A^\bullet)$ nicht verschwinden. Andernfalls existiert die Euler-Charakteristik nicht. Zeigen Sie:

(a) Sei $0 \to A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to 0$ eine kurze exakte Folge von Komplexen in $\mathcal{V}$. Existieren zwei der drei Euler-Charakteristiken $\chi(A^\bullet)$, $\chi(B^\bullet)$ und $\chi(C^\bullet)$, so auch die dritte, und es gilt

$$\chi(B^\bullet) = \chi(A^\bullet) + \chi(C^\bullet).$$

(b) Angenommen, nur endlich viele der A^i sind verschieden von 0. Dann existiert die Euler-Charakteristik von $A^\bullet$, und es gilt

$$\chi(A^\bullet) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \dim_K A^i.$$

Hinweis: Benutzen Sie jeweils den Rangsatz für kurze exakte Folgen (spalten Sie dazu die lange exakte Kohomologiefolge in kurze exakte Folgen auf).

Die folgende Aufgabe ist Teil einer Serie von Aufgaben über das Spektrum eines Ringes.

Aufgabe 4. *(Offene und abgeschlossene Immersionen)*
Sei A ein kommutativer Ring mit 1 und $X = \operatorname{Spec} A$. Eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt *Homöomorphismus*, wenn eine stetige Umkehrabbildung existiert.

(a) Sei f ein Element in A und $Y = \operatorname{Spec} A_f$. Zeigen Sie, dass die zu dem Lokalisierungshomomorphismus $\phi\colon A \to A_f$ assoziierte Abbildung $\phi^*\colon Y \to X$ der Spektren einen Homöomorphismus von Y auf die basisoffene Teilmenge X_f induziert.

(b) Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A und $Z = \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$. Zeigen Sie, dass die zur Projektion $\pi : A \to A/\mathfrak{a}$ assoziierte Abbildung $\pi^*\colon Z \to X$ der Spektren einen Homöomorphismus von Z auf $V(\mathfrak{a})$ induziert.

Zusatzaufgabe 5. *(Abbildungskegel)*
Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $f : A^\bullet \to B^\bullet$ ein Homomorphismus von Komplexen in $\mathcal{A}$. Zu f definieren wir einen Komplex $C(f)^\bullet$ durch $C(f)^n = A^{n+1} \oplus B^n$ und

$$d_n^{C(f)} = \begin{pmatrix} -d_{n+1}^A & 0 \\ f_{n+1} & d_n^B \end{pmatrix} : A^{n+1} \oplus B^n \to A^{n+2} \oplus B^{n+1}.$$

Zeigen Sie:

(a) $C(f)^\bullet$ ist tatsächlich ein Komplex und wir erhalten eine kurze exakte Folge von Komplexen

$$0 \to B^\bullet \to C(f)^\bullet \to A[1]^\bullet \to 0.$$

Hierbei ist $A[1]^\bullet$ der Komplex mit $A[1]^n = A^{n+1}$ und $d_n^{A[1]} = -d_{n+1}^A$.

(b) Aus dieser kurzen exakten Folge erhalten wir eine lange exakte Kohomologiefolge

$$\ldots \to H^n(A^\bullet) \to H^n(B^\bullet) \to H^n(C(f)^\bullet) \to H^{n+1}(A^\bullet) \to \ldots$$

Hierbei ist der Verbindungshomomorphismus $H^n(A^\bullet) \to H^n(B^\bullet)$ gerade $H^n(f)$.

(c) Es sei

$$\begin{array}{ccc} A^\bullet & \xrightarrow{f} & B^\bullet \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ A'^\bullet & \xrightarrow{g} & B'^\bullet \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Komplexen in $\mathcal{A}$. Dann existiert ein natürlicher Komplexhomomorphismus $c : C(f)^\bullet \to C(g)^\bullet$. Sind ϕ und ψ Quasiisomorphismen (d.h. induzieren Isomorphismen auf der Kohomologie), so ist auch c ein Quasiisomorphismus.