

Übungen zur Algebra II

Sommersemester 2019

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. P. Sechin

Blatt 7
Abgabetermin: Donnerstag, 06.06.2019, 9.15 Uhr

Aufgabe 1. (Produkte)

Betrachten Sie für eine Primzahl p die Familie $(\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z})_{i \in \mathbb{N}}$ abelscher Gruppen. Zeigen Sie:

- In der Kategorie der zyklischen abelschen Gruppen haben keine zwei Elemente der Familie ein Produkt.
- Das Produkt der Familie in der Kategorie der abelschen Torsionsgruppen ist die Torsionsuntergruppe des kartesischen Produktes der Familie (d.h. des Produktes in der Kategorie der abelschen Gruppen). Diese stimmt nicht mit dem kartesischen Produkt selbst überein.

Aufgabe 2. (Mono- und Epimorphismen in additiven Kategorien)

Sei \mathcal{A} eine additive Kategorie. Zeigen Sie folgende Aussagen:

- Sei $f : A \rightarrow B$ ein Morphismus in \mathcal{A} . Dann sind äquivalent:
 - f ist ein Monomorphismus.
 - Für jedes $C \in \text{ob}(\mathcal{A})$ und jeden Morphismus $h : C \rightarrow A$ gilt: $fh = 0 \implies h = 0$.
 - $0 \rightarrow A$ ist ein Kern von f .

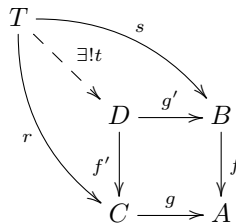
Formulieren Sie die entsprechenden Äquivalenzen für Epimorphismen.

- Für alle Objekte A, B in \mathcal{A} ist die kanonische Projektion $p_1 : A \oplus B \rightarrow A$ ein Epimorphismus und die kanonische Inklusion $i_1 : A \rightarrow A \oplus B$ ein Monomorphismus.

Aufgabe 3. (Faserprodukt)

Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie und $f : B \rightarrow A, g : C \rightarrow A$ zwei Morphismen in \mathcal{A} mit gemeinsamen Ziel. Das *Faserprodukt* von B und C über A ist ein Objekt $D = B \times_A C$, zusammen mit zwei Morphismen $f' : D \rightarrow C, g' : D \rightarrow B$ mit $gf' = fg'$ und folgender Universaleigenschaft:

Für jedes Objekt T und Morphismen $r : T \rightarrow C$ und $s : T \rightarrow B$ mit $gr = fs$ gibt es genau einen Morphismus $t : T \rightarrow D$, so dass $r = f't, s = g't$, d. h. folgendes Diagramm lässt sich eindeutig zu einem kommutativen Diagramm ergänzen:



Das Faserprodukt ist, falls es existiert, eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus. Zeigen Sie:

- In \mathcal{A} existieren alle Faserprodukte.
Hinweis: Seien $p_1 : B \oplus C \rightarrow B, p_2 : B \oplus C \rightarrow C$ die kanonischen Projektionen. Man setze $q = fp_1 - gp_2 : B \oplus C \rightarrow A$ und betrachte $(D \xrightarrow{m} B \oplus C) = \ker(q)$. Zeigen Sie, dass $(D, f' = p_2m, g' = p_1m)$ die universelle Eigenschaft des Faserprodukts $B \times_A C$ erfüllt.
- Ist f ein Monomorphismus, so auch f' .

- (c) Ist f ein Epimorphismus, so auch f' .

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass mit f auch q epimorph ist (benutzen Sie dazu $qi_1 = f$, wobei $i_1 : B \rightarrow B \oplus C$ die kanonische Inklusion ist). Sei nun ein Morphismus $h' : C \rightarrow S$ mit $h'f' = 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass $h'p_2 : B \oplus C \rightarrow S$ über q faktorisiert, d. h., dass es einen Morphismus $h : A \rightarrow S$ mit $h'p_2 = hq$ gibt. Verknüpfen Sie diese Identität mit i_1 , und folgern Sie zunächst $h = 0$ und dann $h' = 0$.

Die folgende Aufgabe ist Teil einer Serie von Aufgaben über das Spektrum eines Ringes.

Aufgabe 4. (*Morphismen*)

Sei $\phi : A \rightarrow B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe und $X = \text{Spec } A$ sowie $Y = \text{Spec } B$. Für $\mathfrak{q} \in Y$ ist $\phi^{-1}(\mathfrak{q})$ ein Primideal von A , d. h. ein Punkt von X . Also induziert ϕ eine Abbildung $\phi^* : Y \rightarrow X$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

- (a) Falls $f \in A$, so gilt $(\phi^*)^{-1}(X_f) = Y_{\phi(f)}$. Insbesondere ist ϕ^* stetig.
- (b) Ist \mathfrak{a} ein Ideal von A , so gilt $(\phi^*)^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a}^e)$.
- (c) Ist \mathfrak{b} ein Ideal von B , so gilt $\overline{\phi^*(V(\mathfrak{b}))} = V(\mathfrak{b}^c)$. Dabei bezeichnet \overline{U} für eine Teilmenge U eines topologischen Raumes T den *Abschluss* von U , d. h. die kleinste abgeschlossene Teilmenge von T , die U enthält.
- (d) Sei $\psi : B \rightarrow C$ ein weiterer Ringhomomorphismus. Dann gilt $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$.

Zusatzaufgabe 5. (*„Diagrammjagen“ in abelschen Kategorien*)

Ein Problem in allgemeinen abelschen Kategorien ist, dass man die Objekte nicht mehr als Mengen auffassen und daher nicht mehr von ihren Elementen sprechen kann, was für Diagrammjagen unerlässlich ist. Die folgende Aufgabe soll aufzeigen, wie sich das Konzept der Diagrammjagen doch auf beliebige abelsche Kategorien ausdehnen lässt.

Sei A ein Objekt der abelschen Kategorie \mathcal{A}^1 . Einen Morphismus $x : X \rightarrow A$ (wobei X irgendein Objekt von \mathcal{A} ist) in \mathcal{A} nennen wir „Element“ von A (in Zeichen $x \in_m A$). Für zwei „Elemente“ $X \xrightarrow{x} A$, $Y \xrightarrow{y} A$ schreiben wir $x \equiv y$ genau dann, wenn es ein Objekt Z und Epimorphismen $Z \xrightarrow{u} X$, $Z \xrightarrow{v} Y$ mit $xu = yv$ gibt. Zeigen Sie:

- (a) Die Relation \equiv ist eine Äquivalenzrelation, und es gilt $x \equiv (0 \rightarrow A)$ genau dann, wenn $X \xrightarrow{x} A$ der Nullmorphismus ist.
Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3 (c) und die Tatsache, dass Kompositionen von Epimorphismen wiederum Epimorphismen sind.
- (b) Eine Folge $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ ist genau dann exakt, wenn $gf = 0$ gilt und zu jedem $y \in_m B$ mit $gy \equiv 0$ ein $x \in_m A$ mit $fx \equiv y$ existiert.
Insbesondere ist ein Morphismus $f : A \rightarrow B$ genau dann monomorph, wenn für alle $x \in_m A$ aus $fx \equiv 0$ bereits $x \equiv 0$ folgt, und genau dann epimorph, wenn zu jedem $y \in_m B$ ein $x \in_m A$ mit $fx \equiv y$ existiert.
- (c) Zu jedem Morphismus $f : A \rightarrow B$ und „Elementen“ $x, y \in_m A$ mit $fx \equiv fy$ existiert eine „Differenz“ $z = „x - y“ \in_m A$ mit folgender Eigenschaft: Es gilt $fz \equiv 0$, und für jeden Morphismus $h : A \rightarrow C$ gilt:
- Ist $hx \equiv 0$, so gilt $hz \equiv -hy$.
 - Ist $hy \equiv 0$, so gilt $hz \equiv hx$.
 - Ist $hz \equiv 0$, so gilt $hx \equiv hy$.

Mit diesen „Elementen“ und ihren oben angeführten Eigenschaften lassen sich nun „Diagrammjagen“ in altbekannter Weise durchführen. Wer will, möge dies am Fünferlemma für beliebige abelsche Kategorien ausprobieren.

¹Um mengentheoretischen Problemen aus dem Weg zu gehen, nehmen wir an, dass \mathcal{A} „klein“ ist, d. h. $\text{ob}(\mathcal{A})$ ist eine Menge.