# Übungen zur Algebra II

Sommersemester 2019

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. P. Sechin

Blatt 6

**ACHTUNG!** Abgabetermin: **Mittwoch, 29.05.2019, 18.00 Uhr**

---

**Aufgabe 1.**

(a) Zeigen Sie: In der Kategorie (Mengen) der Mengen ist ein Morphismus genau dann ein Monomorphismus (bzw. Epimorphismus), wenn er injektiv (bzw. surjektiv) ist.

(b) Sei $R$ ein beliebiger Ring. Zeigen Sie: In der Kategorie $R$-Mod der $R$-Moduln gilt die Aussage von (a) ebenso.

(c) Sei (unitäre Ringe) die Kategorie der unitären Ringe mit unitären Ringhomomorphismen. Zeigen Sie: Die Inklusionsabbildung $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ ist ein Epimorphismus in (unitäre Ringe), aber offensichtlich nicht surjektiv.

**Aufgabe 2.** Sei $n$ eine natürliche Zahl.

(a) Sei $d$ ein Teiler von $n$. Zeigen Sie, dass der $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ genau dann projektiv ist, wenn $\mathrm{ggT}(d, \frac{n}{d}) = 1$. Insbesondere ist, falls $n$ keine Primpotenz ist, nicht jeder projektive $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modul frei. Folgern Sie: Ist $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ die Primfaktorzerlegung von $n$, so sind alle endlich erzeugten projektiven $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Moduln von der Form

$$(\mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z})^{f_1} \oplus \ldots \oplus (\mathbb{Z}/p_r^{e_r}\mathbb{Z})^{f_r}, \qquad f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{N}_0.$$

*Hinweis:* Benutzen Sie den Hauptsatz über endliche erzeugte $\mathbb{Z}$-Moduln.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein kofreier $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modul ist. Folgern Sie daraus, dass jeder endlich erzeugte projektive $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modul auch injektiv ist.

**Aufgabe 3.** *(Kategorientheoretische lineare Algebra)*
Sei $K$ ein Körper. Wir definieren zwei Kategorien $\mathcal{N}$ und $\mathcal{V}$ wie folgt:

- Die Objekte von $\mathcal{N}$ seien die nicht-negativen ganzen Zahlen, die Morphismen $\mathrm{Mor}_{\mathcal{N}}(n, m)$ seien durch die $m \times n$-Matrizen mit Einträgen aus $K$ gegeben und die Komposition durch Matrizenmultiplikation.
- Die Objekte von $\mathcal{V}$ seien die Paare $(V, \mathcal{B}_V)$, bestehend aus einem endlich-dimensionalen $K$-Vektorraum $V$ und einer $K$-Basis $\mathcal{B}_V$ von $V$. Ein Morphismus $\varphi : (V, \mathcal{B}_V) \to (W, \mathcal{B}_W)$ sei schlicht eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ und die Komposition die übliche Komposition von linearen Abbildungen.

Nun definieren wir zwei Funktoren $F : \mathcal{N} \to \mathcal{V}$ und $G : \mathcal{V} \to \mathcal{N}$:

- Der Funktor $F$ ordnet $n \in \mathrm{ob}(\mathcal{N})$ den Vektorraum $K^n$ mit der Standardbasis zu und einer $m \times n$-Matrix $A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{N}}(n, m)$ die durch Matrizenmultiplikation induzierte Abbildung $F_{m,n}(A) : K^n \to K^m$.
- Der Funktor $G$ ordnet einem Objekt $(V, \mathcal{B}_V) \in \mathrm{ob}(\mathcal{V})$ die Zahl $\dim V \in \mathrm{ob}(\mathcal{N})$ und einem Morphismus $\varphi : (V, \mathcal{B}_V) \to (W, \mathcal{B}_W)$ die Darstellungsmatrix von $\varphi$ bezüglich der Basen $\mathcal{B}_V$ und $\mathcal{B}_W$ zu.

Überprüfen Sie, dass $F$ und $G$ tatsächlich Funktoren sind, und zeigen Sie, dass sie Kategorienäquivalenz zwischen $\mathcal{N}$ und $\mathcal{V}$ induzieren.

*bitte wenden!*

*Die folgende Aufgabe ist Teil einer Serie von Aufgaben über das Spektrum eines Ringes.*

**Aufgabe 4.** *(Träger von Moduln)*
Sei $X = \operatorname{Spec} A$. Für einen $A$-Modul ist der *Träger von $M$*, geschrieben $\operatorname{Supp} M$, die Menge aller Primideale $\mathfrak{p} \subset A$ mit $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$. Nach Satz 5.19 der Vorlesung ist $\operatorname{Supp} M$ ist genau dann leer, wenn $M = 0$ ist. Zeigen Sie:

(a) Für eine exakte Folge von $A$-Moduln $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ gilt

$$\operatorname{Supp} M = \operatorname{Supp} M' \cup \operatorname{Supp} M''.$$

(b) Ist $M$ endlich erzeugt, so gilt $\operatorname{Supp} M = V(\operatorname{Ann}(M))$, insbesondere ist $\operatorname{Supp} M$ eine abgeschlossene Teilmenge von $X$. Im Allgemeinen gilt dagegen nur $\operatorname{Supp} M \subset V(\operatorname{Ann}(M))$. Zeigen Sie, dass der Träger des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ keine abgeschlossene Teilmenge von $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ ist.

**Zusatzaufgabe 5.** Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to$ (Mengen) heißt *darstellbar*, wenn es ein Objekt $A \in \operatorname{ob}(\mathcal{C})$ und eine natürliche Äquivalenz $t : \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) \to F$ gibt. Zeigen Sie:

(a) Ist $F$ darstellbar, so ist das darstellende Objekt bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.
*Hinweis:* Benutzen Sie das Yoneda-Lemma.

(b) Sei nun $\mathcal{C}$ die Kategorie (unitäre Ringe). Dann wird der Vergißfunktor $F : \mathcal{C} \to$ (Mengen) durch den unitären Ring $\mathbb{Z}[X]$ dargestellt.
*Hinweis:* Betrachten Sie die natürliche Transformation $t : \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbb{Z}[X], -) \to F$, bei der für jeden unitären Ring $B$ der Morphismus $t_B : \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbb{Z}[X], B) \to F(B)$ durch $t_B(\varphi) = \varphi(X)$ gegeben ist.