Übungen zur Algebra II

Sommersemester 2019

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. P. Sechin

Blatt 5
Abgabetermin: Donnerstag, 23.05.2019, 9.15 Uhr

Im Folgenden sei A stets ein kommutativer Ring mit 1.

Aufgabe 1. Sei $S \subset A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge und M, N zwei A-Moduln. Zeigen Sie, dass die kanonische Abbildung

$$S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \to S^{-1}(M \otimes_A N)$$
$$\tfrac{m}{s} \otimes \tfrac{n}{t} \mapsto \tfrac{m \otimes n}{st}$$

ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 2. Sei S_0 die Menge aller Nichtnullteiler des kommutativen Ringes A. Zeigen Sie:

(a) Die Menge S_0 ist die größte multiplikativ abgeschlossene Teilmenge, für die der Homomorphismus $A \to S_0^{-1}A$ injektiv ist. (Der Ring $S_0^{-1}A$ wird *(totaler) Quotientenring* von A genannt.)

(b) Jedes Element in $S_0^{-1}A$ ist entweder eine Einheit oder ein Nullteiler.

(c) Jeder Ring, in dem jede Nichteinheit ein Nullteiler ist, stimmt mit seinem Quotientenring überein.

Aufgabe 3. Ein Ring heißt *reduziert*, wenn er keine nilpotenten Elemente außer 0 enthält. Zeigen Sie: Ist für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ der lokale Ring $A_\mathfrak{p}$ reduziert, so ist auch A reduziert. Ist A stets nullteilerfrei, falls für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ der Ring $A_\mathfrak{p}$ nullteilerfrei ist?

Die folgende Aufgabe ist Teil einer Serie von Aufgaben über das Spektrum eines Ringes.

Aufgabe 4. *(Quasikompaktheit von* $\operatorname{Spec} A$*)*
Ein topologischer Raum heißt *quasikompakt*, falls jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat. Sei $X = \operatorname{Spec} A$ das Spektrum von A. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Der topologische Raum X ist quasikompakt.

(b) Allgemeiner sind die basisoffenen Mengen X_f für $f \in A$ quasikompakt.

(c) Eine offene Teilmenge von X ist genau dann quasikompakt, wenn sie als endliche Vereinigung von offenen Teilmengen der Gestalt X_f dargestellt werden kann.

Hinweis: Beobachten Sie, dass es ausreicht, Überdeckungen von X der Gestalt $(X_{f_i})_{i \in I}$ zu betrachten. Zeigen Sie, dass die f_i das Einsideal erzeugen. Insbesondere existiert eine Gleichung der Form

$$1 = \sum_{i \in J} g_i f_i \qquad (g_i \in A),$$

wobei J eine endliche Teilmenge von I ist.

bitte wenden!

Zusatzaufgabe 5. Ein nullteilerfreier Ring A mit Quotientenkörper K heißt *Bewertungsring*, wenn für $0 \neq x \in K$ gilt: $x \in A$ oder $x^{-1} \in A$. Zeigen Sie:

(a) Die Menge der Ideale eines Bewertungsrings ist bezüglich Inklusion total geordnet.

(b) Ein Bewertungsring A ist lokal mit Maximalideal

$$\mathfrak{m} = \{x \in A \mid x^{-1} \notin A\}.$$

(c) Ein Modul über einem Bewertungsring ist genau dann flach, wenn er torsionsfrei ist.

Hinweis zu (c): Es genügt zu zeigen, dass ein endlich erzeugter, torsionsfreier A-Modul frei (und damit flach) ist. Hierzu zeige man, dass jedes minimale Erzeugendensystem $(x_1, \ldots, x_n)$ linear unabhängig ist.