Übungen zur Algebra II

Sommersemester 2019

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. P. Sechin

Blatt 4
Abgabetermin: Donnerstag, 16.05.2019, 9.15 Uhr

Im Folgenden sei A stets ein kommutativer Ring mit 1.

Aufgabe 1. Sei $(M_i)_{i\in I}$ ein direktes System, $(N_i)_{i\in I}$ ein projektives System von A-Moduln. Zeigen Sie:

(a) (3P) Für jeden A-Modul P gibt es natürliche Isomorphien von A-Moduln

$$\varprojlim_i \operatorname{Hom}_A(M_i, P) \cong \operatorname{Hom}_A(\varinjlim_i M_i, P),$$
$$\varprojlim_i \operatorname{Hom}_A(P, N_i) \cong \operatorname{Hom}_A(P, \varprojlim_i N_i).$$

(b) (3P) Für jeden A-Modul P gilt

$$P \otimes_A \big(\varinjlim_i M_i\big) \cong \varinjlim_i (P \otimes_A M_i),$$

d. h. das Tensorprodukt vertauscht mit direkten Limiten. Zeigen Sie weiter, dass das Tensorprodukt im Allgemeinen nicht mit projektiven Limiten vertauscht.
Hinweis: Betrachten Sie $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$.

Aufgabe 2. Sei
$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$
eine exakte Folge von A-Moduln, wobei M'' ein flacher A-Modul ist. Zeigen Sie:

(a) (4P) Für jeden beliebigen A-Modul N ist die Folge

$$0 \to M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$$

exakt.

Hinweis. Betten Sie N in eine exakte Folge $0 \to K \to F \to N \to 0$ mit einem freien Modul F ein, tensorieren Sie diese exakte Folge mit der Folge $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ und machen Sie eine Diagrammjagd in dem entstehenden quadratförmigen kommutativen Diagramm.

(b) (2P) Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A, so gilt $M' \cap \mathfrak{a}M = \mathfrak{a}M'$.

Hinweis. Benutzen Sie die Aussage von (a) für den Modul $N = A/\mathfrak{a}$.

Aufgabe 3. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A. Die *Vervollständigung* von A bezüglich $\mathfrak{a}$ ist definiert als der projektive Limes von Faktorringen
$$\hat{A} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} A/\mathfrak{a}^n.$$

Zeigen Sie:

(a) (4P) Angenommen, $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$ ist ein Maximalideal in A und $\hat{A}$ die Vervollständigung von A bezüglich $\mathfrak{m}$. Dann ist für jedes $x \in \hat{\mathfrak{m}} := \ker(\hat{A} \twoheadrightarrow A/\mathfrak{m})$ das Element $1 - x$ eine Einheit in $\hat{A}$. Folgern Sie: $\hat{A}$ ist ein lokaler Ring mit Maximalideal $\hat{\mathfrak{m}}$. Schließen Sie daraus, dass der natürliche Homomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ kein Isomorphismus ist.

(b) (2P) Die Vervollständigung $\widehat{A[X]}$ von $A[X]$ bezüglich des Ideals (X) ist isomorph zum Potenzreihenring $A[[X]]$.

Die folgende Aufgabe ist Teil der Serie von Aufgaben über das Spektrum eines Ringes.

Aufgabe 4. *(Basisoffene Teilmengen)*
Für jedes $f \in A$ sei X_f das Komplement von $V(f)$ in $X = \operatorname{Spec} A$. Insbesondere sind die X_f offene Mengen; sie heißen *basisoffene Teilmengen* von X. Zeigen Sie:

(a) (3P) Die basisoffenen Teilmengen bilden eine Basis für die Zariski-Topologie, d. h. jede offene Teilmenge von X lässt sich als Vereinigung von Mengen der Form X_f schreiben.

(b) (3P) Für $f, g \in A$ gilt $X_f \cap X_g = X_{fg}$, und X_f ist genau dann leer (bzw. der ganze Raum X), wenn f nilpotent (bzw. eine Einheit) ist.

Zusatzaufgabe 5. *(Quadratwurzeln in $\mathbb{Z}_p$)*
Sei p eine ungerade Primzahl und a eine nicht durch p teilbare ganze Zahl. Zeigen Sie:

(a) (3P) Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist x_n eine ganze Zahl mit $x_n^2 \equiv a \bmod p^n$, so gibt es ein $k_n \in \{0, \ldots, p-1\}$, so dass $x_{n+1} = x_n + k_n p^n$ die Gleichung $x_{n+1}^2 \equiv a \bmod p^{n+1}$ erfüllt.

(b) (3P) Betten wir $\mathbb{Z}$ über den natürlichen Homomorphismus in $\mathbb{Z}_p$ ein, so ist a genau dann ein Quadrat in $\mathbb{Z}_p$, wenn $\bar{a} = a \bmod p$ ein Quadrat in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist. Folgern Sie als ein Beispiel, dass sich $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ in $\mathbb{Z}_3$ einbetten lässt.

Wer möchte, kann ebenso zeigen: Eine ungerade Zahl a ist genau dann ein Quadrat in $\mathbb{Z}_2$, wenn $a \equiv 1 \bmod 8$.