Übungen zur Algebra II

Sommersemester 2019

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. P. Sechin

Blatt 3
Abgabetermin: Donnerstag, 09.05.2019, 9:15 Uhr

Im Folgenden sei A stets ein kommutativer Ring mit 1.

Aufgabe 1. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Der Polynomring $A[x]$ ist eine treuflache A-Algebra.

(b) $\mathbb{Q}$ ist eine flache, aber keine treuflache $\mathbb{Z}$-Algebra.

Aufgabe 2. Es sei $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, M ein A-Modul und N ein B-Modul. Durch die Regel $an := f(a)n$ fassen wir N auch als A-Modul auf. Es wird dann $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ zum B-Modul durch $(b\varphi)(m) := b\varphi(m)$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine natürliche B-Modulstruktur auf $M \otimes_A N$, die auf einfachen Tensoren durch $b(m \otimes_A n) = m \otimes_A bn$ gegeben ist.

(b) Sei P ein weiterer B-Modul. Dann ist (in Verallgemeinerung von Lemma 3.8) durch $\varphi \mapsto (m \mapsto (n \mapsto \varphi(m \otimes_A n)))$ ein Isomorphismus von B-Moduln

$$\mathrm{Hom}_B(M \otimes_A N, P) \cong \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_B(N, P))$$

gegeben. Insbesondere ($N = B$) erhalten wir die Regel $\mathrm{Hom}_B(M \otimes_A B, P) \cong \mathrm{Hom}_A(M, P)$.

Aufgabe 3. Es seien $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, M ein A-Modul und N, P B-Moduln. Zeigen Sie die Existenz eines Isomorphismus von B-Moduln

$$(M \otimes_A N) \otimes_B P \cong M \otimes_A (N \otimes_B P),$$

wobei $M \otimes_A N$ mit der B-Modulstruktur aus Aufgabe 2(a) versehen ist. Insbesondere ($N = B$) erhalten wir die Kürzungsregel $(M \otimes_A B) \otimes_B P \cong M \otimes_A P$.

Hinweis: Nutzen Sie das Ergebnis von Aufgabe 2 um für einen beliebigen B-Modul X einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_B((M \otimes_A N) \otimes_B P, X) \cong \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A (N \otimes_B P), X)$$

zu zeigen. Dann setzen Sie $X = M \otimes_A (N \otimes_B P)$ bzw. $X = (M \otimes_A N) \otimes_B P$ und betrachten jeweils das Bild von id_X auf der anderen Seite. Machen Sie sich klar, dass die so definierten Homomorphismen $(M \otimes_A N) \otimes_B P \leftrightarrow M \otimes_A (N \otimes_B P)$ auf einfachen Tensoren gerade durch $(m \otimes_A n) \otimes_B p \leftrightarrow m \otimes_A (n \otimes_B p)$ gegeben sind, also zueinander invers sind.

Die folgende Aufgabe ist Teil der Serie von Aufgaben über das Spektrum eines Ringes.

Aufgabe 4. Für eine Teilmenge $Y \subset X = \mathrm{Spec}\, A$ setzen wir $I(Y) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p}$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ gilt $I(V(\mathfrak{a})) = r(\mathfrak{a})$.

(b) Für $Y \subset X$ ist $V(I(Y))$ der Abschluss $\overline{Y}$ von Y in X, d.h. die kleinste abgeschlossene Menge in X, die Y enthält.

(c) Die Abbildungen $\mathfrak{a} \mapsto V(\mathfrak{a})$ und $Y \mapsto I(Y)$ liefern uns inklusionsumkehrende Bijektionen

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Radikalideale in } A, \\ \text{d. h. Ideale } \mathfrak{a} \subset A \text{ mit } \mathfrak{a} = r(\mathfrak{a}) \end{matrix} \right\} \underset{I}{\overset{V}{\rightleftarrows}} \left\{ \begin{matrix} \text{abgeschlossene Teilmengen} \\ Y \subset X = \mathrm{Spec}\, A \end{matrix} \right\}.$$