Übungen zur Algebra II

Sommersemester 2019

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. P. Sechin

Blatt 2
Abgabetermin: Donnerstag, 02.05.2019, 9.15 Uhr

Alle Ringe sind stillschweigend als kommutativ und unitär vorausgesetzt.

Aufgabe 1. *(Erweiterung und Kontraktion)*
Es seien $A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \subset A$, $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \subset B$ Ideale. Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

(a) $(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^e = \mathfrak{a}_1^e + \mathfrak{a}_2^e$, $\quad (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^c \supset \mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c$.

(b) $(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)^e \subset \mathfrak{a}_1^e \cap \mathfrak{a}_2^e$, $\quad (\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^c = \mathfrak{b}_1^c \cap \mathfrak{b}_2^c$.

Zeigen Sie durch Angabe von Gegenbeispielen, dass im Allgemeinen

$$(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^c \neq \mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c, \qquad (\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)^e \neq \mathfrak{a}_1^e \cap \mathfrak{a}_2^e.$$

Aufgabe 2. *(Jacobson-Radikal)*
Das *Jacobson-Radikal* $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(A)$ eines Ringes A ist der Durchschnitt aller Maximalideale von A. Zeigen Sie:

(a) $\mathfrak{R}(A) = \{x \in A \mid 1 - xy \in A^\times \quad \forall\, y \in A\}$.

(b) Auch für nicht-lokale Ringe A gilt folgende Version von *Nakayamas Lemma*:
Sei M ein endlich erzeugter A-Modul und $\mathfrak{a}$ ein Ideal mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{R}(A)$. Dann folgt aus $\mathfrak{a}M = M$, dass $M = 0$.

Aufgabe 3. *(Reellwertige Funktionen)*
Zeigen Sie folgende Aussagen für den Ring $C(\mathbb{R})$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$:

(a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $\mathfrak{M}_x = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid f(x) = 0\}$ ein Maximalideal. Ist jedes Maximalideal von dieser Form?

(b) Betrachten Sie das Ideal $\mathfrak{N} = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \exists \epsilon > 0\colon f(x) = 0 \text{ falls } |x| < \epsilon\}$. Dann ist der Ring $A = C(\mathbb{R})/\mathfrak{N}$ ein lokaler Ring und das Maximalideal $\mathfrak{m}$ von A ist das Bild von $\mathfrak{M}_0$ in A.

(c) Es gilt $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$. Benutzen Sie das Nakayama-Lemma, um zu zeigen, dass der A-Modul $\mathfrak{m}$ nicht endlich erzeugt sein kann.

Die folgende Aufgabe ist Teil einer Serie von Aufgaben über das Spektrum eines Ringes.

Aufgabe 4. *(Zariski-Topologie)*
Sei A ein Ring und X die Menge aller Primideale von A. Für jede Teilmenge E von A bezeichne $V(E)$ die Menge aller Primideale von A, die E enthalten. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist $\mathfrak{a}$ das von E erzeugte Ideal, so gilt $V(E) = V(\mathfrak{a}) = V(r(\mathfrak{a}))$.

(b) Es gilt $V(0) = X$ und $V(1) = \varnothing$.

(c) Falls $(E_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie von Teilmengen bezeichnet, gilt

$$V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \bigcap_{i\in I} V(E_i).$$

(d) Für Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ von A gilt $V(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

Diese Ergebnisse zeigen, dass die Mengen $V(E)$ die Axiome für abgeschlossene Mengen eines topologischen Raumes erfüllen. Die entsprechende Topologie heißt *Zariski-Topologie*. Der topologische Raum X heißt *Spektrum* von A und wird mit $\operatorname{Spec} A$ bezeichnet.