

Übungen zur Algebra II

Sommersemester 2019

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. P. Sechin

Blatt 1
Abgabetermin: Donnerstag, 25.04.2019, 9:15 Uhr

Im Folgenden sei A stets ein kommutativer Ring mit 1.

Aufgabe 1. (*Einheiten und nilpotente Elemente*)

Sei $x \in A$ nilpotent. Zeigen Sie, dass $1 + x$ eine Einheit in A ist. Folgern Sie daraus, dass die Summe eines nilpotenten Elementes und einer Einheit wiederum eine Einheit ist. (6P)

Aufgabe 2. (*Einheiten in Polynomringen*)

Sei $A[T]$ der Polynomring über A in der Unbestimmten T und $f = a_0 + a_1T + \cdots + a_nT^n \in A[T]$ ein Polynom. Zeigen Sie, dass f genau dann eine Einheit in $A[T]$ ist, wenn a_0 eine Einheit in A ist und die Koeffizienten a_1, \dots, a_n nilpotent sind. (jede Richtung 3P)

Hinweis: Betrachten Sie für eine Richtung zunächst den Fall, dass A nullteilerfrei ist. Der allgemeine Fall lässt sich auf diesen Spezialfall reduzieren, indem man das Bild von f in $A/\mathfrak{p}[T]$ für alle Primideale \mathfrak{p} von A betrachtet. Für die andere Richtung verwende man Aufgabe 1.

FROHE OSTERN!

