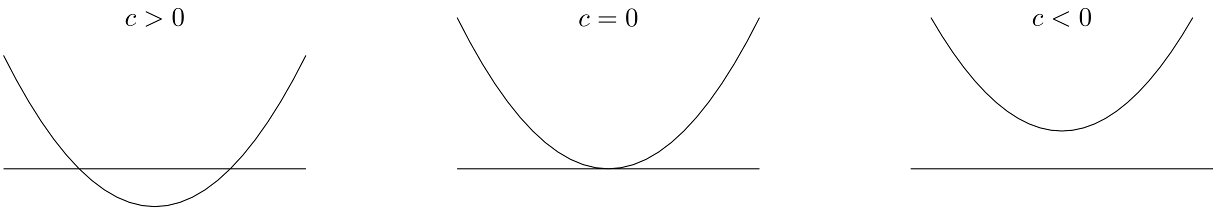
Schnitttheorie algebraischer Varietäten

Seminar im Sommersemester 2017
Prof. Dr. A. Schmidt, Dr. K. Hübner

Betrachten wir in der Ebene $\mathbb{R}^2$ die Schnittpunkte der Parabel $y = x^2 - c$ ($c \in \mathbb{R}$) mit der x-Achse:



Bekannterweise gibt es zwei Schnittpunkte, wenn $c > 0$, einen Schnittpunkt, wenn $c = 0$ und keinen Schnittpunkt, wenn $c < 0$. Den Fall $c = 0$ können wir umdeuten, indem wir die Vielfachheit des Schnittpunktes mit einbeziehen: Da $y = x^2$ im Punkt Null eine doppelte Nullstelle hat, zählt der Schnittpunkt doppelt und auch in diesem Fall ist die Anzahl der Schnittpunkte zwei. Um den Fall $c < 0$ zu verstehen, übersetzen wir die Fragestellung in die Sprache der Schemata. Wir suchen in der reellen affinen Ebene $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ die Anzahl der Schnittpunkte von $V(y)$ mit $V(y - x^2 + c)$. Schematheoretisch ist der Durchschnitt gegeben durch $V(y, y - x^2 + c) \cong \mathit{Spec}\,\mathbb{R}[x]/(x^2 - c)$. Ist $c < 0$, ist das Polynom $x^2 - c$ irreduzibel über $\mathbb{R}$ und $V(y, y - x^2 + c)$ ist isomorph zu $\mathit{Spec}\,\mathbb{C}$. Es gibt folglich einen Schnittpunkt mit Restklassenkörper $\mathbb{C}$, den wir in unserer ersten Überlegung nicht gesehen haben, weil wir nur $\mathbb{R}$-rationale Punkte untersucht haben. Berücksichtigen wir den Grad der Restklassenkörpererweiterung des Schnittpunktes, zählen wir auch im Fall $c < 0$ zwei Schnittpunkte.

Betrachten wir statt $y = x^2 - c$ eine beliebige quadratische Gleichung, kann es passieren, dass Schnittpunkte im Unendlichen liegen, wie zum Beispiel für $xy - 1$. Im Allgemeinen sollten wir deswegen in der projektiven Ebene und nicht in der affinen Ebene arbeiten. Tatsächlich lassen sich die obigen Überlegungen auf die Anzahl der Schnittpunkte einer Kurve vom Grad r mit einer Kurve vom Grad s in der projektiven Ebene verallgemeinern: Unter der Voraussetzung, dass die beiden Kurven keine gemeinsamen irreduziblen Komponenten haben sagt der Satz von Bézout, dass diese Anzahl unter Berücksichtigung der Vielfachheiten und Restklassenkörpergrade gleich rs ist.

Dieser Satz bildet unseren Einstieg in die Schnitttheorie. In den folgenden Vorträgen werden wir Schnitte von abgeschlossenen Unterschemata in einer nichtsingulären Varietät X untersuchen. Hierbei sollte der Schnitt eines Kodimension-r-Unterschemas mit einem Kodimension-s-Unterschema ein Unterschema der Kodimension $r + s$ liefern. Allerdings stellt sich das Problem, dass der schematheoretische Schnitt in entarteten Fällen nicht Kodimension $r + s$ hat. Die entscheidende Beobachtung ist nun, dass das Schnittprodukt mit rationaler Äquivalenz (Verallgemeinerung der linearen Äquivalenz von Divisoren) vertauscht. Wenn wir das Schnittprodukt modulo rationaler Äquivalenz betrachten, können wir uns passende Vertreter wählen, deren Schnitt nicht entartet ist. Das Ziel des Seminars ist die Konstruktion dieses Schnittproduktes.

Vorkenntnisse: Algebraische Geometrie 1

Zeit und Ort: donnerstags, 14:00-15:30, SR 4

Vorbesprechung Dienstag, 7.2.2017, 14:00 Uhr s.t., SR 7

Kontakt: Katharina Hübner, khuebner@mathi.uni-heidelberg.de

Vorträge

Vortrag 1: Schnitttheorie auf Flächen

Definiere das Schnittprodukt zweier Divisoren auf einer Fläche. Diskutiere den Selbstschnitt und beweise den Satz von Bézout. [Ha77, Chap. V,§1] bis einschließlich Example 1.4.4.

Vortrag 2: Chow-Gruppen, rationale Äquivalenz und direkte Bilder

Definiere algebraische Zykel, rationale Äquivalenz und Chowgruppen. Zeige die Existenz des eigentlichen direkten Bildes und gebe eine alternative Beschreibung der rationalen Äquivalenz. [Ful98, §1.3–1.6]

Vortrag 3: Rückzug, Lokalisierung, affine Bündel und äußere Produkte

Zeige die Existenz des flachen Rückzugs. Diskutiere die Lokalisierungsfolge, affine Bündel und äußere Produkte. [Ful98, §1.7–1.10].

Vortrag 4: Das Schnittprodukt für Pseudo-Divisoren

Die Definition des Schnittprodukts zweier Zykel wird letztendlich auf den Fall zurückgeführt, dass einer der beiden Zykel ein Divisor ist. Dieser Fall soll in diesem Vortrag behandelt werden. Definiere Pseudo-Divisoren D und den Schnitt $D.V$ mit einer Varietät V. [Ful98, §2.1-2.3]

Vortrag 5: Kommutativität des Schnittproduktes

Zeige die Kommutativität des Schnittprodukts von Divisoren. [Ful98, §2.4].

Vortrag 6: Chern-Klassen

Definiere die Chern-Klasse eines Geradenbündels. Zunächst handelt es sich dabei nur um eine Umformulierung des Schnitts mit Divisoren. [Ful98, §2.5–2.6]

Vortrag 7: Vektorbündel

Der nächste Schritt ist die Verallgemeinerung von Divisoren (also Geradenbündeln) auf Vektorbündel beliebiger Dimension. Definiere die Segre-Klasse eines Vektorbündels und zeige elementare Eigenschaften und führe die Chernklassen mit ihren elementaren Eigenschaften ein. [Ful98, §3.1–3.2]

Vortrag 8: Chowgruppen und Gysin-Abbildung

Berechne die Chowgruppen von Vektorbündeln und definiere die Gysin-Abbildung. [Ful98, §3.3]

Vortrag 9: Deformation zum Normalenkegel

Die Deformation zum Normalenkegel ist die zentrale geometrische Technik der Schnitttheorie. Definiere reguläre Einbettung und den Normalenkegel. Zeige, dass der Normalenkegel einer reguläre Einbettung ein Vektorbündel ist. Definiere die Deformation zum Normalenkegel. [Ful98, Chap. 5]

Vortrag 10: Das Schnittprodukt

Definiere das Schnittprodukt und zeige seine Verträglichkeit mit direktem Bild und Rückzug. [Ful98, §6.1–6.2].

Vortrag 11: Der Chowring

Wir zeigen, dass die Chow-Gruppen einen kommutativen graduierten Ring bilden. [Ful98, §6.3–6.4]

Vortrag 12: Funktorialität

Zeige, dass die Gysin-Abbildung mit Verkettung verträglich ist. [Ful98, §6.5]

References

[EH13] David Eisenbud and Joe Harris, *3264 & All That — Intersection Theory in Algebraic Geometry*, `http://scholar.harvard.edu/files/joeharris/files/000-final-3264.pdf`, 2013.

[Ful98] William Fulton, *Intersection Theory*, volume 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge*, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[FL85] William Fulton and Serge Lang, *Riemann-Roch algebra*, volume 277 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Springer-Verlag, New York, 1985

[Ha77] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, volume 52 of *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[Tra07] Günther Trautmann, *Introduction to Intersection Theory*, Preliminary version, `http://www.mathematik.uni-kl.de/~trm/download/IntersTh.ps`, 2007.