p-adische Zahlen

Proseminar Zahlentheorie
im Wintersemester 2017/18

Inhalt

Die p-adischen Zahlen sind sicher weniger bekannt als die rationalen, reellen oder komplexen Zahlen. Sie spielen aber eine wichtige Rolle in der Zahlentheorie und auch anderen Teilgebieten der Mathematik. Dieses Proseminar ist eine elementare Einführung in die Theorie der p-adischen Zahlen. Wir lernen zunächst den Körper der p-adischen Zahlen als Vervollständigung der rationalen Zahlen bezüglich des p-adischen Absolutbetrags kennen und studieren dann seine grundlegenden topologischen Eigenschaften. Die fundamentale Bedeutung der p-adischen Zahlen offenbart sich im henselschen Lemma, welches uns ein einfaches und effektives Kriterium zur Lösbarkeit von diophantischen Gleichung in die Hand gibt. Schließlich wenden wir uns der Approximation stetiger Funktionen und dem Studium der p-adischen Exponentialfunktion und dem p-adischen Logarithmus zu.

Wir gehen hauptsächlich nach dem Buch [Kat07] vor. In [Gou97] wird eine ähnliche Materialauswahl vorgestellt, [Rob00] ist eine Darstellung des Themas auf fortgeschritteneren Niveau. Die Bücher [Leu96] und [Sch07] enthalten jeweils eine kurze und kompakte Einführung in die p-adischen Zahlen. Hier sollte man weiterlesen, wenn man sich für algebraische Zahlentheorie interessiert. Das Buch [Jae80] ist eine gute ergänzende Lektüre zum besseren Verständnis topologischer Fragen.

Vorkenntnisse

Analysis I, Lineare Algebra I

Zeit und Ort

Donnerstag, 14 – 16 Uhr, SR 3

Kontakt

Dr. Katharina Hübner, `khuebner@mathi.uni-heidelberg.de`

Vorbesprechung

Dienstag, den 25.07.2017 um 13:00 in SR 3

Vorträge

Vortrag 1: Bewertete Körper
(19.10.2017)

Führe die Definition eines bewerteten Körpers ein und untersuche die elementaren Eigenschaften von archimedischen und nicht-archimedischen Bewertungen [Kat07, §1.2]. Siehe [Gou97, §2.1–2] für eine alternative Darstellung.

Vortrag 2: Vervollständigung eines bewerteten Körpers
(26.10.2017)

Definiere vollständige metrische Räume und zeige, dass sich jeder bewertete Körper vervollständigen läßt [Kat07, §1.1,1.3]. Ergänzendes Material zu metrischen Räumen findet sich in [Jae80, §I.2].

Vortrag 3: Der Körper $\mathbb{Q}_p$ der p-adischen Zahlen
(02.11.2017)

Definiere den Körper $\mathbb{Q}_p$ der p-adischen Zahlen und untersuche seine elementaren Eigenschaften [Kat07, §1.4]. Siehe [Gou97, §3.2] für eine alternative Darstellung.

Vortrag 4: Arithmetik in $\mathbb{Q}_p$
(09.11.2017)

Erkläre, wie man in $\mathbb{Q}_p$ addiert, multipliziert und dividiert. Untersuche außerdem, wann die kanonische p-Entwicklung eine rationale Zahl darstellt [Kat07, §1.5–6].

Vortrag 5: Das henselsche Lemma und Kongruenzen
(16.11.2017)

Beweise das henselsche Lemma und untersuche quadratische Reste modulo p [Kat07, §1.7]. Siehe [Sch07, §9.5] für eine etwas allgemeinere Version des henselschen Lemmas.

Vortrag 6: Der Ring $\mathbb{Z}_p$ der ganzen p-adischen Zahlen
(23.11.2017)

Untersuche die algebraischen Eigenschaften von $\mathbb{Z}_p$ [Kat07, §1.8]. Erkläre auch die Beschreibung von $\mathbb{Z}_p$ als projektiven Limes [Sch07, Satz 9.3.4–5]. Weitere Erläuterungen zu projektiven Limiten finden sich in [Rob00, 1.4].

Vortrag 7: Das Theorem von Ostrowski
(30.11.2017)

Nach dem Theorem von Ostrowski ist jede Bewertung auf den rationalen Zahlen äquivalent zum gewöhnlichen archimedischen Betrag oder zu einer der p-adischen Bewertungen. Beweise außerdem die Produktformel und untersuche Quadrate in $\mathbb{Q}$ [Kat07, §1.9]. Eine ähnliche Materialauswahl wird auch in [Leu96, §9.5] abgehandelt.

Vortrag 8: Topologische Eigenschaften
(07.12.2017)

Führe topologische Räume ein und untersuche die topologischen Eigenschaften von $\mathbb{Q}_p$ [Kat07, §2.1]. Die Behandlung allgemeiner topologischer Räume kann durch Material aus [Jae80, Kap. I] ergänzt werden.

Vortrag 9: Folgen und Reihen
(14.12.2017)

Untersuche Konvergenzeigenschaften von Folgen und Reihen in $\mathbb{Q}_p$ [Kat07, §3.1]. Siehe [Gou97, §4.1–2] für eine alternative Darstellung des Themas.

Vortrag 10: Potenzreihen
(21.12.2017)

Untersuche die Eigenschaften von p-adischen Potenzreihen [Kat07, §3.2]. Siehe [Gou97, §4.3–4] für eine alternative Darstellung des Themas.

Vortrag 11: p-adische Exponential- und Logarithmusfunktion
(11.01.2017)

Führe die p-adische Exponential- und Logarithmusfunktion ein und untersuche ihre Eigenschaften [Kat07, §3.3–4]. Siehe [Gou97, §4.5] und [Rob00, §5.4] für eine alternative Darstellung und Ergänzungen.

Vortrag 12: Stetige und uniform stetige Funktionen
(18.01.2017)

Untersuche die Eigenschaften stetiger und uniform stetiger p-adische Funktionen [Kat07, §4.1–2].

Vortrag 13: Interpolationsreihen
(25.01.2017)

Untersuche die Theorie von p-adischen Interpolationsreihen und beweise das Theorem von Mahler. Wende die Theorie auf die Funktion a^x an [Kat07, §4.6].

References

[Gou97] F. Q. Gouvêa, *p-adic Numbers*, Springer 1997.

[Jae80] K. Jänich, *Topologie*, Springer 1980.

[Kat07] S. Katok, *p-adic Analysis Compared with Real*, AMS 2007.

[Leu96] A. Leutbecher, *Zahlentheorie*, Springer 1996

[Rob00] A. M. Robert, *A Course in p-adic Analysis*, Springer 2000.

[Sch07] A. Schmidt, *Einführung in die algebraische Zahlentheorie*, Springer 2007.