

# Einführung in die Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Proseminar im Sommersemester 2012  
Prof. Dr. A. Schmidt mit Dr. M. Witte und Dr. A. Holschbach

## Inhalt

Die Theorie der linearen Darstellungen endlicher Gruppen spielt nicht nur in vielen Gebieten innerhalb der Mathematik eine wichtige Rolle, sondern findet auch Anwendung in der Physik und der Chemie. Eine lineare Darstellung einer Gruppe  $G$  ist dabei nichts anderes als ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum  $V$  zusammen mit einem Gruppenhomomorphismus von  $G$  in die Gruppe der linearen Automorphismen von  $V$  durch den  $G$  auf  $V$  operiert. Durch das Studium solcher Darstellungen kann man tiefe Einsichten sowohl über die Gruppe  $G$  als auch über die zugrundeliegenden Vektorräume gewinnen.

## Teilnehmerkreis und Vorkenntnisse

Das Proseminar richtet sich vornehmlich an Studenten im Studiengang *Bachelor Mathematik* im 2. und 4. Semester. Vorkenntnisse im Umfang der Vorlesung *Lineare Algebra I* werden vorausgesetzt.

## Zeit und Ort

Mittwoch, 14 – 16 Uhr, INF 294, HS -101 (Betreuer: Prof. Schmidt/Dr. Holschbach)

## Kontakt

Prof. Alexander Schmidt  
INF 288, Raum 223  
Tel. +49-6221-54-5616  
[schmidt@mathi.uni-heidelberg.de](mailto:schmidt@mathi.uni-heidelberg.de)

Dr. Armin Holschbach  
INF 288, Raum 107  
Tel. +49-6221-54-4975  
[holschbach@mathi.uni-heidelberg.de](mailto:holschbach@mathi.uni-heidelberg.de)

## Zum Ablauf

Zu den unten aufgeführten Terminen halten die Studenten Vorträge zu den von ihnen gewählten Themen. Die Mindestanforderung an den Vortrag ist, dass der Vortragende selbst den Stoff, über den er vorträgt, durchdrungen hat. Ferner soll der Vortragende in der Lage sein, den Stoff den anderen Seminarteilnehmern verständlich zu vermitteln.

Die Vorträge sollen an der Tafel gehalten werden. Ausnahmen davon sind nach Rücksprache mit dem Betreuer möglich. Für frei gehaltene Vorträge gibt es Pluspunkte. Eine schriftliche Ausarbeitung wird nicht verlangt; jedoch kann durch sie ein mangelhafter Vortrag ausgeglichen werden.

Die Dauer der Vorträge soll 90 Minuten nicht überschreiten. Wenn die Vortragszeit nicht auszureichen scheint, muss eine sinnvolle Auswahl des Stoffes getroffen werden.

Es wird erwartet, dass die Vortragenden sich spätestens eine Woche vor ihrem Vortrag mit dem jeweiligen Betreuer des Seminars in Verbindung setzen, um ihr Vortragskonzept mit ihm durchzusprechen. Der Betreuer steht darüber hinaus auch für Rückfragen und zur Klärung von Verständnisschwierigkeiten bei der Vortragsausarbeitung zur Verfügung.

Eine ausführliche Anleitung, wie man einen guten Seminarvortrag hält, findet man hier:

<http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/lehn/le/seminarvortrag>

## Vorträge

### **Vortrag 1: Allgemeines über lineare Darstellungen**

*Miriam Dreisbach* (18.04.12)

Die grundlegenden Definitionen sollen vorgestellt werden und erste Beispiele diskutiert werden. Dann soll der Begriff der Teildarstellung und der irreduziblen Darstellung erläutert werden [Se77, §1.1–1.4]. Der Satz, dass jede Darstellung Summe von irreduziblen Darstellungen ist, hat zentrale Bedeutung.

### **Vortrag 2: Tensorprodukt und Charaktere**

*Niklas Dreisbach* (25.04.12)

Das Tensorprodukt zweier Darstellungen und der Charakter einer Darstellung sollen eingeführt werden [Se77, §1.5–2.1]. Wenn Zeit bleibt, soll ein Teil der Aufgaben im Abschnitt 2.1 vorgeführt werden.

### **Vortrag 3: Schurs Lemma und Orthogonalitätsrelationen**

*Lucas Fuchs* (02.05.12)

Zunächst soll Schurs Lemma bewiesen werden, dann Orthogonalitätsrelationen für Charaktere untersucht werden [Se77, §2.2–2.3]. Die Zeit sollte auch noch für die Diskussion der Übungsaufgaben im Abschnitt 2.3 reichen.

### **Vortrag 4: Kanonische Zerlegung**

*Larissa Schwitzgebel* (09.05.12)

Zunächst wird die Zerlegung der regulären Darstellung untersucht, dann die Anzahl der irreduziblen Darstellungen bestimmt und schließlich die kanonische Zerlegung einer beliebigen Darstellung eingeführt [Se77, §2.4–2.6].

### **Vortrag 5: Explizite Zerlegung, abelsche Untergruppen, Produkte von Gruppen**

*Linus Seelinger* (16.05.12)

Als Nachtrag zum vorangehenden Vortrag soll eine explite Konstruktion einer Zerlegung vorgestellt werden. Dann werden Darstellungen abelscher Gruppen und von Produkten von Gruppen untersucht [Se77, §2.7–3.2].

### **Vortrag 6: Induzierte Darstellungen**

*Yichuan Shen* (23.05.12)

Der Begriff der induzierten Darstellung wird eingeführt und die Existenz und Eindeutigkeit wird bewiesen. Danach wird noch der Charakter einer induzierten Darstellung untersucht [Se77, §3.3].

### **Vortrag 7: Beispiele**

*Carolin Lange* (30.05.12)

Die Charaktertafeln der zyklischen und dihedralen Gruppen sowie der alternierenden Gruppe  $A_4$  und der symmetrischen Gruppe  $S_4$  werden untersucht. [Se77, §5.1, 5.3, 5.7, 5.8].

### **Vortrag 8: Gruppenringe**

*Markus Schubert* (06.06.12)

In diesem Vortrag soll die Gruppenalgebra  $\mathbb{C}[G]$  diskutiert werden [Se77, §6.1–6.3]. Es soll kurz erklärt werden, was eine halbeinfache Algebra ist. Das Korollar in Abschnitt 6.1 zitieren wir ohne Beweis. Dann soll die Zerlegung und das Zentrum von  $\mathbb{C}[G]$  beschrieben werden.

### **Vortrag 9: Ganze Elemente und Teilbarkeitsbedingungen**

*Thomas Lang* (13.06.12)

Ganze Elemente und Teilbarkeitsrelationen in Gruppenringen werden diskutiert [Se77, §6.4–6.5].

### **Vortrag 10: Frobenius-Reziprozität**

*Marilena Müller* (20.06.12)

Induktion von Darstellungen und der zugehörige Charakter soll untersucht werden [Se77, §7.1–7.2].

### **Vortrag 11: Mackey-Kriterium**

*Stefanie Döbler* (27.06.12)

Thema des Vortrags sind die Einschränkungen auf Untergruppen und der Beweis des Irreduzibilitätskriteriums von Mackey [Se77, §7.3–7.4]. Die restliche Zeit soll den Aufgaben von §7.2 gewidmet sein.

### **Vortrag 12: Beispiele von induzierten Darstellungen**

*Philip Bell* (04.07.12)

In diesem Vortrag werden einige Beispiele induzierter Darstellungen diskutiert, insbesondere solche, die von normalen Untergruppen und halbeinfachen Produkten kommen. Schließlich sollen noch Darstellungen von überauflösbaren Gruppen diskutiert werden [Se77, §8.1–8.5]. Die Abschnitte §8.3, 8.4 werden auch in der Vorlesung Algebra I behandelt. Deshalb kann man sich hier kurz fassen.

### **Vortrag 13: Artins Theorem**

*Tim Adler* (11.07.12)

Der Ring  $R(G)$  der Darstellungen wird eingeführt und Artins Theorem bewiesen. Es reicht, einen der Beweise für das Theorem vorzuführen. [Se77, §9.1–9.4].

### **Vortrag 14: Das Theorem von Brauer**

*Martin Wiegand* (18.07.12)

Der Begriff der  $p$ -elementaren Untegruppen wird eingeführt und das Theorem von Brauer bewiesen. [Se77, §10.1–10.5].

### **Vortrag 15: Anwendungen des Theorem von Brauer**

*Bahlbi Teweldemedhin* (25.07.12)

Aus dem Theorem von Brauer kann man mehrere interessante Korollare ziehen. [Se77, §11.1–11.3].

## **Literatur**

[FH91] W. Fulton & J. Harris, *Representation theory. A first course*, Springer 1991.

[Se77] J.-P. Serre, *Linear representations of finite groups*, Springer 1977.