Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel
Christian Rüschoff

Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Aufgabenblatt 9 11. Dezember 2014

Aufgabe 1. *(6 Punkte)*
Es sei L/K eine endliche Körpererweiterung.

a) Es sei $L = K(a)$ und $f \in K[X]$ das Minimalpolynom von a. Zeigen Sie, dass die Menge der Zwischenkörper von L/K mit einer Teilmenge der Teiler von f in $L[X]$ identifiziert werden kann.

b) Zeigen Sie für $|K| = \infty$, dass jede endliche Körpererweiterung $K(a,b)/K$ mit nur endlich vielen Zwischenkörpern $K \subset E \subset K(a,b)$ einfach ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Zwischenkörper $K(a + kb)$ mit $k \in K$.

c) Zeigen Sie, dass L/K genau dann einfach ist, wenn es nur endlich viele Zwischenkörper $K \subset E \subset L$ gibt.

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $|K| < \infty$ und $|K| = \infty$. Verwenden Sie a) und b) für den Fall $|K| = \infty$.

Aufgabe 2. *(6 Punkte)*
Es sei $K = \mathbb{F}_q$ ein Körper mit $q = p^r$ Elementen, $p \in \mathbb{N}$ prim und $r \geq 1$. Zeigen Sie:

a) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Jedes Element aus $\mathbb{F}_q$ ist genau dann eine n-te Potenz, wenn $\mathrm{ggT}(n, q-1) = 1$.
In diesem Fall existiert zu jedem $a \in \mathbb{F}_q$ genau ein $b \in \mathbb{F}_q$ mit $a = b^n$.

b) Ist 2 die Charakteristik von $\mathbb{F}_q$, so ist jedes Element $x \in \mathbb{F}_q$ ein Quadrat, d.h. es existiert ein $y \in \mathbb{F}_q$ mit $x = y^2$.

c) Jedes Element $c \in \mathbb{F}_q$ ist darstellbar als Summe von zwei Quadraten.

Hinweis: Wie viele Elemente haben die Mengen $\{x^2;\ x \in \mathbb{F}_q\}$ und $\{c - y^2;\ y \in \mathbb{F}_q\}$?

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Es sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und L/K eine Körpererweiterung. Es seien $a, b \in L$ mit $a^p, b^p \in K$ und $[K(a,b) : K] = p^2$. Zeigen Sie:

a) Die Identität ist der einzige K-Automorphismus auf $K(a,b)$.

b) Die Körpererweiterung $K(a,b)/K$ ist nicht einfach.