Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel
Christian Rüschoff

Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Aufgabenblatt 8 4. Dezember 2014

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Es sei L/K eine endliche Körpererweiterung und $f \in K[X]$ ein nicht-konstantes Polynom. Zeigen Sie:

a) Ist $a \in L$ eine Nullstelle von f mit $f'(a) \neq 0$, dann ist a separabel über K.

b) Falls $\operatorname{char} K = 0$ und $f = c(X - a_1)^{k_1} \cdots (X - a_n)^{k_n}$ mit $k_i \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedenen $a_i \in L$, dann gilt $(X - a_1) \cdots (X - a_n) \in K[X]$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

a) Es sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad ≥ 2 mit $\mathrm{ggT}(f, f') \neq 1$. Zeigen Sie, dass es eine Körpererweiterung L/K gibt, in der f eine mehrfache Nullstelle besitzt.

b) Es sei K ein Körper der Charakteristik 2, und $f_1 = X^2 - a_1, f_2 = X^2 - X - a_2 \in K[X]$ irreduzibel. Es sei L_i ein Zerfällungskörper von f_i, für $i = 1, 2$. Kann es einen K-Isomorphismus von L_1 nach L_2 geben?

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Es sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Zeigen Sie:

a) Es sei L/K eine Körpererweiterung. Ist $a \in L$ algebraisch über K, so gibt es eine ganze Zahl $e \geq 0$, so dass a^{p^e} separabel über K ist.

b) Es sei $a \in K$ ein Element, das keine p-te Potenz eines weiteren Elements in K ist. Dann ist $f = X^{p^e} - a \in K[X]$ irreduzibel, für jede ganze Zahl $e \geq 0$.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Es sei L/K eine Körpererweiterung und $a \in L$. Weiterhin sei $f \in K[X]$ ein normiertes, irreduzibles Polynom vom Grad ≥ 1 mit $f(a) = 0$ und $f(a + 1) = 0$. Zeigen Sie:

a) Der Körper K hat positive Charakteristik $p := \operatorname{char} K$.

Nun gelte außerdem $a^p - a \in K$. Zeigen Sie:

b) $f = X^p - X - a^p + a$.

c) Die Erweiterung $K(a)/K$ ist normal und separabel, und die Gruppe der K-Automorphismen auf $K(a)$ ist zyklisch.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~rueschoff/ws14algebra1`
Abgabe bis spätestens 11. Dezember 2014 vor der Vorlesung, bei den Kästen am Eingang von INF 288.