Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel
Christian Rüschoff

Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Aufgabenblatt 7 27. November 2014

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Es sei A ein kommutativer Ring und $0 \notin S \subset A$ eine multiplikative Teilmenge (d.h. $a, b \in S$ impliziert $ab \in S$). Zeigen Sie:

a) Es gibt ein Ideal $I \lhd A$, welches maximal ist bezüglich der Eigenschaft $I \cap S = \emptyset$.

   Hinweis: Verwenden Sie Zorn's Lemma.

b) Ein solches Ideal ist immer ein Primideal.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Es sei K ein Körper, $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $n > 0$, und L ein Zerfällungskörper von f über K. Zeigen Sie:

a) $[L : K]$ ist ein Teiler von $n!$.

b) Gilt $[L : K] = n!$, so ist f irreduzibel.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Es sei K ein Körper.

a) Zeigen Sie, dass eine endliche Körpererweiterung L/K mit $L = K(a_1, ..., a_n)$ genau dann normal ist, wenn L ein Zerfällungskörper von $f_1 \cdots f_n$ ist, wobei f_i das Minimalpolynom von a_i ist.

b) Es seien E/K und L/K endliche, normale Körpererweiterungen. Zeigen Sie, dass es genau dann einen K-Homorphismus (d.h. einen Körperhomomorphismus, der K identisch abbildet) $E \xrightarrow{\sigma} L$ gibt, wenn $f, g \in K[X]$ existieren mit $g|f$, so dass L Zerfällungskörper von f über K und E Zerfällungskörper von g über K ist.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Es sei $K(a)/K$ eine Körpererweiterung vom Grad $n = [K(a) : K] > 1$ und g das Minimalpolynom von a über K. Zeigen Sie:

a) Die Gleichung $x^3 = a$ besitzt genau dann eine Lösung in $K(a)$, wenn das Polynom $f = g(X^3) \in K[X]$ reduzibel ist.

b) Die Grade der irreduziblen Faktoren von f sind Vielfache von n.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~rueschoff/ws14algebra1`
Abgabe bis spätestens 4. Dezember 2014 vor der Vorlesung, bei den Kästen am Eingang von INF 288.