Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel
Christian Rüschoff

Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Aufgabenblatt 4 6. November 2014

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Beweisen Sie mit Hilfe der Isomorphiesätze folgendes Lemma:
Es seien G eine Gruppe, $H_i \leq G$ eine Untergruppe und jeweils $K_i \lhd H_i$ ein Normalteiler in H_i, für $i \in \{1, 2\}$. Dann gilt:

a) $K_1(H_1 \cap K_2) \lhd K_1(H_1 \cap H_2)$ und $K_2(K_1 \cap H_2) \lhd K_2(H_1 \cap H_2)$ sind jeweils Normalteiler.

b) $K_1(H_1 \cap H_2)/K_1(H_1 \cap K_2) \cong K_2(H_1 \cap H_2)/K_2(K_1 \cap H_2)$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Es seien $A_1, ..., A_n$ kommutative Ringe und $A = A_1 \times ... \times A_n$ ihr direktes Produkt (mit koordinatenweiser Addition und Multiplikation). Zeigen Sie:

a) Ist I ein Ideal in A, so gibt es Ideale I_i in A_i, für alle $1 \leq i \leq n$, so dass $I = I_1 \times ... \times I_n$.

b) Ist I ein Primideal in A, so gibt es ein $1 \leq j \leq n$ und ein Primideal I_j in A_j, so dass

$$I = A_1 \times ... \times A_{j-1} \times I_j \times A_{j+1} \times ... \times A_n.$$

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Ein kommutativer Ring A heißt *lokal*, wenn er genau ein maximales Ideal besitzt.
Zeigen Sie für einen kommutativen Ring:

a) A is genau dann lokal, wenn die Nichteinheiten von A ein Ideal bilden.

b) Ist A lokal und ist $I \neq A$ ein Ideal, so ist auch A/I lokal.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*

a) Es sei A ein Integritätsbereich und $g \in A[X]$. Wir definieren eine Abbildung

$$\varphi : A[X] \longrightarrow A[X], \qquad f \longmapsto f(g),$$

d.h. wir setzen in f für die Variable X das Polynom g ein. Zeigen Sie:

(i) φ ist ein Ringendomorphismus.
(ii) φ ist genau dann injektiv, wenn g nicht konstant ist.
(iii) φ ist genau dann surjektiv, wenn $g = aX + b$ gilt mit $a \in A^\times$.

b) Es sei K ein Körper. Bestimmen Sie alle Ringautomorphismen von $K[X]$, die K identisch abbilden.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~rueschoff/ws14algebra1`
Abgabe bis spätestens 13. November 2014 vor der Vorlesung, bei den Kästen am Eingang von INF 288.