Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel
Christian Rüschoff

Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Aufgabenblatt 3 30. Oktober 2014

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Es seien U, V Untergruppen einer Gruppe G. Zeigen Sie:

a) Ist $U \cup V$ eine Untergruppe von G, so folgt $U \subseteq V$ oder $V \subseteq U$.

b) Falls $U \subsetneq G$ und $V \subsetneq G$, dann ist $U \cup V \subsetneq G$.

c) Gilt eine analoge Aussage auch für drei Untergruppen von G?

d) Falls U oder V normal ist in G, dann ist $UV = \{uv;\ u \in U,\ v \in V\}$ eine Untergruppe von G.

Aufgabe 2. *(8 Punkte)*
In der linearen Algebra gilt: Ist X ein Vektorraum und sind $U, V \leq X$ zwei Untervektorräume mit $U + V = X$ und $U \cap V = 0$, dann ist $X = U \oplus V$.
Im Folgenden untersuchen wir, ob eine ähnliche Schlussfolgerung auch für Gruppen gilt.

a) Es seien H und N Gruppen und $H \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphismus in die Gruppe der Gruppenautomorphismen auf N. Man definiert eine Verknüpfung auf dem kartesischen Produkt $N \times H$ durch

$$(m, g) * (n, h) = (m \cdot \varphi(g)(n), g \cdot h), \qquad m, n \in N,\ g, h \in H,$$

wobei die Verknüpfungen die aus der jeweiligen Gruppe sind. Zeigen Sie:

(i) Diese Verknüpfung definiert eine Gruppe.
Diese Gruppe, genannt das *semidirekte Produkt* von N und H, wird mit $N \rtimes_\varphi H$ bezeichnet.
(ii) $\{1_N\} \times H$ ist eine Untergruppe von $N \rtimes_\varphi H$.
(iii) $N \times \{1_H\}$ ist ein Normalteiler von $N \rtimes_\varphi H$.

b) Es seien G und H Gruppen und $H \xrightarrow{s} G \xrightarrow{r} H$ zwei Gruppenhomomorphismen, deren Verkettung $r \circ s$ die Identität auf H ist. Es sei N der Kern von r. Zeigen Sie:

(i) $\varphi(h)(n) = s(h) \cdot n \cdot s(h)^{-1}$ definiert einen Gruppenhomomorphismus $H \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Aut}(N)$.
(ii) Die folgende Abbildung definiert einen Gruppen*isomorphisms*

$$N \rtimes_\varphi H \xrightarrow{\sim} G, \quad (n, h) \longmapsto n \cdot s(h).$$

c) Es seien G eine Gruppe und $N, H \leq G$ Untergruppen von G mit $G = N \cdot H$ und $N \cap H = 1$.
Zeigen Sie, dass der Signumshomomorphismus $G = S_3 \longrightarrow \mathbb{Z}^\times = H$ ein Gegenbeispiel dafür liefert, dass G nicht isomorph zu $N \times H$ sein muss.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie:

a) Ist G eine endliche abelsche Gruppe und u das Produkt aller Elemente aus G, so gilt:

- Wenn es genau ein Element $a \in G$ der Ordnung 2 gibt, dann ist $u = a$.
- Andernfalls is u das neutrale Element.

b) Für jede Primzahl p gilt: $\quad (p-1)! \equiv -1 \mod p$

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~rueschoff/ws14algebra1`
Abgabe bis spätestens 6. November 2014 vor der Vorlesung, bei den Kästen am Eingang von INF 288.