Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel
Christian Rüschoff

Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Aufgabenblatt 13 22. Januar 2015

Aufgabe 1.
Es sei $n \geq 2$ und K ein Körper, der eine primitive n-te Einheitswurzel ζ enthält.

a) Zeigen Sie, dass folgende Abbildung einen Monoidhomomorphismus definiert

$$\alpha : \mathbb{Z}/n \longrightarrow (K[X]/(X^n - 1), \cdot), \quad \underline{k} \longmapsto \underline{X}^k,$$

wobei $\underline{k} \in \mathbb{Z}/n$ bzw. $\underline{X}$ die Restklasse des Elements $k \in \mathbb{Z}$ bzw. $X \in K[X]$ im jeweiligen Quotienten darstellt.

b) Nach der universellen Eigenschaft des Monoidrings $K[\mathbb{Z}/n]$ definiert die kanonische Inklusion $K \hookrightarrow K[X]/(X^n - 1)$ zusammen mit α einen Ringhomomorphismus

$$K[\mathbb{Z}/n] \xrightarrow{A} K[X]/(X^n - 1).$$

Nach der universellen Eigenschaft des Polynomrings definiert die Abbildung $\beta : X \longmapsto 1 \cdot \underline{1} = (\delta_{x,\underline{1}})_{x \in \mathbb{Z}/n} \in K[\mathbb{Z}/n]$ zusammen mit der kanonischen Inklusion $K \hookrightarrow K[\mathbb{Z}/n]$ einen Ringhomomorphismus

$$K[X] \xrightarrow{B} K[\mathbb{Z}/n].$$

Zeigen Sie, dass $X^n - 1$ im Kern von B liegt und benutzen Sie die Eindeutigkeitsaussage der universellen Eigenschaften um zu zeigen, dass A und B zueinander inverse Isomorphismen $K[X]/(X^n - 1) \leftrightarrows K[\mathbb{Z}/n]$ definieren.

c) Zeigen Sie: Für jedes $1 \leq i \leq n$ gibt es einen Monoidhomomorphismus

$$\varphi_i : \mathbb{Z}/n \longrightarrow (K, \cdot), \qquad \underline{k} \longmapsto \zeta^{ik}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

d) Für jedes $1 \leq i \leq n$ definiert φ_i zusammen mit der Identität auf K nach der universellen Eigenschaft des Gruppenrings $K[\mathbb{Z}/n]$ eindeutige Ringhomomorphismen $K[\mathbb{Z}/n] \xrightarrow{\phi_i} K$. Diese induzieren wiederum einen eindeutigen Ringhomomorphismus

$$\phi : K[\mathbb{Z}/n] \longrightarrow K^n, \quad x \longmapsto (\phi_1(x), ..., \phi_n(x)).$$

Verwenden Sie b) und den chinesischen Restsatz um zu zeigen, dass ϕ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 2.
Es sei G eine endliche Gruppe.

a) Falls $\sharp G = 45$, so ist G abelsch.

b) Falls $\sharp G = 42$, so gibt es genau eine Untergruppe der Ordnung 7, welche zudem normal in G ist.

c) Zeigen Sie $V_4 \lhd S_4$.

Aufgabe 3.
Die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen über einem Körper K ist definiert als

$$T_n(K) = \{A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{GL}_n(K);\ a_{i,j} = 0,\ \text{für } i > j,\ a_{i,i} = 1\} \leq \mathrm{GL}_n(K), \qquad n \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass $T_n(K)$ auflösbar ist.

Aufgabe 4.
Für $3 \leq n \in \mathbb{N}$ ist die Diedergruppe definiert als die Untergruppe

$$D_n := \left\langle \sigma = (1, 2, ..., n), \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & (n-1) & n, \\ 1 & n & ... & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle \leq S_n.$$

Weiterhin seien $U := \langle\sigma\rangle$ bzw. $V := \langle\tau\rangle$ die von σ bzw. τ erzeugten Untergruppen in D_n. Zeigen Sie:

a) $U \lhd D_n$, $U \cap V = 1$ und $D_n = UV$.

b) Es gibt einen Homomorphismus $V \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Aut}(U)$, so dass $U \rtimes_\varphi V \cong D_n$.

c) $U \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und $V \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

d) Wie sieht der Homomorphismus $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ aus, der unter den in c) gewählten Isomorphismen φ entspricht, so dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\psi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong U \rtimes_\varphi V \cong D_n$?

Zur Definition des semidirekten Produkts sei auf Übungsblatt 3 verwiesen.