Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel
Christian Rüschoff

Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Aufgabenblatt 12 15. Januar 2015

Aufgabe 1. *(2 Punkte)*
Zeigen Sie, dass zu jeder endlichen Gruppe G eine Galois-Erweiterung L/K gibt, dessen Galois-Gruppe isomorph zu G ist.

Aufgabe 2. *(6 Punkte)*
Es sei K ein Körper, $n \geq 2$ und ζ eine n-te Einheitswurzel über K.

a) Zeigen Sie: $$\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k = \begin{cases} n, & \text{falls } \zeta = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Zeigen Sie, dass ζ genau dann eine primitive n-te Einheitswurzel ist, wenn $\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{ik} = 0$, für alle $i = 1, ..., n-1$.

c) Es sei nun $n \geq 3$ und ζ eine primitive n-te Einheitswurzel über $\mathbb{Q}$.
Zeigen Sie, dass $[\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1}) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)/2$.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Es sei $p > 2$ eine Primzahl und $r > 0$.

a) Zeigen Sie, dass die Restklasse von $1 + p$ im Ring $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ eine Einheit der Ordnung p^{r-1} ist.

b) Benutzen Sie a) und die Projektion $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times \longrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ zur Konstruktion eines Gruppenisomorphismus
$$(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^{r-1}\mathbb{Z}.$$

c) Folgern Sie, dass die Galoiserweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_{p^r})/\mathbb{Q}$ zyklisch ist.

d) Gilt eine analoge Aussage auch für $p = 2$?

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Es sei G eine endliche Gruppe.

a) Es sei $H \leq G$ eine Untergruppe und N_H ihr Normalisator in G.
Zeigen Sie für $M = \bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \subset G$:
   (i) $\sharp M \leq (G : N_H) \cdot \sharp H$.
   (ii) Falls $H \neq G$, so auch $M \neq G$.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt keine endliche Gruppe G, so dass $(G : Z_G)$ prim ist.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~rueschoff/ws14algebra1`
Abgabe bis spätestens 22. Januar 2015 vor der Vorlesung, bei den Kästen am Eingang von INF 288.