Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel
Christian Rüschoff

Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Aufgabenblatt 11 8. Januar 2015

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie die Galois-Gruppen folgender Polynome in $\mathbb{Q}[X]$.

a) $X^3 + 6X^2 + 11X + 7$,

b) $X^3 + 3X^2 - 1$,

c) $X^4 + 2X^2 - 2$.

Aufgabe 2. *(8 Punkte)*
Gegeben sei eine endliche Galois-Erweiterung L/K mit Galois-Gruppe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Die zueinander inversen Bijektionen aus dem Hauptsatz der Galois-Theorie seien wie folgt bezeichnet.

- $\phi(E) = \mathrm{Gal}(L/E)$, für einen Zwischenkörper E von L/K.
- $\psi(H) = L^H$, für eine Untergruppe $H \leq G$.

Zeigen Sie:

a) Für jede Untergruppe $H \leq G$ hat man eine Bijektion

$$\{L^H \xrightarrow{\sigma} L\ K\text{-Isomorphismus}\} \longrightarrow G|H := \{gH;\ g \in G\}.$$

b) Unter ϕ entsprechen konjugierte Zwischenkörper konjugierten Untergruppen, wobei

- zwei Zwischenkörper konjugiert heißen, wenn sie K-isomorphe Teilkörper von L sind,
- zwei Untergruppen $H_1, H_2 \leq G$ konjugiert heißen, falls $gH_1g^{-1} = H_2$ für ein $g \in G$.

c) Für jede Untergruppe $H \leq G$ gibt es ein $a \in L$ mit $H = \{\sigma \in G;\ \sigma(a) = a\}$.

d) Es sei nun L algebraisch abgeschlossen und σ ein Körperautomorphismus auf L.
Dann ist jede endliche Körpererweiterung von $L^{\sigma=1} = \{a \in L;\ \sigma(a) = a\}$ eine zyklische Galois-Erweiterung.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Es sei K ein Körper und $f \in K(X)$ eine rationale Funktion mit der Eigenschaft $f(X) = f(X^{-1})$. Zeigen Sie, dass es ein $g \in K(X)$ gibt mit $f(X) = g(X + X^{-1})$.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~rueschoff/ws14algebra1`
Abgabe bis spätestens 15. Januar 2015 vor der Vorlesung, bei den Kästen am Eingang von INF 288.