Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel
Christian Rüschoff

Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Aufgabenblatt 1 16. Oktober 2014

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*

Es sei L/K eine beliebige Körpererweiterung. Zeigen Sie:

a) Es sei $\theta \in L$. Dann gilt

$$K(\theta + c) = K(\theta), \quad \text{für jedes } c \in K, \qquad K(c\theta) = K(\theta), \quad \text{für jedes } c \in K^{\times}.$$

b) Es sei $[L : K] = p < \infty$ prim. Dann gilt $L = K(a)$, für jedes $a \in L \backslash K$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

Es sei L/K eine Körpererweiterung und $a, b \in L$ mit $a \cdot b \neq 0$. Zeigen Sie:

a) Existieren $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$, so dass $a^m, b^n \in K$, so gilt $K(a, b) = K(a \cdot b)$.

b) Geben Sie ein Gegenbeispiel für a) an, falls die Voraussetzung $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ nicht erfüllt ist.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*

Es seien A und B Ringe und $A \xrightarrow{f} B$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie:

a) Ist A ein Körper, so ist f injektiv.

b) Ist A ein Körper, so ist dessen Charakteristik 0 oder eine Primzahl.

c) Die Charakteristik von A ist ein Vielfaches der Charakteristik von B.

d) Folgern Sie, dass es keinen Ringhomomorphismus zwischen zwei Körpern unterschiedlicher Charakteristik geben kann.

Hinweis: Die **Charakteristik** eines Rings R sei definiert als die kleinste natürliche Zahl $n \geq 1$, so dass in R die folgende Gleichheit gilt:

$$n = n \cdot 1 = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ mal}} = 0.$$

Gibt es keine solche Zahl, so ist die Charakteristik als 0 definiert.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie, dass die Cardanischen Formeln

$$x_1 = \frac{1}{3}(A + B), \qquad x_2 = \frac{1}{3}(\zeta^2 A + \zeta B), \qquad x_3 = \frac{1}{3}(\zeta A + \zeta^2 B)$$

die komplexwertigen Lösungen der Gleichung $X^3 + pX + q = 0$ berechnen, wobei $\zeta = e^{2\pi i/3}$,

$$A = \sqrt[3]{-\frac{27}{2}q + \frac{3}{2}\sqrt{-3D}}, \qquad B = \sqrt[3]{-\frac{27}{2}q - \frac{3}{2}\sqrt{-3D}}, \qquad D = -(4p^3 + 27q^2).$$

b) Nutzen Sie diese Formeln, um die Gleichung $x^3 - 9x - 28 = 0$ zu lösen.

c) Zeigen Sie, dass $\sqrt[3]{54 + 30 \cdot \sqrt{3}} + \sqrt[3]{54 - 30 \cdot \sqrt{3}}$ eine ganze Zahl ist.
Hinweis: Benutzen Sie das kubische Polynom $x^3 - 2x - 4$.
