Peter Roquette *17. September 2002*

Mathematisches Institut, Universität Heidelberg

David Hilbert in Königsberg

Vortrag am 30.9.2002 an der Mathematischen Fakultät in Kaliningrad

Wir sind hier zusammengekommen im Gedenken an David Hilbert, der vor 140 Jahren in Königsberg geboren wurde, also in dieser Stadt, die heute Kaliningrad heisst. Hilbert war einer der Großen in der Mathematik; er wird verglichen mit Archimedes, Newton oder Gauss. Er hat die Entwicklung der Mathematik im vergangenen Jahrhundert ganz entscheidend beeinflusst, und zwar hat er in allen Teilgebieten der Mathematik seine prägenden Spuren hinterlassen, von der Analysis, Geometrie und Physik auf der einen Seite bis hin zur Zahlentheorie und theoretischen Logik auf der anderen Seite.

Das Andenken an Hilbert wird in allen Teilen der Welt hochgehalten, überall dort wo Mathematik betrieben wird. Es gibt viele Bücher über Hilbert, in vielen Sprachen, über seine Person und sein Werk unter verschiedenen Gesichtspunkten. [1]) Hier und heute will ich über Hilbert im Zusammenhang mit Königsberg berichten.

Die Mathematik schreitet nicht von selbst vorwärts, sondern es sind immer Menschen, die sie weiter entwickeln. Um die Entwicklung der Mathematik zu verstehen, sollten wir versuchen, die handelnden Mathematiker kennenzulernen und soweit wie möglich zu verstehen. Ich werde daher in Teil I dieses Vortrags einige persönliche Dinge über Hilbert berichten, aus historischen Quellen, die vielleicht noch nicht allgemein bekannt sind. In Teil II werde ich die Arbeiten besprechen, die in Hilberts Königsberger Zeit entstanden sind oder konzipiert wurden.

[1]) Es gibt allerdings noch keine umfassende Werkbiographie.

Teil I. Die Person.

1. Jugend.

Hilbert wuchs in Königsberg auf, er ging hier zur Schule, studierte an der Albertina, erlangte hier seine akademischen Grade und erhielt hier auch seine erste Professur. Die ersten 33 Jahre seines Lebens lebte und arbeitete Hilbert in Königsberg, bevor er im Jahre 1895 nach Göttingen ging, wo sich dann sein mathematisches Genie vollends entfaltete und er zu einem der führenden Mathematiker der Welt avancierte. In dem Königsberger Lebensabschnitt jedoch erhielt Hilbert seine entscheidende Prägung. Die intellektuell anregende wissenschaftliche Atmosphäre, die an der Albertina im 19. Jahrhundert vorherrschte, bildete für Hilbert den geeigneten Hintergrund, in dem sich sein Talent entwickeln konnte. Er selbst berichtet:

> *"Meine Heimat ist Königsberg, wo ich als Sohn einer alten ostpreußischen Juristenfamilie 1862 geboren wurde. In Königsberg habe ich auch das Gymnasium besucht und studiert. Nach längeren Studienreisen habilitierte ich mich in Königsberg im Jahre 1886, wurde außerordentlicher Professor dort 1892 und ordentlicher Professor 1893.*

Über die "alte ostpreußische Familie" der Hilbertschen Vorfahren ist kürzlich ein Buch erschienen, herausgegeben von Anne Arnoldt Cudell zusammen mit ihrer Tochter Anabela, die selbst dieser Familie entstammen. Das Buch enthält authentische Berichte von Familienangehörigen aus zwei Jahrhunderten und gibt uns ein lebendiges Bild von dem Leben früherer Generationen. Frau Anne Arnoldt Cudell, die aus Königsberg stammt, hat ihren "Onkel" David Hilbert noch persönlich gekannt. Sie hatte noch in der deutschen Zeit nach Portugal geheiratet und konnte ein ganzes "Schatzkästlein" mit historischen Familien-Erbstücken dorthin mitnehmen, die somit der Verwüstung und Zerstörung durch Kriegs- und Nachkriegsereignisse entgingen. Darunter befinden sich auch die Aufzeichnungen über das Familienleben der Hilberts aus früherer Zeit.

Unser David Hilbert kommt darin zwar nur als kleiner Junge vor, aber aus den ganzen Erzählungen kann man erkennen, dass und wie er in der Geborgenheit einer intakten Familie aufgewachsen ist. Er selbst berichtet:

> *"Die langen Jahre in der Königsberger Geborgenheit waren eine Zeit der stetigen Reife."*

Sicherlich hat zu der "Königsberger Geborgenheit" auch seine Mutter beigetragen. Von ihr wird berichtet, dass sie eine eigenartige Frau gewesen sei, die mit Vorliebe philosophische und astronomische Schriften las und Primzahlen berechnete. Allerdings war sie vielfach kränklich, und es war ein Glück, dass ihre Schwägerin, "Tante Julie", dann stets für den kleinen David sorgte.

Besonders schöne Erinnerungen hatte David Hilbert an

> "*Rauschen, dem Paradies unserer Kindheit*",

wie es in dem Buch von Cudell heisst. (Rauschen ist das heutige Swedlogorsk). Auch später noch ist Hilbert in den Ferien oft nach Rauschen gekommen. Das Hilbert-Haus in Rauschen-Düne ist übrigens in einigermaßen gutem Zustand heute noch erhalten.

In der Schule hat sich Hilbert nicht recht wohlgefühlt. Er besuchte das Friedrichskollegium. Das war eine Institution mit langer Tradition und hatte den Ruf einer Elite-Schule für die Besten aus jedem Jahrgang. Allerdings hing man, wie es heißt, dort noch ziemlich veralteten Lehrmethoden an. In der Familien-Überlieferung heisst es, dass David zwar keine guten Deutsch-Aufsätze verfasste (die hatte ihm manchmal seine Mutter geschrieben), dass er aber seinen Lehrern mathematische Probleme erklären konnte. Für die Mathematik interessierte sich Hilbert besonders weil, wie er später sagte:

> "*Mathematik ist bequem, denn man braucht dabei nichts auswendig zu lernen, wie es in anderen Fächern notwendig ist. In der Mathematik ergibt sich alles von selbst, nämlich durch logische Überlegung.*"

Ein Jahr vor seinem Abitur (dem Abschlussexamen des Gymnasiums) wechselte Hilbert an eine andere Schule, nämlich an das Wilhelms-Gymnasium auf dem Hintertragheim (heute die Straße Sergejewa). Das Wilhelms-Gymnasium war bekannt dafür, dass dort, im Gegensatz zum Friedrichskolleg, mehr Nachdruck auf die Mathematik und die Naturwissenschaften gelegt wurde. Offensichtlich hat es Hilbert dort besser gefallen als in seiner früheren Schule. Hilberts Abiturzeugnis ist noch erhalten. Sein Mathematiklehrer (er hieß *von Morstein*) gab ihm die bestmögliche Zeugnisnote und bescheinigte ihm:

> "*Gründliches Wissen und die Fähigkeit, die ihm gestellten Aufgaben auf eigenem Wege zu lösen.*"

Dieser Lehrer hatte offenbar die eigenständige besondere mathematische Begabung Hilberts klar erkannt und diese gefördert.

2. Studium.

Im Sommersemester 1880 bezog der 18-jährige Hilbert die Albertina, die Universität in seiner Heimatstadt. Zu der damaligen Zeit zählte die Albertina zu den herausragenden akademischen Institutionen Deutschlands. Hier in Königsberg hatten nicht nur der Philosoph Immanuel Kant und der Astronom Bessel gelehrt. Ganz allgemein hatten die Wissenschaften im 19. Jahrhundert in Königsberg einen raschen Aufschwung erlebt; das wird lebendig geschildert z.Bsp. in dem informativen Geschichtsbuch über die Albertina von K. K. Lavrynowicz.

Insbesondere die mathematisch-physikalischen Wissenschaften wurden an der Albertina traditionsgemäß in hervorragender Weise gepflegt. In Königsberg hatten der große Mathematiker Jacobi und der Physiker Franz Neumann gewirkt. Diese beiden hatten 1834 das Königsberger *Mathematisch-Physikalische Seminar* gegründet, das in Deutschland und auch im Ausland wegen seiner neuen Lehrmethoden berühmt wurde und an vielen anderen Universitäten als Vorbild diente. Nach dem Weggang von Jacobi war das Königsberger Seminar von Richelot weitergeführt worden und stand nunmehr, als Hilbert sein Studium begann, unter der Leitung von Heinrich Weber.

Weber stammte aus Heidelberg. Er war in seinen mathematischen Interessen ausserordentlich vielseitig. Er war bekannt als ein Kenner der neuartigen Ideen Riemanns aus Analysis und Geometrie, und er hatte Arbeiten zur angewandten Mathematik und Physik geschrieben. Aber auch in der Algebra und Zahlentheorie galt er als eine Kapazität. Soeben hatte er zusammen mit Dedekind eine bedeutende Arbeit über algebraische Funktionen fertiggestellt, die wegen ihrer richtungweisenden Ideen weltberühmt geworden ist; heute noch ist sie schlicht als "Dedekind-Weber" bekannt. Über ihn heisst es:

> "*Weber war ein enthusiastischer und anregender Lehrer, der an didaktischen Fragen großes Interesse zeigte.*"

Hilbert fand also in Königsberg besonders günstige Voraussetzungen für ein Studium der Mathematik. Im ersten Semester hörte er Vorlesungen über Integralrechnung und Determinantentheorie bei Weber. Wohl auf Anraten von Weber verbrachte Hilbert sein zweites Semester in Heidelberg, kehrte jedoch anschliessend nach Königsberg zurück. Und jetzt hörte er Webers Vorlesung über Zahlentheorie.

Das Hilbertsche Kollegheft über diese Vorlesung ist erhalten und befindet sich im Hilbert-Nachlass in Göttingen. Es enthält viele Kommentare und Bemerkungen von Hilberts Hand aus späterer Zeit, woraus geschlossen werden kann, dass diese Vorlesung für Hilbert von besonderer Bedeutung geworden ist. Wie man aus dem Inhalt der Vorlesung schliessen kann, war sie von hohem

Niveau und verlangte von den Hörern ein erhebliches Maß an Konzentration und Mitarbeit. Man hat den Eindruck, dass Weber diese Vorlesung bewusst auf so hohes Niveau gesetzt hatte, um den Wissensdurst seiner hochbegabten Studenten zu befriedigen. Es besteht kein Zweifel, dass diese Vorlesung für Hilbert die Grundlage lieferte zumindest für seinen ersten Einstieg in die Algebra und Zahlentheorie.

Neben Hilbert nahm noch ein anderer hochbegabter Student an dieser Vorlesung teil: Hermann Minkowski. Und nun müssen wir etwas über Minkowski berichten. Keine Biographie Hilberts kann Minkowski und Hilberts Verhältnis zu ihm unerwähnt lassen.

Minkowski war 1864 geboren, war also zwei Jahre jünger als Hilbert. Sein Geburtsort war Alexoten in Litauen. Als er acht Jahre war, siedelte sein Vater mit seiner Familie nach Königsberg um, wo Minkowski das Altstädtische Gymnasium besuchte. Anders als Hilbert zeigte Minkowski schon auf der Schule aussergewöhnliche Brillianz, und zwar in allen Fächern. Mehrmals konnte er ein ganzes Schuljahr überspringen, und daher erhielt er bereits ein Jahr vor Hilbert sein Abitur, obwohl er zwei Jahre jünger war. Er studierte zunächst in Berlin, kam aber dann an die Albertina nach Königsberg zurück, just zu derselben Vorlesung von Weber über Zahlentheorie, die auch Hilbert hörte. Dort lernten sich die beiden kennen.

Der brilliante, offene und weithin gebildete Minkowski war seinem Wesen nach in gewisser Weise ein Gegensatz zu Hilbert, den wir uns als bedächtig, konservativ und seinen Interessen nach auf die Mathematik spezialisiert vorzustellen haben. Trotz dieser Gegensätze, oder vielleicht gerade deswegen, entwickelte sich eine enge, lebenslange Freundschaft zwischen beiden. Aus dem Briefwechsel Hilbert-Minkowski, soweit er erhalten ist, kann man entnehmen, dass Hilbert in allen entscheidenden mathematischen Fragen auf das Urteil seines Freundes Minkowski Wert legte, und dass Minkowski stets bereit war, Hilbert seinen Rat zur Verfügung zu stellen. Man kann wohl sagen, dass Minkowski durch seine kritischen Ratschläge und Kommentare einen wesentlichen Anteil an den aussergewöhnlichen wissenschaftlichen Erfolgen Hilberts gehabt hat.

Hilbert war sich wohl bewusst, was ihm die Freundschaft mit Minkowski bedeutete. Er sagt später (1910) in seinem Nachruf auf Minkowski:

> "*Seit meiner Studienzeit war mir Minkowski der beste und zuverlässigste Freund, der an mir hing mit der ganzen ihm eigenen Tiefe und Treue. Unsere Wissenschaft, die uns das liebste war, hatte uns zusammengeführt; sie erschien uns wie ein blühender Garten... Gern suchten wir dort auch verborgene Pfade auf und entdeckten manche neue, uns schön dünkende Aussicht, und wenn*

> *der eine dem andern sie zeigte und wir sie gemeinsam bewunderten, war unsere Freude vollkommen... Er war mir ein Geschenk des Himmels, wie es nur selten jemand zuteil wird, und ich muss dankbar sein, dass ich es so lange besaß... Jäh hat ihn der Tod von unserer Seite gerissen. Was uns aber der Tod nicht nehmen kann, das ist sein edles Bild in unserem Herzen und das Bewusstsein, dass sein Geist in uns fortwirkt.*"

Jeder, der einen Sinn für Freundschaft und Treue besitzt, wird das Bewegende und Anrührende dieser Worte empfinden.

Kehren wir zum Jahr 1882 zurück, als Hilbert und Minkowski gemeinsam im Hörsaal bei Weber saßen. Zu diesem Zeitpunkt hatte Minkowski – anders als Hilbert – schon beachtliche Erfolge aufzuweisen, ja, er war schon zu einer gewissen Berühmtheit gelangt. Obwohl Minkowski erst 17 Jahre war, hatte er sich an die Lösung einer Preisaufgabe gewagt, die von der französischen Akademie der Wissenschaften in Paris ausgeschrieben war. Es handelte sich um die Zerlegung von ganzen Zahlen in eine Summe von 5 Quadraten. Minkowski löste diese schwierige Aufgabe auf das glänzendste, und die französische Akademie verlieh ihm den Großen Preis. Weit über das eigentliche Preisthema hinausgehend hatte er die allgemeine Theorie der quadratischen Formen mit rationalen und ganzzahligen Koeffizienten entwickelt.

Um gemeinsam die Mathematik zu erarbeiten, machten Minkowski und Hilbert fast täglich lange Spaziergänge in die Umgebung von Königsberg, wobei sie in ausführlichen Diskussionen den Problemen nachspürten, denen sie in ihrem Studium begegneten. Später, ab 1884, gesellte sich auch Adolf Hurwitz zu ihnen. Hurwitz war als zweiter Professor ("*Extraordinarius*") nach Königsberg berufen worden.

Diese zweite Mathematik-Professur in Königsberg war auf Betreiben Lindemanns eingerichtet worden. Lindemann war inzwischen Inhaber der ersten Professur ("*Ordinarius*"), als Nachfolger von Heinrich Weber, der 1883 Königsberg verlassen hatte und an die Hochschule in Berlin-Charlottenburg gegangen war. Lindemann war kurz zuvor berühmt geworden durch den Nachweis der Transzendenz der Kreiszahl π und damit der Unmöglichkeit des klassischen Problems der Quadratur des Kreises.

Die Berufung von Hurwitz nach Königsberg erwies sich für Hilbert als ein Glücksfall. Der wissenschaftliche Austausch mit Hurwitz hatte einen segensreichen Einfluss auf die Formung von Hilberts aussergewöhnlicher mathematischer Begabung. Damals wurden für Hilbert, Minkowski und Hurwitz die täglichen Spaziergänge "zum Apfelbaum" zu einer vortrefflichen Tradition, mit mathematischen Gesprächen unter der Leitung des drei Jahre älteren Hurwitz. Hilbert erinnerte sich später:

> "*Damals noch Student, wurde ich bald von Hurwitz zu wissenschaftlichem Verkehr herangezogen und hatte das Glück, in der mühelosesten und interessantesten Art die geometrische Schule von Klein und die algebraisch-analytische Berliner Schule kennenzulernen. Dieser Verkehr wurde um so anregender, als auch der geniale Hermann Minkowski zu unserem Freundschaftsbund hinzutrat. Auf zahllosen, zeitweise Tag für Tag unternommenen Spaziergängen haben wir damals während acht Jahren wohl alle Winkel mathematischen Wissens durchstöbert, und Hurwitz mit seinen ebenso ausgedehnten und vielseitigen wie festbegründeten und wohlgeordneten Kenntnissen war uns dabei immer der Führer.*"

Lindemann, der neue Inhaber der ersten Mathematik-Professur in Königsberg, hatte dagegen nur wenig Einfluss auf Hilbert. Er war wohl auch nicht vom selben mathematischen Kaliber wie Weber oder Hurwitz. Aber das Thema für Hilberts Doktorarbeit hatte Lindemann ihm vorgeschlagen; es handelte sich um ein Thema aus der damals gerade modernen Invariantentheorie. Im Februar des Jahres 1885 erhielt Hilbert von der Philosophischen Fakultät den Doktorgrad.

Hilberts Verhältnis zu Heinrich Weber, der ja inzwischen Königsberg verlassen hatte, wird durch die Tatsache beleuchtet, dass Hilbert sofort ein Telegramm an Weber schickte mit der Nachricht über seine Promotion zum Doktor. Weber antwortete ihm in einem freundlichen Brief und schlug ihm gleichzeitig ein Thema für die weitere Forschungsarbeit vor, ebenfalls aus der Invariantentheorie. Allerdings hat Hilbert diesen Vorschlag von Weber nicht aufgegriffen; offensichtlich fühlte er sich jetzt selbständig genug und sicher, um seinen eigenen Weg durch die Mathematik zu finden.

Hilbert hat jedoch weiterhin stets Kontakt zu Weber gehalten. Aus der Korrespondenz Hilbert-Weber geht hervor, dass Weber bald neidlos das überragende mathematische Genie Hilberts anerkannte. Manchmal war es jetzt Weber, der Hilbert seine neuesten Entdeckungen mitteilte und ihn um seine Meinung und Rat fragte. Hilbert seinerseits hat immer viel von Webers Mathematik gehalten. In Webers letztem grösseren Werk, dem dritten Band seines berühmten Algebra-Buches aus dem Jahre 1908, finden wir die folgende Widmung:

> "*Richard Dedekind, David Hilbert, Hermann Minkowski in herzlicher Freundschaft gewidmet.*"

Bemerkenswert ist, dass dabei Weber nicht nur seinen Kollegen und Mitautor Dedekind erwähnt, sondern auch den um 20 Jahre jüngeren Hilbert als seinen "herzlichen Freund" bezeichnet – ebenso den noch jüngeren Minkowski.

3. Zeit der Reife.

Noch im Jahr 1885, nach seiner Promotion, besuchte Hilbert mehrere mathematische Institutionen in Deutschland und Frankreich, um sich über die neueren Forschungsrichtungen zu informieren und ganz allgemein seinen wissenschaftlichen Horizont zu erweitern. Unter anderen besuchte er Felix Klein in Leipzig.

Das Zusammentreffen mit Felix Klein sollte sich als entscheidend erweisen für die ganze weitere wissenschaftliche Laufbahn Hilberts. Klein erkannte sofort die ausserordentliche Begabung von Hilbert. Er nahm ihn in seinen engeren Bekanntenkreis auf. Seit diesem ersten Zusammentreffen verfolgte Klein laufend die mathematische Entwicklung Hilberts und stand mit ihm in enger Korrespondenz. Zehn Jahre später, als Klein in Göttingen wirkte und dort begann, die Mathematik gemäß der großen Göttinger Tradition wieder auf ein hohes Niveau zu bringen, holte er Hilbert als den damals besten Nachwuchs-Mathematiker von Königsberg nach Göttingen. Dort erhielt Hilbert unter der Ägide von Klein die Arbeitsbedingungen, die es ihm erlaubten, seine mathematischen Fähigkeiten zur Geltung zu bringen, und es entstand das legendäre mathematische Forschungszentrum in Göttingen.

Kehren wir nach Königsberg zurück in das Jahr 1886. In diesem Jahr habilitierte sich Hilbert für das Fach Mathematik an der Philosophischen Fakultät der Albertina. Nun war er Privatdozent und durfte Vorlesungen halten. Als Privatdozent hatte er allerdings noch kein reguläres Einkommen und es begann für ihn eine wirtschaftlich schwierige Zeit. Aus seinen Briefen können wir jedoch einen unbeschwerten Optimismus entnehmen, der ihn Zeit seines Lebens nicht verlassen hat.

Minkowski, der 1885 zum Doktor promoviert worden war, hatte inzwischen eine Stellung an der Universität Bonn erhalten, und so hatte Hilbert für seine täglichen Spaziergänge nur noch Hurwitz als Begleiter. Es gab jedoch einen regen Briefwechsel von Hilbert mit Minkowski, und in den Semesterferien war Minkowski in der Regel bei seinem Freund Hilbert in Königsberg. So wurde die Freundschaft mit Minkowski lebendig erhalten.

Im Jahre 1892 erhielt Hurwitz eine Professur in Zürich und Hilbert erhielt die Hurwitzsche Stelle, also die zweite Mathematik-Professur in Königsberg. Ein Jahr später folgte Lindemann einem Ruf nach München und nun erhielt Hilbert die erste Professur in Königsberg. Die Albertina war die akademische Heimstatt geworden desjenigen Mathematikers, der die Mathematik des folgenden Jahrhunderts am meisten beeinflussen sollte. Hilbert konnte es durchsetzen, dass Minkowski auf die zweite Professur in Königsberg berufen wurde. Nun waren die beiden Freunde wieder vereint und konnten ihre gemeinsamen Spaziergänge "zum Apfelbaum" wieder aufnehmen.

Aber diese glückliche Zeit der gemeinsamen engen Zusammenarbeit dauerte nur ein Jahr. Ende März 1895 siedelte Hilbert nach Göttingen über, wohin ihn Felix Klein geholt hatte, wie wir bereits sagten. Die "*Königsberger Geborgenheit und Zeit der stetigen Reife*" war für Hilbert beendet.

4. Käthe.

Im Jahre 1892, als Hilbert Professor wurde und daher mit einem regelmässigen Einkommen rechnen konnte, gründete er eine Familie. Er heiratete Käthe Jerosch, mit der er seit langem befreundet gewesen war. Hilbert selbst sagt:

> "*In meiner Heimat habe ich auch meine Frau gefunden, die seitdem in treuer Kameradschaft einen entscheidenden Anteil an meiner ganzen Tätigkeit und besonders bei meinen Bemühungen um die junge Generation genommen hat.*"

Hilbert hatte in seinem Leben insgesamt 69 Doktoranden betreut. Hinzu kamen zahlreiche andere Vertreter der "jüngeren Generation", die zwar nicht bei Hilbert promovierten, aber bei ihm doch Anregung und Führung auf dem Weg in die Mathematik fanden. Alle haben in dem Hilbertschen Haus herzliche Gastfreundschaft gefunden, und seine Frau Käthe sorgte für die angemessene häusliche Atmosphäre.

Dies spielte sich jedoch erst in Göttingen ab. In Königsberg hatte Hilbert noch keinen Doktoranden. Er hat aber in Königsberg Kontakte zu der jüngeren Generation in Physik und anderen Wissenschaften geknüpft. Wir erwähnen hier nur den Physiker Arnold Sommerfeld aus Königsberg, der später in Göttingen Hilberts Assistent wurde und auch danach zeitlebens mit Hilbert befreundet war. Ferner den Geophysiker Emil Wichert, später der Leiter des Instituts für Geophysik in Göttingen.

* — * — *

Kein Mensch lebt nur für sich allein, jeder ist eingebettet in ein Umfeld, ein Netz von persönlichen Beziehungen und Freundschaften, aus dem er seine Impulse und Anregungen empfängt, die er verarbeiten und dann weitergeben kann. Dies gilt natürlich auch für einen Wissenschaftler. Ich habe versucht, aufzuzeigen, dass Hilbert in Königsberg und speziell an der Albertina in ein günstiges Umfeld gebettet war, worin sich seine mathematischen Talente und Fähigkeiten besonders gut entwickeln konnten.

In Teil II werde ich die mathematischen Arbeiten Hilberts aus seiner Königsberger Zeit besprechen.

Teil II. Die Mathematik.

Die erste selbstständige mathematische Arbeit Hilberts war seine Dissertation aus dem Jahre 1885. Danach, in den folgenden 10 Königsberger Jahren, publizierte Hilbert mehr als 27 mathematische Arbeiten. Wir sehen also eine reichhaltige wissenschaftliche Produktion des jungen Hilbert.

Die meisten dieser ersten Arbeiten gehören der Algebra oder der Zahlentheorie an. Im Gegensatz zu seinem späteren Schaffen greift dabei Hilbert auch kleinere Fragen auf, die etwas außerhalb der Linie seiner großen Untersuchungen liegen. Und manche dieser Arbeiten erwecken heute den Eindruck, dass Hilbert sich damals noch nicht selbst gefunden hatte. Aber eine Reihe von Arbeiten auch aus der Königsberger Zeit waren richtungweisend und bildeten später im 20. Jahrhundert den Ausgangspunkt für neue, umwälzende Entwicklungen. Im folgenden werde ich solche Arbeiten aus dieser Zeit besprechen.

1. Der Hilbertsche Basissatz.

In den Osterferien des Jahres 1888 traf sich Hilbert mit dem Mathematiker Paul Gordan. Dieser galt damals als der beste Kenner der sogenannten Invariantentheorie.

Es lohnt sich hier nicht, genauer zu erklären, was denn die Problemstellungen und Hauptaufgaben der Invariantentheorie sind. Aus heutiger Sicht ist diese Theorie nicht von derselben Bedeutung, die man ihr in der Zeit Hilberts zugesprochen hat. Hilbert hatte sich schon in seiner Dissertation mit der Invariantentheorie beschäftigt, und auch eine Reihe seiner weiteren algebraischen Arbeiten sind dieser Arbeitsrichtung zuzurechnen. Bei dem Zusammentreffen mit Gordan verfolgte Hilbert offenbar das Ziel, sich in persönlichem Gespräch über die neuesten Resultate und Methoden zu informieren.

Gordan lehrte an der Universität in Erlangen in Süddeutschland, aber das Zusammentreffen von Hilbert und Gordan fand in Leipzig statt, wo sich Gordan inkognito aufhielt, wie Hilbert berichtet. [2]) Bei den Gesprächen ging es hauptsächlich um Endlichkeitsaussagen über Invariantensysteme. Dieses Problem faszinierte Hilbert und ließ ihn nicht mehr los. Noch aus Leipzig schrieb er am 21. März 1888 an Felix Klein in Göttingen:

> "*... Unter der anregenden Hilfe des Herrn Professor Gordan ist inzwischen eine unendliche Reihe von Gedankenschwingungen in*

[2]) In der von Blumenthal verfassten "Lebensgeschichte" Hilberts wird irrtümlich berichtet, dass Hilbert nach Erlangen gereist war, um Gordan zu besuchen. Diese "Lebensgeschichte" ist in Band 3 der Gesammelten Werke von Hilbert abgedruckt.

> *mir erzeugt und insbesondere habe ich, so glauben wir, herrlich kurze Beweise für die Endlichkeit der binären Formensysteme.*"

Und bereits ein halbes Jahr später hatte er eine Arbeit zur Publikation fertiggestellt, die nicht nur die Invariantentheorie revolutionieren sollte, sondern weit über die Invariantentheorie hinaus und für die gesamte Algebra von Bedeutung wurde. Es handelt sich um den Satz, der heute als "Hilbertscher Basissatz" bezeichnet wird.

Hilbert schickte diese Arbeit im September 1888 an Klein zur Publikation. Die Arbeit ist datiert: "*Ostseebad Rauschen, den 6. September 1888*". Im Begleitbrief dazu schreibt Hilbert:

> "*Beiliegend übersende ich Ihnen eine Arbeit über algebraische Gebilde mit der Bitte, den Abdruck derselben in den Göttinger Nachrichten zu veranlassen... Es liegt mir nämlich in diesem Falle mehr denn je an der Sicherung der Priorität der mitgeteilten Resultate durch möglichst baldige Veröffentlichung. Die skizzierten Methoden sind nicht ohne Kraft...*"

Hilbert war sich demnach der Bedeutung seines Satzes sehr bewusst.

Was besagt nun der Hilbertsche Basissatz? Ich will den Satz in der heute gebräuchlichen Terminologie formulieren. Hilbert betrachtet den Ring $k[x_1, \ldots, x_n]$ der Polynome in n Unbestimmten, deren Koeffizientenbereich k ein beliebiger Körper ist.

> **Satz:** *Jedes Ideal im Polynomring $k[x_1, \ldots, x_n]$ besitzt eine endliche Basis, d.h. das Ideal ist durch endlich viele Elemente erzeugbar.*[3])

In einer etwas späteren Arbeit verallgemeinert Hilbert diesen Satz derart, dass als Koeffizientenbereich k auch der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen zugelassen wird. Heute wird der Satz meist in einer noch allgemeineren Form ausgesprochen: Man spricht heute von einem "Noetherschen Ring", wenn in ihm der Hilbertsche Basissatz gilt, d.h. wenn jedes Ideal des Ringes eine endliche Basis besitzt. Der Hilbertsche Basissatz läßt sich dann wie folgt verallgemeinern:

---

[3]) In der ursprünglichen Formulierung von Hilbert kommen die Worte "Ideal" und "Ring" nicht vor. Stattdessen beschreibt Hilbert in Worten die Aussage des Satzes. Übrigens spricht Hilbert nicht von Polynomen, sondern von "Formen", das sind homogene Polynome. Hilbert hatte seinen Satz im Hinblick auf Anwendung in der Invariantentheorie formuliert, und dort handelt es sich im wesentlichen um Formen. Vom sachlichen Standpunkt ist es gleichgültig, ob man den Satz für Formen oder allgemein für beliebige Polynome ausspricht, denn eine Formulierung impliziert die andere.

> *Wenn k ein Noetherscher Ring ist, dann trifft das auch für jeden Erweiterungsring $k[x_1, \ldots, x_n]$ zu, der über k durch endlich viele Elemente erzeugt wird.*

In dieser Form wird der Basissatz heute in jeder fortgeschrittenen Algebra-Vorlesung gebracht.

Der Beweis von Hilbert war schon ziemlich einfach, wurde jedoch im Laufe der Jahre durch andere Mathematiker noch mehr vereinfacht. Die wohl endgültig einfachste und allgemeinste Fassung des Beweises wurde viele Jahre später, 1926, von Artin, in seiner Hamburger Algebra-Vorlesung vorgetragen. Van der Waerden hörte damals die Artinsche Vorlesung und hat danach den Beweis in sein berühmtes Algebra-Lehrbuch aufgenommen. Dadurch wurde der Beweis in der ganzen Welt bekannt. (Das Buch von van der Waerden ist übrigens auch ins Russische übersetzt worden.)

Aber gerade weil der Hilbertsche Beweis ziemlich einfach war, stiess er zunächst auf Unverständnis und Ablehnung unter den Mathematikern. Denn es handelt sich um einen reinen Existenzbeweis, der bei gegebenem Ideal A kein effektives Verfahren zur Konstruktion der endlich vielen Erzeugenden von A angibt. Die Mathematiker der damaligen Zeit waren an Existenzbeweise dieser Art nicht gewöhnt, jedenfalls nicht in der Algebra. Gordan selbst kritisierte:

> "*Das ist keine Mathematik, das ist Theologie*".

Wobei er mit "Theologie" meinte, bei einem solchen Beweis müsse man wie in der Religionswissenschaft an die Richtigkeit der Schlussweisen glauben. Das widerspricht jedoch den Grundsätzen der Mathematik, denn alle mathematischen Beweise müssen doch durch logisches Denken nachprüfbar sein, ohne an einen "Glauben" zu appellieren!

Heute akzeptiert man in der Algebra auch reine Existenzbeweise, nicht zuletzt unter dem Einfluss der Cantorschen Mengenlehre. Übrigens hat Hilbert in einer weiteren Arbeit seinen Beweis tatsächlich ergänzt durch eine effektive Abschätzung der Grade der Polynome, die das gegebene Ideal A erzeugen – und er hat damit auch Gordan von der Richtigkeit seiner Beweisführung überzeugen können.

Weshalb aber ist der Hilbertsche Basissatz von so großer Bedeutung? Das stellte sich erst viele Jahre später heraus. Im Jahre 1921 zeigte Emmy Noether, dass die gesamte Idealtheorie der Polynomringe, welche die Grundlage der algebraischen Geometrie bildet, ausschliesslich aus dem Hilbertschen Basissatz hergeleitet werden kann. Somit gilt diese Idealtheorie für alle Noetherschen Ringe. Dadurch war eine gemeinsame Grundlage geschaffen für die Idealtheorie der ganzen algebraischen Zahlen und der ganzen algebraischen Funktionen. In späteren Jahren wurde das von Emmy Noether und ihrer Schule noch weiter ausgebaut.

Wenn also heute ein Ring, in dem der Hilbertsche Basissatz gilt, als "Noetherscher Ring" bezeichnet wird, dann ist das historisch voll gerechtfertigt.

2. Der Hilbertsche Nullstellensatz.

Gegeben sei ein Ideal A des Polynomringes $k[x_1, \ldots, x_n]$. Wir können uns A erzeugt denken durch endlich viele Polynome $f_1, f_2, \ldots, f_r$. Als Koeffizientenbereich k nehmen wir hier einen algebraisch abgeschlossenen Körper, z.Bsp. den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Wir betrachten die Nullstellen von A, das sind diejenigen Punkte $(a_1, \ldots, a_n)$ des n-dimensionalen Raumes k^n, welche die Gleichungen erfüllen:

$$f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0 \qquad (1 \leq i \leq r).$$

Jede einzelne dieser Gleichungen definiert eine Hyperfläche im n-dimensionalen Raum (wenn das betreffende Polynom f_i nicht konstant ist). Im allgemeinen handelt es sich also um den Durchschnitt von r Hyperflächen. In der Geometrie nennt man eine solche Nullstellenmenge auch "algebraische Mannigfaltigkeit". Hilbert spricht von einem "algebraischen Gebilde".

Es wird nun gefragt nach denjenigen Polynomen g, die auf allen Nullstellen von A verschwinden. Geometrisch bedeutet das, dass die durch $g = 0$ definierte Hyperfläche durch alle Punkte hindurch gehen soll, die auf dem Durchschnitt der r Hyperflächen $f_i = 0$ liegen $(1 \leq i \leq r)$.[4]) Der Hilbertsche Nullstellensatz lautet nun:

> Satz: *Wenn das Polynom g auf allen Nullstellen des Ideals A verschwindet, dann gibt es eine Potenz g^m, die in A liegt, für die es also eine Darstellung der Form gibt:*
>
> $$g^m = \sum_{1 \leq i \leq r} u_i f_i \qquad (u_i \in k[x_1, \ldots, x_n]).$$
>
> *Davon gilt auch die Umkehrung.*

Für $n = 2$, also in der Ebene, war der Satz schon einige Zeit vor Hilbert bekannt; er stammte von Max Noether. Der Hilbertsche Nullstellensatz ist

[4]) Man sagt auch, dass die Hyperfläche $g = 0$ in dem durch die Hyperflächen $f_i = 0$ erzeugten "Büschel" liegt.

demnach eine Verallgemeinerung des Max Noetherschen Fundamentalsatzes der ebenen Geometrie auf höhere Dimensionen.

Der hier genannte Max Noether war der Vater von Emmy Noether. Er lebte von 1844 bis 1921 und war bekannt als ein Vertreter der algebraischen Geometrie aus der mathematischen Schule des berühmten Geometers Clebsch. (Übrigens kam Clebsch aus dem Königsberger Mathematischen Seminar.)

Heute wird der Nullstellensatz meist in einer allgemeineren Form ausgesprochen. Ist R ein beliebiger kommutativer Ring und A ein Ideal von R, dann versteht man unter einer "Nullstelle" von A ein maximales Ideal, welches A enthält. Wenn ein Element $g \in R$ in all diesen maximalen Idealen enthalten ist, dann sagt man, g "verschwindet auf allen Nullstellen von A". Man spricht von einem "Hilbertschen Ring", wenn in ihm der Hilbertsche Nullstellensatz in diesem abstrakten Sinne gilt. Der Hilbertsche Nullstellensatz läßt sich dann wie folgt verallmeinern:

> "*Wenn k ein Hilbertscher Ring ist, dann trifft das auch für jeden Erweiterungsring $k[x_1, \ldots, x_n]$ zu, der über k durch endlich viele Elemente erzeugt wird.*"

Statt von der "Nullstellenmenge" eines Ideals spricht man in diesem Zusammenhang auch von seinem "Spektrum". In diesem Sinne handelt es sich bei dem Nullstellensatz um einen "Spektralsatz", wobei die Analogie zur Spektralanalyse betont wird. In dieser Form hat der Nullstellensatz eine fundamentale Bedeutung in der modernen Algebra gewonnen.

Jeder Polynomring über einem Körper ist Noethersch und Hilbertsch zugleich.

Die Arbeit von Hilbert, in der sich sein Nullstellensatz findet, hatte er im Jahre 1892 fertiggestellt. Er schickte sie am 29. September nach Göttingen an Klein mit der Bitte zur Publikation in den Mathematischen Annalen. In dem Begleitschreiben erwähnt er, dass er das Paket hoch versichert habe, da er das Manuskript im Falle eines Verlustes nur mit unsäglicher Mühe wiederherstellen könne. Er habe nämlich kein schriftliches Konzept, sondern habe

> "*bei fortwährender Umarbeitung das Manuskript meiner Braut in die Feder diktiert.*"

Damals gab es noch keine Schreibmaschinen, also mussten die zum Druck eingereichten Manuskripte mit der Hand geschrieben werden, und zwar so deutlich, dass der Setzer sie ohne Schwierigkeiten lesen konnte. Diese sorgfältige Reinschrift hat also schon damals seine Braut und spätere Frau Käthe Jerosch geleistet, so wie sie es im Verlauf von vielen Jahren bei anderen Manuskripten noch oft getan hat.

Die Arbeit umfasst in gedruckter Form insgesamt 58 Seiten und wurde von Hilbert als letztes, abschliessendes Werk zur Invariantentheorie angesehen. Er schreibt an Minkowski:

> "*Mit der Annalenarbeit verlasse ich das Gebiet der Invarianten definitiv und werde mich nunmehr der Zahlentheorie zuwenden.*"

In der Tat hat Hilbert später nichts mehr über Invariantentheorie publiziert (mit einer Ausnahme), obwohl er ja durch seine Arbeiten zur Invariantentheorie seinen ersten Ruhm erworben hatte.

Im Herbst 1893 sollte in Chicago ein internationaler Mathematiker-Kongress stattfinden. Damals war eine Reise von Europa nach Übersee noch nicht so einfach wie heute; die Reise war teuer und dauerte 2-3 Wochen. Felix Klein, der an dem Kongress teilnehmen wollte, forderte die prominentesten deutschen Mathematiker auf, Berichte über ihre neueren und neuesten Entdeckungen anzufertigen; diese Berichte wollte er in Chicago vorlegen, um insbesondere die amerikanischen Mathematiker darüber zu informieren, worüber in Deutschland gearbeitet wurde. Die wissenschaftliche Kommunikation lief damals noch nicht so schnell wie wir es heute, im Zeitalter des e-mail gewohnt sind.

Der junge Hilbert gehörte nach Auffassung von Felix Klein bereits zu den prominenten deutschen Mathematikern und erhielt daher auch eine solche Aufforderung. Felix Klein schrieb ihm dazu:

> "*Ich brauche nicht besonders auszusprechen, welchen besonderen Wert ich darauf legen würde, gerade von Ihnen einen Beitrag zu erhalten!*"

Hilbert schickte daraufhin an Klein einen Bericht über seine neueren Arbeiten zur Invariantentheorie. Als interessantes Detail entnehmen wir dem Begleitbrief Hilberts an Klein:

> "*Besser ist es wohl, wenn das Referat in englischer Sprache verfasst würde, doch bin ich selbst dazu leider ausserstande.* "

Wir ersehen daraus, dass zu der damaligen Zeit die englische Sprache noch nicht als allgemeine Wissenschafts-Sprache etabliert war. Nicht einmal Hilbert, einer der größten Mathematiker seiner Zeit, war des Englischen mächtig. Heuzutage ist die englische Sprache überall in der Welt bei internationalen wissenschaftlichen Tagungen und Kongressen zur gegenseitigen Verständigung gebräuchlich. Für jeden Wissenschaftler ist heute die Kenntnis des Englischen unumgänglich.

3. Der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz.

Hilberts Werk unterteilt sich deutlich in verschiedene Perioden, in denen er je ein bestimmtes Gebiet behandelt. Die Jugendepoche bis 1892 gehört, wie schon gesagt, der Invariantentheorie. Die restlichen Königsberger Jahre und die ersten Göttinger Jahre bis 1898 gehören der algebraischen Zahlentheorie. Danach kommen weitere Arbeitsperioden, u.a. Grundlagen der Geometrie, Integralgleichungen, Mathematische Physik, usf.

Die jetzt zu besprechende Arbeit aus dem Jahre 1892 gehört aber eigentlich keiner dieser großen Arbeitsperioden an. Das Thema ist der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz. Es handelt sich um ein Einzelthema, das in einer anderen Arbeit in einem unscheinbaren Spezialfall auftauchte. Wie immer bei Hilbert, behandelt er das Thema nun von Grund auf und begnügt sich nicht mit dem benötigten Spezialfall. Er gelangt dabei zu einem allgemeinen Resultat von weitreichender Bedeutung. Die Arbeit erschien im "Crelleschen Journal", also nicht in den "Mathematischen Annalen", wo Hilbert die meisten seiner Arbeiten publiziert hat.

Gegeben sei ein Polynom $f(x,t)$ von zwei Unbestimmten mit ganzzahligen Koeffizienten. Es wird vorausgesetzt, dass das Polynom irreduzibel ist, also nicht als Produkt von zwei oder mehr Polynomen derselben Art dargestellt werden kann.

> Satz: *Wenn $f(x,t)$ irreduzibel ist, so ist es auf unendlich viele Weisen möglich, für t eine ganze Zahl a einzusetzen derart, dass dadurch ein irreduzibles Polynom $f(x,a)$ der einen Unbestimmten x entsteht.*

Die Eigenschaft der Irreduzibilität von f bleibt also durch die Substitution $t \mapsto a$ erhalten, und zwar für unendlich viele $a \in \mathbb{Z}$.

Der Satz wird bei Hilbert übrigens gleich verallgemeinert, indem die beiden Unbestimmten x und t ersetzt werden je durch ein System von Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ und $t_1, \ldots, t_m$. Wenn $f(x_1, \ldots x_n, t_1, \ldots, t_m)$ irreduzibel ist, so kann man unendlich viele Punkte $(a_1, \ldots a_m)$ in $\mathbb{Z}^m$ finden derart, dass nach Einsetzung der a_i für die t_i ein irreduzibles Polynom in $x_1, \ldots, x_n$ entsteht.

Dieser Irreduzibilitätssatz spielt eine wichtige Rolle in der Theorie der diophantischen Gleichungen. Hilbert gibt zwei Folgerungen, nämlich:

> Satz: *Zu jedem n gibt es unendliche viele Galoissche Körper-Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ deren Galoisgruppe die symmetrische Gruppe der Ordnung $n!$ ist. Entsprechend für die alternierende Gruppe der Ordnung $\frac{n!}{2}$.*

Viele Jahre später hat Emmy Noether die Frage aufgeworfen, welche endlichen Gruppen überhaupt als Galoisgruppen über dem Körper der rationalen Zahlen auftreten können. Sie selbst hat wichtige Beiträge dazu geliefert, und zwar unter wesentlicher Benutzung des Hilbertschen Irreduzibilitätssatzes. Man vermutet heute, dass jede endliche Gruppe als Galoisgruppe über $\mathbb{Q}$ realisierbar ist. Für auflösbare Gruppen und für viele andere Gruppen ist das schon bewiesen, aber es fehlt noch ein allgemeiner Beweis. Bei den meisten Untersuchungen dazu spielt der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz eine wesentliche Rolle.

Hilberts Beweis seines Irreduzibilitätssatzes ist ziemlich kompliziert. Man hat in der Folge nach Vereinfachungen der Beweise gesucht. In den Jahren 1919/1920 hat K. Dörge besonders einfache Beweise gegeben. Aber auch danach hat die Frage nach neuen Beweisen immer wieder die Mathematiker bewegt. Der Anlass dazu war einmal, einen genaueren Überblick über diejenigen Zahlen a zu finden, die bei Einsetzung ein irreduzibles Polynom liefern. Ausserdem wollte man den Irreduzibilitätssatz ausdehnen auf andere Koeffizientenbereiche, also nicht nur den Koeffizientenbereich $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen oder seinen Quotientenkörper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.

Auf Anregung von Hasse hat W. Franz im Jahre 1931 in seiner Dissertation gezeigt, dass der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz auch für einen Polymomring anstelle von $\mathbb{Z}$ als Koeffizientenbereich gilt. Inzwischen kennt man viele weitere solche Ringe; diese werden heute als "Hilbertsche Ringe" bezeichnet, und ihre Quotientenkörper als "Hilbertsche Körper". [5]) Die Theorie der Hilbertschen Körper ist weit entwickelt und liefert hochinteressante Resultate zur diophantischen Geometrie.

4. Der Hilbertsche Zahlbericht.

Wie bereits berichtet, beschloss Hilbert im Jahre 1892, sich nicht mehr mit Invariantentheorie zu beschäftigen, sondern sich der Zahlentheorie zuzuwenden. Der Anlass für diesen seinen Entschluss ist unbekannt. Sein Biograph Blumenthal berichtet, dass Hilbert sich schon seit seiner Studentenzeit zur Zahlentheorie hingezogen fühlte; er bezeichnete sie als

[5]) Diese Terminologie ist unglücklich, denn "Hilbertsche Ringe" sind ja auch im Anschluss an den Hilbertschen Nullstellensatz definiert worden, und beide Begriffe stimmen nicht überein. Wenn also in einer Arbeit von "Hilbertschen Ringen" gesprochen wird, so sollte sich der Leser zunächst vergewissern, in welchem Zusammenhang dieser Begriff gemeint ist. Heutzutage ist meist "Hilbertscher Ring" im Sinne des Hilbertschen Irreduzibilitätssatzes gemeint.

> *"Bauwerk von Schönheit und Harmonie, in dem eine Fülle der kostbarsten Schätze noch verborgen liegt, winkend als reicher Lohn dem Forscher, der den Wert solcher Schätze kennt und die Kunst, sie zu gewinnen, mit Liebe betreibt."*

Jedenfalls begann Hilbert, sich in die algebraische Zahlentheorie einzuarbeiten und studierte die Literatur der alten Meister des 19. Jahrhunderts, darunter namentlich Kummer, Dedekind und Kronecker. Eine der fundamentalen Entdeckungen Kummers bestand darin, dass der Satz von der eindeutigen Primzahlzerlegung in algebraischen Zahlkörpern nicht allgemein zu gelten braucht. Man ist daher genötigt, mit *Idealen* und *Primidealen* zu arbeiten statt mit Zahlen und Primzahlen. In dem Ring der ganzen Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers gilt der Satz von der Primidealzerlegung:

Jedes Ideal zerlegt sich eindeutig als ein Produkt von Primidealen.

Die damals vorhandenen Beweise für diesen Satz fand Hilbert zu kompliziert. In seinem ganzen Leben suchte Hilbert stets nach begrifflicher und inhaltlicher Vereinfachung der mathematischen Theorien. So auch hier. Er verfasste einen wesentlich vereinfachten Beweis des Zerlegungssatzes. Die Publikation dieses Beweises erfolgte im Jahre 1894, datiert ist er jedoch vom Juni 1893. Damals hielt sich Hilbert mit seiner Frau im Ostseebad Cranz auf. (Hilberts Sohn Franz wurde im August 1893 in Cranz geboren. Cranz ist jetzt Zelenogradsk.)

Sicherlich war Hilberts neuer Beweis einfacher als die überlieferten Beweise, insbesondere weil Hilbert gewisse Schlussweisen benutzte, die als Vorwegnahme der Bewertungstheorie angesehen werden können. Aber gemessen an den anderen Hilbertschen Arbeiten handelt es sich hier um eine kleinere Gelegenheitsarbeit, nicht viel mehr als eine Fingerübung.

Gewichtiger war seine gleichzeitig verfasste Arbeit über Galoissche Zahlkörper. Die Methoden und Ergebnisse dieser Untersuchung sind für die ganze weitere Entwicklung der Theorie von der allergrößten Bedeutung geworden. Es handelt sich um die *Kodierung der arithmetischen Eigenschaften eines Galoisschen Körpers in seiner Galoisgruppe.* Die Begriffe "Zerlegungsgruppe, Trägheitsgruppe, Verzweigungsgruppe" tauchen hier zum ersten Mal auf. Heute sind sie zu dem unentbehrlichen Rüstzeug des Zahlentheoretikers geworden.

In diesem Zusammenhang spricht man heute einfach von der "Hilbertschen Theorie". Manchmal heisst es auch "Dedekind-Hilbertsche Theorie", weil Dedekind kurz nach Erscheinen der Hilbertschen Arbeit darauf aufmerksam machte, dass er (Dedekind) einige der Hilbertschen Begriffe und Resultate schon seit längerer Zeit entdeckt, allerdings nicht publiziert hatte.

Hilbert hat seine "Hilbertsche Theorie" offenbar auf eine Anfrage von Heinrich Weber hin entwickelt. Weber, der inzwischen als Professor an der Universität Göttingen wirkte, hatte bei seinen Untersuchungen zur komplexen Multiplikation eine Reihe von Gesetzmässigkeiten gefunden, für die er zunächst keine Erklärung fand, und die er nun seinem ehemaligen Schüler Hilbert vorlegte. Hilberts Antwort darauf war eben die "Hilbertsche Theorie".

Im September 1893 fand in München die Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung statt. Hilbert nahm an dieser Tagung teil und trug über seine neuen Beweise zur Primidealzerlegung vor. Möglicherweise hat er dabei auch auf seine "Hilbertsche Theorie" hingewiesen. Offenbar hat das auf der Tagung einen besonderen Eindruck hinterlassen. Denn es wurde beschlossen, Hilbert zu bitten, zusammen mit Minkowski einen Bericht (Referat) über die Entwicklung der Zahlentheorie zu verfassen.

Die Deutsche Mathematiker Vereinigung (DMV) war im Jahre 1890 gegründet worden. Hilbert und Minkowski waren unter den Gründungsmitgliedern gewesen. In den ersten Jahren ihres Bestehens betrachtete es die DMV als eine wichtige Aufgabe, durch zusammenfassende Berichte über einzelne Teilgebiete der Mathematik einen Überblick zu geben über den gegenwärtigen Stand der Mathematik.

Nun wollte man also einen Bericht über Zahlentheorie, und man hielt Hilbert und Minkowski für kompetent, diesen zu verfassen. Dazu schreibt Hilbert an Klein (der wegen seiner USA-Reise nicht an der Münchner Tagung teilgenommen hatte):

> "*Minkowski und ich haben für das Jahr 95 ein Referat über Zahlentheorie übernommen. Wir gedenken etwas abweichend von dem bisherigen Brauch in unserem Referat das Material weniger historisch als in logischer Folge zu ordnen, so dass dasselbe unter wenige einheitliche Principien zusammengefasst erscheint. Wir werden hauptsächlich nur die wesentlichen Fortschritte der neueren Zeit berücksichtigen, vor allem die Kummer-Dedekind-Kroneckersche Theorie der Körper.*"

Hilbert war also etwas enttäuscht über die Form der bisherigen Berichte und wollte nun seinen eigenen Bericht anders machen. Und er wurde anders. Der Hilbertsche Zahlbericht, als er 1896 fertiggestellt war, nahm einen ungeheuren Einfluss auf die Weiterentwicklung der algebraischen Zahlentheorie.

Minkowski sollte in dem Bericht zunächst die Zahlentheorie der rationalen Zahlen übernehmen. Er stieg aber im Laufe der Zeit aus dem Unternehmen aus, weil er von anderen Buchprojekten in Anspruch genommen war. So kam es, dass Hilbert seinen Bericht schliesslich allein fertigstellte, unter Weglassung der zunächst für Minkowski vorgesehenen Teile.

Die beiden oben erwähnten einzelnen Arbeiten über die Primidealzerlegung und den Galoisschen Zahlkörper wurden von Hilbert in seinen Bericht eingearbeitet.

Ich kann hier nicht im einzelnen den Inhalt des Hilbertschen Zahlberichts beschreiben. Das würde ein Eingehen auf Details aus der algebraischen Zahlentheorie erfordern, was hier nicht möglich ist. Der Hilbertsche Zahlbericht umfasst 300 Seiten. Ich möchte aber zitieren, was Hasse viele Jahre später, 1932, über Hilberts Zahlbericht schreibt:

> "*In diesem Bericht hat Hilbert alles zur damaligen Zeit in der Theorie der algebraischen Zahlkörper erreichte Wissen gesammelt und zu einer einheitlichen, von großen Gesichtspunkten getragenen Theorie zusammengestellt ... Überdies sind neben den vorhandenen Ergebnissen anderer Forscher eine große Menge eigener Erkenntnisse hier erstmalig ausgesprochen und in den großen Zusammenhang eingeordnet. Das Werk ist noch heute der gegebene Ausgangspunkt für jeden, der in die Geheimnisse der Theorie der algebraischen Zahlkörper eindringen und der modernen zahlentheoretischen Forschung auf ihre Höhen folgen will.*"

Wenn Hasse dabei von "heute" spricht, dann meint er das Jahr 1932, als er diesen Kommentar schrieb. Jetzt (also 2002) gibt es eine Reihe anderer Lehrbücher und Monographien, welche die Theorie der algebraischen Zahlkörper darstellen, oft über Hilbert hinausgehend. Aber der Hilbertsche Zahlbericht ist auch in unserer Zeit noch so interessant, dass er kürzlich (1998) ins Englische übersetzt wurde, also in die heutige Wissenschafts-Sprache.

Der Zahlbericht wurde und wird also von vielen Mathematiker-Generationen als Handbuch für das Studium benutzt. Er ist jedoch keineswegs als der Höhepunkt der Hilbertschen Leistung auf zahlentheoretischem Gebiet anzusehen. Hilberts eigentliche neuen Resultate setzen erst danach ein; sie erwachsen auf dem Boden, den der Zahlbericht geebnet hat, und führen (wie Hasse sagt) "von dort in neue ungeahnte Höhen".

Diese weiteren, richtungweisenden Arbeiten Hilberts entstanden nach dem Erscheinen des Zahlberichts, also nach 1896. Sie fallen daher nicht mehr in die Königsberger Zeit Hilberts.

Die letzte zahlentheoretische Arbeit erscheint 1898. Damit ist dann die zahlentheoretische Periode Hilberts beendet, und er wendet sich anderen mathematischen Problemkreisen zu.

Übrigens hat der Hilbertsche Zahlbericht im Laufe der Zeit auch einige Kritik hervorgerufen. Das ist bei einem solch umfassenden und bedeutenden Werk, an das man besonders hohe Erwartungen knüpft, nicht weiter verwunderlich. Man kritisierte einiges an der Stoffauswahl, auch an den von Hilbert verwendeten Methoden. Ob man dieser Kritik zustimmt oder nicht: in jedem Falle bleibt der Zahlbericht ein monumentales Meisterwerk am Übergang vom 19. zum 20. Jahrhundert.

* — * — *

Ich konnte hier nicht alle Arbeiten Hilberts aus seiner Königsberger Zeit besprechen, und ich habe mich auf diejenigen beschränkt, die mir am wichtigsten erscheinen. Vielleicht hätte ich noch die kleine Note erwähnen sollen, in der Hilbert auf ganz wenigen Seiten einen einfachen Beweis der **Transzendenz von e und der Kreiszahl π** liefert. Im Vergleich zu den früheren, ausserordentlich komplizierten Beweisen von Hermite und von Lindemann war das in der Tat eine enorme Vereinfachung, und Hilberts Arbeit erregte grosses Aufsehen. Diese Arbeit ist eine wahre Perle in der mathematischen Literatur. Nach leichter Bearbeitung unter didaktischen Gesichtspunkten kann der Hilbertsche Beweis einem Hörerkreis ohne größere mathematische Vorkentnnisse geboten werden.

Die **Königsberger Vorlesungen** Hilberts 1886-1895 habe ich ebenfalls hier nicht besprechen können, obwohl auch sie einen wesentlichen Bestandteil der Hilbertschen "Zeit der Reife" ausmachten. Denn seine Vorlesungen, stets gut vorbereitet, dienten ihm dazu, sich selbst nach und nach mit den verschiedensten Teilgebieten der Mathematik vertraut zu machen – zusätzlich zu den Spaziergängen mit Hurwitz und Minkowski "zum Apfelbaum". Allerdings war der äußere Rahmen dieser Vorlesungen nicht besonders glanzvoll; es gab damals nur wenige Mathematikstudenten in Königsberg, und manchmal kamen seine Vorlesungen mangels Beteiligung überhaupt nicht zustande. Dann hat Hilbert sein Vorlesungsmanuskript zuhause ausgearbeitet, ohne es im Hörsaal vorzutragen. Ein Zeichen des beginnenden Ruhms war im Jahre 1891/1892 die Ankunft eines amerikanischen Mathematikers aus Baltimore; für ihn allein hielt Hilbert seine erste Vorlesung über analytische Funktionen.

Unter den berühmten **23 Problemen**, die Hilbert im Jahre 1900 auf dem internationalen Kongress in Paris vortrug, gibt es mindestens sieben, die auf Anregungen in seiner Königsberger Zeit zurückgehen, nämlich die Probleme Nr. 7, 9, 10, 11, 12, 14, 17. Es wäre reizvoll, den Ursprung dieser Probleme in Hilberts Königsberger Zeit im einzelnen darzustellen, was ich aber hier nicht durchführen kann.

Verwendete Literatur.

1. Anne Arnoldt Cudell, Anabela Arnoldt Cudell ed., *Eine Königsberger Familie. Geschichten der Arnoldts und Hilberts.* C.A. Starke Verlag, Limburg (2001)
2. R. Dedekind, *Gwaammelte mathematische Werke.* 3 Bände. Verlag Vieweg, Braunschweig (1930)
3. G. Frei (Hrsgb.), *Der Briefwechsel David Hilbert - Felix Klein (1886–1918).* Verlag Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen (1985)
4. L. Grimoni, *300 Jahre - Collegium Fridericianum Königsberg (1698 - 1998).* In: Königsberger Bürgerbrief Nr. 51 (1998)
5. D. Hilbert, *Adolf Hurwitz.* Mathematische Annalen, Band 83 (1921)
6. D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen.* 3 Bände. Springer-Verlag Berlin 1932-1935
7. W. Kapp, *Das Wilhelms-Gymnasium zu Königsberg i.Pr. 1874–1945. Eine Erinnerungsschrift.* Verlag Rautenberg, Leer (1958)
8. K. Lawrynowicz, *Friedrich Wilhelm Bessel 1784–1846.* Birkhäuser Verlag, Basel (1995)
9. K. Lawrynowicz, *Albertina. Zur Geschichte der Albertus-Universität zu Königsberg in Preußen.* Verlag Duncker & Humblot, Berlin (1999)
10. W. Lorey, *Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts.* Verlag Teubner, Leipzig (1916)
11. H.Minkowski, *Gesammelte Abhandlungen.* Herausgegeben von D. Hilbert. Verlag Teubner, Leipzig (1911)
12. H. Minkowski, *Briefe an David Hilbert.* Herausgegeben von L. Rüdenberg und H. Zassenhaus. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1973)
13. E. Noether, *Gesammelte Abhandlungen.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1983)
14. C. Reid, *Hilbert.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1970)
15. K. Reidemeister (Hrsgb.), *Hilbert. Gedenkband.* Springer-Verlag Berlin, Heidelberg (1971)
16. J.-P. Serre, N. Schappacher, *Smith, Minkowski und die Pariser Akademie.* Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Nr.2 (1993)
17. A. Sommerfeld, C. Carathéodory, *Zum Andenken an David Hilbert. Ansprachen im Trauerhause am Morgen des Begräbnistages vor dem Sarge.* In: Die Naturwissenschaften, Heft 19/20 (1943)
18. A. Voss, *Heinrich Weber.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 23 (1914)
19. B.L. van der Waerden, *On the sources of my book “Moderne Algebra”.* Historia Mathematica, Band 2 (1975)

20. H. Weber, *Über Causalität in den Naturwissenschaften. Rede, gehalten bei der Übergabe des Prorektorats der Albertus-Universität zu Königsberg.* Verlag Engelmann, Leipzig (1881)

Der wissenschaftliche Nachlass von Hilbert befindet sich in der Handschriftenabteilung der Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen.