Jacques Herbrand und sein Lemma

Peter Roquette

2. September 2014

Inhaltsverzeichnis

Was besagt das Herbrandsche Lemma? Wer war eigentlich Herbrand? Und was hatte er mit Hamburg zu tun?

1 Einleitung

In der Zeit der Weimarer Republik entwickelte sich die Mathematik an der neu gegründeten Hamburgischen Universität zu einem Wissenschafts-Standort von internationalem Rang. In der Zahlentheorie begründete insbesondere Artin, der seit 1922 in Hamburg war und für den im Jahre 1926 ein Lehrstuhl geschaffen wurde, eine Arbeitsatmosphäre, die junge Mathematiker aus dem In- und Ausland anzog.[1]

Jacques Herbrand 1931

Einer von ihnen war der junge Franzose Jacques Herbrand. Allerdings war er nur einen einzigen Monat in Hamburg, vom 15. Mai bis 15. Juni 1931. Solch eine kurze Zeit hatte genügt, Artin zu folgender enthusiastischer Äußerung zu veranlassen:

> *. . . habe ich mich sehr oft mit Herbrand unterhalten. Das ist ein Mensch der unglaublich viel weiß und kann . . . Begeistert bin ich*

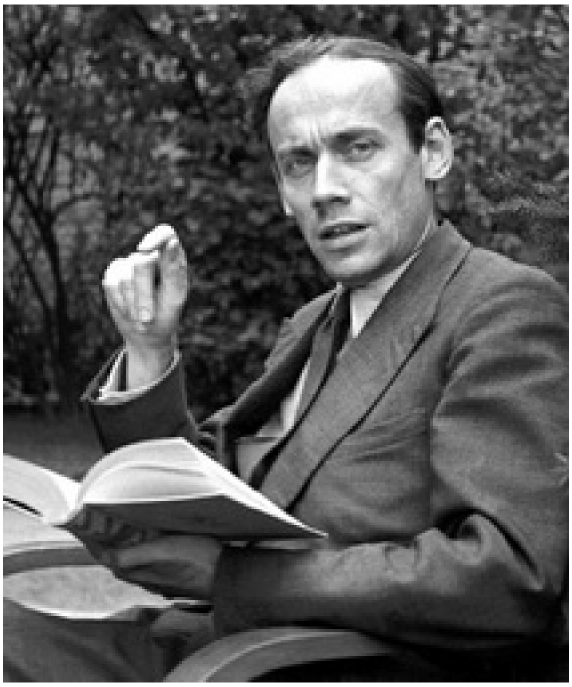
[1] Siehe z.Bsp. [Rei07].

über die neuen ungeheuren Vereinfachungen der Klassenkörpertheorie, die von Herbrand und Chevalley[2] *stammen. Man braucht jetzt so gut wie gar keine schlimmen Rechnungen mehr ...*

Artin schrieb dies in einem Brief an Hasse, datiert am 16. Juni 1931, also unmittelbar nach der Abreise von Herbrand aus Hamburg, und unter dem frischen Eindruck von Herbrands Persönlichkeit. Dieser war damals 23 Jahre alt. Wenn Artin über Herbrand ein solch überschwängliches Lob ausgesprochen hat, dann können wir davon ausgehen, dass es sich in der Tat um einen außergewöhnlichen Mathematiker gehandelt hatte.

Artin beließ es nicht bei dieser enthusiastischen Beurteilung, sondern er brachte sich direkt als Mitarbeiter ein. Im Anschluss an den oben zitierten Text schrieb er an Hasse:

Da ich an einigen kleinen Punkten auch beteiligt bin, möchte ich Ihnen ganz kurz darüber schreiben.



Emil Artin

Hieran fügte Artin eine genauere Beschreibung der neuen Situation. Aus dem Brief können wir entnehmen, dass der Artinsche Teil nicht nur, wie er

[2]Claude Chevalley war mit Herbrand befreundet, und sie arbeiteten eng miteinander über Klassenkörpertheorie.

schreibt, „auf einige kleine Punkte“ beschränkt war, sondern ganz wesentlich zur Vereinfachung und damit zum Verständnis beitrug.[3] Ich habe hier nicht vor, die damals neuen Ergebnisse von Artin, Chevalley und Herbrand im einzelnen zu beschreiben und zu kommentieren; das ist für später geplant. In dieser Note will ich dasjenige Werkzeug aus der Algebra vorstellen, das die in Rede stehenden „ungeheuren Vereinfachungen“ ermöglicht hatte, nämlich das sogenannte Herbrandsche Lemma. Zuvor will ich jedoch etwas über die Person von Herbrand sagen.

2 Herbrand

Herbrands Jahr in Deutschland 1930/31.

Jacques Herbrand stammte aus Paris. Es wird berichtet, dass er als Schüler und als Student stets unter den Besten seines Jahrgangs gewesen war [CL71]. Was immer er begonnen hatte, das führte er bis zur extremen Perfektion durch, und er stellte hohe Ansprüche an sich selbst. Im akademischen Jahr 1930/31, nach seiner Promotion, kam er mit einem Rockefeller-Stipendium nach Deutschland. Zunächst ging er nach Berlin, um dort John v.Neumann zu treffen.

Diese Wahl war bedingt durch Herbrands Interesse für formale Logik. In seiner ausgezeichnet bewerteten Thèse hatte er sich mit Problemen der Logik beschäftigt und er wollte nun als „postdoc“ darin weiterarbeiten.[4]

Uns interessiert hier Herbrands Beschäftigung mit der Klassenkörpertheorie. Es ist nicht klar, wann Herbrand damit begonnen hatte. War es noch in Frankreich, oder bildete sich sein Interesse an der Klassenkörpertheorie erst im Laufe seines Aufenthaltes in Berlin? Zwar hatte er schon während seines Militärdienstes in Frankreich eine kurze C.R.-Note über die Galoisstruktur der Einheiten eines relativ Galoisschen Zahlkörpers fertiggestellt.[5] Aber dieses Ergebnis ist nicht unbedingt der Klassenkörpertheorie zuzurechnen – obwohl es sich dann tatsächlich herausstellte, dass dieser Satz für die Chevalley-Herbrandschen Vereinfachungen eine wichtige Rolle spielt. (Siehe Seite 24.) Dieudonné schreibt in [Die82] über Herbrands Deutschland-Aufenthalt:

[3] Für den vollen Text des Artinschen Briefes siehe [FR08], oder die englische, überarbeitete und erweiterte Auflage [FLR14].

[4] Übrigens ist das „Herbrandsche Theorem“ aus seiner Thèse heute noch aktuell und wird unter den Fachvertretern der Logik diskutiert [Wir12].

[5] Zunächst ohne Beweise in [Her30]. Die Beweise folgten dann in [Her31c].

> *... sans abandonner pour autant la logique mathématique, il consacra ses efforts pendent cette année a la Théorie des Nombres; l'Allemagne était alors la Mecque de cette discipline, et la profondeur et la nouveauté de ses idées firent une grande impression sur E. Artin, Hasse et E. Noether, trois des principaux représentants de cette école.*

Aber hieraus ist nicht eindeutig zu entnehmen, wann und aus welchem Anlass sich das Interesse Herbrands an der Klassenkörpertheorie entwickelt hatte. Jedenfalls ist zu berichten, dass Herbrand im Wintersemester 1930/31 von Berlin aus einen kurzen Abstecher nach Halle machte, um Emmy Noether zu hören, die dort am 30. und 31. Januar 1931 zwei Kolloquiumsvorträge hielt. Sie sprach über Beziehungen zwischen hyperkomplexer und kommutativer Algebra; dieses Thema war gerade aktuell geworden insbesondere im Hinblick auf Hasses Ergebnisse über das Zusammenspiel der Klassenkörpertheorie mit der Algebrentheorie.

In Halle hatte auch Emmy Noether einen ganz ausgezeichneten Eindruck von Herbrand, so wie wir es oben von Artin berichtet haben. Wir zitieren aus ihrem Brief an Hasse vom 8.2.1931. In diesem Brief handelte es sich u.a. um die Vorbereitung einer kleinen Tagung über Schiefkörper (heute würden wir sagen „workshop“). Im Zentrum der Tagung stand das damals aktuelle, eng mit der Klassenkörpertheorie zusammenhängende Problem, ob jeder Schiefkörper über einem Zahlkörper zyklisch ist.[6] Diese Tagung, von Emmy Noether scherzhaft „Schiefkongress“ genannt, war für Ende Februar 1931 von Hasse in Marburg geplant, und es ging in Emmy Noethers Brief u.a. darum, wer dazu eingeladen werden sollte. Sie schrieb:

> *... Dann möchte ich auch vorschlagen, auch meinen Rockefeller-Stipendiaten für den nächsten Sommer – der jetzt bei von Neumann in Berlin ist – aufzufordern: Dr. J. Herbrand ... Er kam nach Halle, und hat am meisten von allen von meinen Sachen verstanden. Er hat bis jetzt außer Logik nur Zahlentheorie gearbeitet (die er aus Ihrem "Bericht" und Ihrer Normenresttheorie[7] gelernt hat); ich dachte an ihn nur als Zuhörer. Eventuell könnte er aber über seine durch die Einheitengruppen vermittelten ganzzahligen Darstellungen der Galoisgruppe vortragen; das*

[6] Das wurde noch in demselben Jahre gemeinsam von R. Brauer, Hasse und E. Noether gelöst [BHN32]. Siehe auch [Roq05].

[7] Gemeint sind der aus drei Teilen bestehende Hassesche Klassenkörperbericht [Has26, Has27, Has30a] sowie die Arbeiten Hasses zur Normenresttheorie, die schließlich in die lokale Klassenkörpertheorie mündeten [Has30b].

ist wahrscheinlich nahe mit meinen hyperkomplexen Sachen zusammenhängend (CR Januar)[8]*. Wir hatten in Halle alle einen ausgezeichneten Eindruck von ihm.*

Emmy Noether 1930

In der Tat nahm Herbrand am Schiefkongress in Marburg vom 26. Februar bis zum 1. März 1931 teil. Das ist aus seiner Korrespondenz mit Hasse zu entnehmen, in der darauf Bezug genommen wird. Außerdem erwähnt er das in seinem Abschlussbericht an die Rockefeller-Stftung über seinen Deutschland-Aufenthalt, wo es heißt:

. . . j'ai assisté a Marburg a un congrès mathématiques, où j'ai pu recontrer la plupart des savants allemands intèressés dans les domaines où je poursuivais mes recherches.[9]

Er hielt dort keinen Vortrag, offenbar weil die Zeit zu knapp war und genug andere Vorträge schon vergeben waren. Aber die wenigen Tage reichten aus, um mit Hasse Kontakt aufzunehmen; es schloss sich ein reger Briefwechsel mit Hasse über Klassenkörpertheorie an. Auch Hasse war von der

[8]Gemeint ist die Arbeit [Her31c], die wir schon In Fußnote 5 zitiert haben.

[9]Unter den Tagungsteilnehmern, auf die Herbrand hier Bezug nimmt, finden sich außer Emmy Noether und Hasse u.a. die Namen R. Brauer, Deuring, Fitting, Brandt, Köthe.

eindrucksvollen Persönlichkeit Herbrands angetan; wir werden ihn weiter unten zitieren.

Noch vor dem Marburger Schiefkongress, am 18. Februar 1931, war Herbrand noch einmal von Berlin nach Halle gefahren. Diesmal trug er selbst dort im Kolloquium vor, und zwar über „Hilbert-Dedekindsche Theorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern“.[10] Es ist anzunehmen, dass Herbrand dabei über seine Note [Her31a] berichtet hat; eine Ausarbeitung davon wurde später von Emmy Noether in zwei Teilen für die Mathematischen Annalen angenommen [Her32b, Her33b]. Es ist uns unbekannt, wer damals die Einladung Herbrands nach Halle veranlasst hatte; vielleicht war es Reinhold Baer, damals Privatdozent in Halle.

Baer war besonders auch an unendlichen Körpererweiterungen und ihrer Galoistheorie interessiert, siehe z.Bsp. seine gemeinsam mit Hasse herausgegebene Edition der Steinitzschen Arbeit zur Körpertheorie [Ste30]. Wie es scheint, gab es einen Briefwechsel zwischen Herbrand und Baer, aber die Briefe sind offenbar nicht erhalten.[11]

Nach dem Marburger Schiefkongress ging Herbrand nach Berlin zurück. Im Sommersemester 1931 hielt er sich dann zunächst in Hamburg bei Artin auf, was wir schon oben berichtet haben. Nach einem Monat wechselte er nach Göttingen zu Emmy Noether. Das wird bestätigt durch einen Brief von Emmy Noether an Hasse: sie schreibt am 2. Juni, dass Herbrand Mitte Juni in Göttingen erwartet wird. In Göttingen gab er vor der Mathematischen Gesellschaft „*deux brillantes exposés*“, wie Dubreil berichtet, der sich damals ebenfalls in Göttingen befand.[12]

Für das akademische Jahr 1931/32 plante Herbrand an die Universität Princeton (USA) zu gehen, und er hatte dafür auch schon Empfehlungen von Hasse, Emmy Noether und v.Neumann erbeten, höchstwahrscheinlich auch von Artin. In seinem Antrag an die Rockefeller-Stiftung schrieb Herbrand, dass er sich in Princeton mit Gruppentheorie befassen wolle. Wir können annehmen, dass dies im Zusammenhang stand mit seiner Absicht, sich in Zukunft mit Galoisschen Körpern zu befassen, deren Gruppe einfach und nicht zyklisch ist, denn dies hatte er in einem Brief an Vessiot geschrieben,

[10] Darauf hat mich freundlicherweise F. Lemmermeyer aufmerksam gemacht.

[11] Übrigens war Herbrand am 22. April noch ein drittes Mal in Halle. Er trug dort über ein Thema aus der Mathematischen Logik vor, nämlich über die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik – das ist diejenige Arbeit, die er später, wenige Tage vor seinem Tod, über Hasse dem Crelleschen Journal zur Publikation vorlegte [Her33a].

[12] Siehe den Bericht [Dub83]. Ein Jahr vorher hatte sich Dubreil in Hamburg bei Artin aufgehalten. Sein Bericht gibt einen lebendigen Eindruck von dem Kreis um Artin zu der damaligen Zeit.

welcher am 28.11.1930 datiert ist. Aber dazu kam es nicht mehr.

Im August 1931 erhielt Hasse aus Paris zwei Sendungen: eine von Herbrand, der sein Manuskript für [Her33a] zur Publikation für Crelles Journal schickte, und am selben Tage einen Brief von André Weil, datiert am 4.8.1931, mit folgendem Inhalt:

André Weil 1930

> *Ich muss Ihnen leider eine sehr betrübende Nachricht mitteilen, die des Todes Jacques Herbrands, der vor wenigen Tagen bei einer Bergbesteigung im Dauphiné tödlich verunglückt ist. Ich brauche Ihnen nicht zu sagen, welchen Verlust dieser Tod für die Wissenschaft und besonders für die Zahlentheorie bedeutet. Noch kürzlich vor seinem Tode hatte er eine neue Idee gehabt, die eine weitere bedeutende Vereinfachung der Klassenkörpertheorie bringen sollte; doch wird das noch erhalten, da er genug davon erzählt hatte, damit es rekonstruiert werde. Sie wissen aber, dass er gewiss noch nicht sein bestes geleistet hatte, und alles, was man sich von ihm versprechen konnte, ist jetzt vorbei. Herr Chevalley ist mit der Publikation von Herbrands Nachlass beauftragt ...*

Die Nachricht vom plötzlichen Tod Herbrands löste eine große Bestürzung aus bei denjenigen, die mit ihm in Deutschland zusammengetroffen waren. In seinem Vorwort zu [Her33a] sagte Hasse:

Die letzten 6 Monate seines Lebens verbrachte er an deutschen Universitäten, in enger Berührung und lebhaftem Gedankenaustausch mit einer Reihe deutscher Mathematiker. Tief hat sich ihnen allen seine edle mit reichen wissenschaftlichen Gaben ausgestattete Persönlichkeit eingeprägt. Ein ungewöhnlich begabter Geist ist mit ihm in der Blüte seiner Jugend dahingegangen. Die schönen und wichtigen Resultate, die er auf dem Gebiete der Zahlentheorie und der mathematischen Logik gefunden, und die fruchtbaren Ideen, die er in mathematischen Gesprächen geäußert hat, berechtigten zu den größten Hoffnungen. Die mathematische Wissenschaft hat durch seinen frühzeitigen Tod einen schweren, unersetzlichen Verlust erfahren.

Helmut Hasse 1931

Artin schrieb am 24. August 1931 an Hasse:

...Sie werden wahrscheinlich schon von dem schrecklichen Unglück gehört haben, das Herbrand getroffen hat. Er ist in den Alpen tödlich verunglückt. Das ist wirklich ein schwerer Schlag der die Arithmetik getroffen hat. Vierzehn Tage vor seinem Tode war Herbrand noch unser Gast und ich erwartete mir große Dinge von ihm ...

Daraus ist zu entnehmen, dass Herbrand noch einmal kurz in Hamburg war. Vielleicht hatte er mit Artin noch Einzelheiten über seine Arbeit [Her32a] besprochen, die dann in den *Hamburger Abhandlungen* erschien, oder über den Plan seines Buches, das in den „Hamburger mathematischen Einzelschriften" erscheinen sollte. Herbrand wollte darin einen Überblick über die Entwicklung der Klassenkörpertheorie geben, bis hin zu den neuesten Resultaten, die ja zu einem erheblichen Teil auf ihn selbst zurückgingen. Dazu kam es allerdings nicht mehr; der diesbezügliche Nachlass von Herbrand wurde von Chevalley redigiert und 1935 in Frankreich publiziert [Her35].

Emmy Noether schrieb aus ihrem Urlaub, den sie auf der Nordseeinsel Sylt verbrachte, am 24. August an Hasse:

> *. . . Mir geht der Tod von Herbrand nicht aus dem Sinn. Haben Sie gehört, dass er Ende Juli bei einer Besteigung in den französischen Alpen verunglückt ist ? Sein Vater hat mir Genaueres geschrieben.*

Wir zitieren noch aus einem Kondolenzschreiben von Courant an den Vater von Jacques Herbrand:

> *Wir haben Ihren Sohn während des kurzen Aufenthalts in Göttingen und auch schon vorher durch seine Arbeiten als einen der hoffnungsreichsten und schon durch seine vorliegenden Leistungen hervorragendsten unter den jüngeren Mathematikern der Welt schätzen gelernt.*

Richard Courant

Nach Herbrands Tod planten Chevalley und Weil, einen Gedenkband für Herbrand herauszugeben. Ich zitiere Chevalley aus einem Brief an Hasse datiert am 31.12.1931:

> *André Weil a eu l'idée de demander aux mathématiciens qui ont connu Herbrand s'ils voudraient collaborer à un livre qui serait écrit en mémoire de lui et composé de divers mémoires se rapportant aux disciplines qui l'ont surtout intéressé. Puis-je vous demander si vous voudrez vous associer à ce projet et donner un mémoire pour ce livre?*

Claude Chevalley

Allerdings wurden die Beiträge dann doch nicht zusammen in einem Band publiziert, sondern als einzelne Hefte in der Reihe „Exposés Mathématiques" bei Hermann (Paris). Aus der Korrespondenz zwischen Hasse, Noether und Chevalley ergibt sich, dass zumindest diese drei mit Beiträgen dabei waren. Ferner hat auch André Weil einen Beitrag geliefert. Durch das Zentralblatt für Mathematik fanden wir weiterhin die Beiträge von Baer, R. Brauer, Brelot, H. Cartan, Dieudonné, Dubreil, Lusin, Delsarte, Iyanaga, J. von Neumann. Diese Namen belegen auf eindrucksvolle Weise, welches Ansehen sich der junge Herbrand unter den Mathematikern erworben hatte.

Artin ist *nicht* als Autor eines der Gedenkhefte dabei; er hatte allerdings schon kurz vorher dem Crelleschen Journal eine Arbeit gegeben, in welcher er, bezugnehmend auf Herbrand, einen besonders einfachen Beweis von dessen Satz über die Galois-Struktur der Einheitengruppe liefert [Art32]. Wir haben diese Arbeit schon oben in Fußnote 5 erwähnt.

In dem Heft mit Hasses Beitrag [Has34b] finden sich auch Nachrufe von Hadamard und Vessiot auf Herbrand. Dort findet sich auch das Foto von Herbrand, das wir auf Seite 2 gezeigt haben. Unter dem Foto steht: „Cliché Prof. Artin". Es erscheint wahrscheinlich, dass das Foto von Artins Frau Natascha aufgenommen worden war.

In dem einen Jahr in Deutschland, in welchem sich Herbrand mit Klassenkörpertheorie befasste, hinterließ er 10 Arbeiten auf hohem Niveau, die für die Entwicklung der algebraischen Zahlentheorie von wegweisender Bedeutung wurden. Welch eine Bilanz!

Herbrand als Bergsteiger

3 Das Lemma

In diesem Abschnitt wird das Herbrandsche Lemma vorgestellt.

Natürlich gibt es in den Arbeiten von Herbrand insgesamt viele Lemmata. Wir möchten sogleich klarstellen, dass es sich bei dem hier als „Herbrandsches Lemma" bezeichneten Resultat *nicht* etwa um dasjenige Lemma aus der Thèse von Herbrand handelt, das später als falsch entdeckt wurde und korrigiert werden musste.[13] In jener Thèse ging es um mathematische Logik.

[13]Siehe [Wir12].

Das „Lemma von Herbrand“, das wir meinen, gehört der abstrakten Algebra an, sein Beweis ist einfach, und es spielt eine wichtige Rolle u.a. in der Klassenkörpertheorie.

Wir betrachten solche abelsche Gruppen A, welche zwei Endomorphismen μ,ν tragen mit der Relation

$$\mu\nu = \nu\mu = 0\,. \tag{1}$$

Wir sprechen kurz von μ,ν-Gruppen. Wir bezeichnen mit $A_\mu\,,\ A^\mu$ den Kern und das Bild von A unter dem Endomorphismus μ, und entsprechend für ν. Das Axiom (1) bedeutet

$$A^\nu \subset A_\mu \qquad \text{und} \qquad A^\mu \subset A_\nu\,. \tag{2}$$

Wir betrachten die Faktorgruppen

$$H_\mu(A) = A_\mu/A^\nu \qquad \text{und} \qquad H_\nu(A) = A_\nu/A^\mu\,. \tag{3}$$

Es bedeuten $h_\mu(A)\,, h_\nu(A)$ die entsrpechenden Gruppenordnungen. Der Quotient

$$q(A) = \frac{h_\mu(A)}{h_\nu(A)} \tag{4}$$

heißt der **Herbrand-Quotient** von A. Er ist definiert wenn und nur wenn Zähler und Nenner endlich sind.

Lemma von Herbrand: *Es sei*

$$0 \to A \to B \to C \to 0 \tag{5}$$

eine exakte Sequenz von μ,ν-Gruppen. Dann gilt

$$q(B) = q(A)q(C)\,, \tag{6}$$

vorausgesetzt, dass zwei der auftretenden Herbrand-Quotienten definiert sind; dann ist es auch der dritte. Wenn C endlich ist, dann ist $q(C) = 1$, also $q(B) = q(A)$.[14]

Beweis: Aus der exakten Sequenz (5) ergibt sich die Sequenz

$$H_\mu(A) \to H_\mu(B) \to H_\mu(C)\,.$$

[14] Gewöhnlich wird das Herbrandsche Lemma nur für den Fall ausgesprochen, dass C endlich ist.

Man verifiziert auf Grund der Definition (3), dass diese Sequenz an der Stelle $H_\mu(B)$ exakt ist. Es gibt nun einen „Verbindungshomomorphismus“

$$\delta_\mu : H_\mu(C) \to H_\nu(A) \tag{7}$$

der wie folgt definiert ist: Sei $c \in C_\mu$, also verschwindet sein Bild c^μ. Wähle ein Urbild $b \in B$; dann ist $b^\mu = a \in A$ (wenn wir im Augenblick $A \subset B$ identifizieren). Wegen (1) verschwindet $a^\nu = b^{\mu\nu}$, also ist $a \in A_\nu$. Die Zuordnung $c \mapsto a$ liefert nun den Verbindungshomomorphismus δ_μ.

Man verifiziert durch Inspektion, dass die Sequenz

$$H_\mu(B) \to H_\mu(C) \underset{\delta_\mu}{\to} H_\nu(A) \to H_\nu(B)$$

an den Stellen $H_\mu(C)$ und $H_\nu(A)$ exakt ist. Entsprechendes gilt bei Vertauschung von μ mit ν. Wir erhalten somit eine geschlossene exakte Sequenz von abelschen Gruppen:

$$\begin{tikzcd}
H_\mu(A) \arrow[r] & H_\mu(B) \arrow[r] & H_\mu(C) \arrow[d, "\delta_\mu"] \\
H_\nu(C) \arrow[u, "\delta_\nu"] & H_\nu(B) \arrow[l] & H_\nu(A) \arrow[l]
\end{tikzcd} \tag{8}$$

In einer solchen Situation verschwindet (wegen der Exaktheit) das alternierende Produkt der betreffenden Gruppenordnungen, d.h. es ist

$$h_\mu(A) \cdot h_\mu(B)^{-1} \cdot h_\mu(C) \cdot h_\nu(A)^{-1} \cdot h_\nu(B) \cdot h_\nu(C)^{-1} = 1\,.$$

Umordnung der Terme ergibt im Hinblick auf die Definition des Herbrand-Quotienten:

$$q(A)q(B)^{-1}q(C) = 1,$$

also die Behauptung (6).

Aus dem Diagramm (8) ersieht man ohne weiteres, dass aus der Endlichkeit von z.Bsp. der Gruppen für A und für B auch die Endlichkeit der Gruppen für C folgt, denn $H_\mu(C)$ ist dann durch die exakte Sequenz

$$H_\mu(B) \to H_\mu(C) \underset{\delta_\mu}{\to} H_\nu(A)$$

in zwei endliche Gruppen eingeschlossen, und entsprechend $H_\nu(C)$.

Nun sei C endlich. Um zu verifizieren, dass $q(C) = 1$ verwende man Induktion nach der Gruppenordnung. Es genügt $q(C) = 1$ für eine *einfache*

μ, ν-Gruppe C festzustellen, die also keine echten μ, ν-Untergruppen besitzt. In dieser Situation ist entweder $C_\mu = C$ (dann ist $C^\mu = 0$), oder aber $C_\mu = 0$ (dann ist $C^\mu = C$). Dasselbe gilt für C_ν. In jedem dieser Fälle verifiziert man $q(C) = 1$ gemäß der Definition (4).

□

Das Herbrandsche Lemma wird zumeist im Rahmen der Kohomologietheorie von Gruppen verwendet, allerdings muss es sich dabei um eine *zyklische* Gruppe handeln. Es sei demgemäß $G = \langle\sigma\rangle$ eine endliche zyklische Gruppe, und es sei die Erzeugende σ festgelegt. Die Ordnung von G bezeichnen wir mit n. Wir betrachten G-Moduln A und setzen

$$\mu := \sigma - 1 \qquad \text{und} \qquad \nu := 1 + \sigma + \sigma^2 + \cdots + \sigma^{n-1}$$

Dadurch wird A zu einem μ, ν-Modul, und ν erscheint als der Normoperator des G-Moduls. Die Gruppen $H_\mu\,, H_\nu$ lassen sich in dieser Situation als 0-te und 1-te Kohomologiegruppe in Bezug auf G identifizieren:

$$\begin{aligned} H_\mu(A) &= H^0(A) = G\textit{-invariante Elemente modulo } G\textit{-Normen}, \\ H_\nu(A) &= H^1(A) = \textit{Elemente mit trivialer } G\textit{-Norm modulo } A^{\sigma-1}\,. \end{aligned}$$

In manchen Situationen (z.Bsp. in der Klassenkörpertheorie) ist es notwendig, die Ordnungen $h^0(A)\,, h^1(A)$ der G-Kohomologiegruppen eines Moduls A zu berechnen. Kennt man eine davon, so genügt es, den Herbrand-Quotienten $q(A)$ zu berechnen; das Herbrandsche Lemma zeigt nun, dass man dazu den Modul A in geeigneter Weise abändern kann. Das ist die Bedeutung des Lemmas, mit Hilfe dessen also die von Artin in seinem Brief an Hasse monierten „schlimmen Rechnungen“ vermieden werden können.

4 Das Lokal-Global Prinzip

Aus welchem Anlass entstand das Herbrandsche Lemma?

Die Idee zu Herbrands Lemma entstand während seines Aufenthaltes in Hamburg bei Artin, im Zuge seiner Beschäftigung mit dem Lokal-Global Prinzip, das auf dem Marburger „Schiefkongress“ im Vordergrund gestanden hatte. Herbrand hatte ja an dieser Tagung, die vom 26.2. bis zum 1.3.1931 stattfand, teilgenommen, wie wir schon oben auf Seite 6 erwähnt haben. In Marburg ging es um zyklische Algebren über Zahlkörpern, und im Zusammenhang damit um das Lokal-Global Prinzip für Normen, also um den

> **Normensatz**: *Es sei $K|k$ eine zyklische Erweiterung von Zahlkörpern. Wenn eine Zahl $a \in k$ lokal überall, d.h. für jede Primstelle $\mathfrak{p}$ von k, eine Norm aus der zugehörigen lokalen Erweiterung $K_\mathfrak{p}$ ist, dann ist a auch global eine Norm aus K.*[15]

Für zyklische Erweiterungen von Primzahlgrad war der Normensatz seit langer Zeit bekannt. Nun ging es um die Verallgemeinerung für zyklische Erweiterungen beliebigen Grades.

Zwar wurde der Beweis auf dem Schiefkongress selbst noch nicht gefunden, aber wenige Tage danach, am 6.3.1931, sandte Hasse eine Kurznachricht an alle Teilnehmer, mit dem Text:

> *Habe soeben den fraglichen Normensatz für* zyklische *Relativkörper bewiesen, und mehr braucht man für die Theorie der zyklischen Divisionsalgebren nicht.*[16]

Auch Herbrand erhielt diese Nachricht; zusätzlich schickte ihm Hasse noch den vollen Beweis. Herbrand bedankte sich dafür in seinem ersten Brief an Hasse. Dieser Brief ist datiert am 11.3.1931 aus Berlin. Hasses damaliger Beweis ist aus seiner Note [Has31] in den Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen bekannt; diese Note trägt das Datum 7.3.1931. Der Beweis benutzt vollständige Induktion nach dem Körpergrad in ziemlich umständlicher Weise (aus heutiger Sicht), und er stützt sich damit auf den alten Beweis von Furtwängler im Falle des Primzahlgrades.

Für Herbrand war offenbar dieser Beweis nicht durchsichtig genug. Er hatte erkannt, dass der Normensatz eng mit dem sogenannten Hauptgeschlechtssatz zusammenhängt. (Wir werden weiter unten erklären, was unter „Hauptgeschlechtssatz“ zu verstehen ist.) Er zielte auf einen direkten Beweis, der von vorneherein für alle zyklischen Körper in übersichtlicher Weise funktioniert, und der die von Artin erwähnten „schlimmen Rechnungen“ (siehe Seite 2) vermeidet.

In Herbrands zweitem Brief an Hasse, datiert am 24.4.1931, deutet er an, wie er zumindest den auf Einheiten bezüglichen Teil des Hauptgeschlechtssatzes zu beweisen gedenkt. In seinem nächsten Brief, am 18.5.1931 nunmehr aus Hamburg, gibt er schon eine genauere Skizze dieses Beweises. Herbrand erwähnt explizit, dass sich daraus als Folge der Normensatz ergibt.

Aber schon wenig später, am 27.5.1931, schickt Herbrand einen weiteren Brief an Hasse, der beginnt:

[15] Dabei sind auch die unendlichen Primstellen von k zu berücksichtigen.

[16] Wenig später gelang Hasse ein Gegenbeispiel für seine ursprüngliche Vermutung, dass der Normensatz für beliebe abelsche Relativkörper gilt [Has31].

> *Sehr geehrter Herr Professor, Ich bin sehr froh Ihnen einen „vernünftigen Beweis“ der Takagischen Sätze mitteilen zu können.*[17]

Damit meinte er u.a. den Satz von Takagi, dass jeder zyklische Körper ein Klassenkörper ist. Und wiederum sagt er, dass aus seinen Überlegungen auch der Hassesche Normensatz folgt. Und er führt den Beweis mit Hilfe des sogenannten Hauptgeschlechtssatzes, wobei eben das Herbrandsche Lemma entscheidend benutzt wird.

Dieser Brief ist das erste Dokument, in welchem ein Beweis des Herbrandschen Lemmas erscheint. Zwar noch nicht im Rahmen der abstrakten Algebra, sondern anhand des in Rede stehenden Problems aus der Klassenkörpertheorie, und ohne dies konkret als „Lemma“ zu formulieren. Aber es handelt sich im wesentlichen um dieselben Schlüsse, die wir oben in Abschnitt 3 beim Beweis benutzt haben.

Wir stellen fest, dass Herbrand die drei letztgenannten Briefe aus Hamburg geschickt hatte. Wir gehen wohl nicht fehl, wenn wir annehmen, dass die anregende Arbeitsatmosphäre im Kreis um Artin wesentlich dazu beigetragen hat, dass Herbrand zu diesen Resultaten vorgedrungen war. Artin hat sicherlich immer sofort von Herbrands Fortschritten Kenntnis erhalten, da sie sich täglich trafen. Und Artin hat ja dann auch selbst wesentliche Beiträge geliefert, wie er in seinem Brief an Hasse vom 16. Juni schrieb. Aber die Anregung speziell zum „Herbrandschen Lemma“ kam nicht von Artin, sondern von Herbrands Freund Chevalley. Jedenfalls sagt Herbrand am Schluss seines Briefes vom 27.5.1931 an Hasse:

> *Der Beweis wurde mir soeben von Herrn Chevalley mitgeteilt*[18]*, und er ist merkwürdig einfach; ich schreibe ihn hier wieder, mit einigen weiteren Vereinfachungen . . . Ich war sehr erstaunt als ich sah wie einfach dieser neue Beweis war.*

Wir entnehmen daraus, dass Chevalley einen bedeutenden Anteil an der Aufstellung des Lemmas hatte. Eigentlich müsste es also wohl „Chevalley-Herbrand Lemma“ heißen. Aber Chevalley in seiner Thèse [Che33] sagt „lemme de Herbrand“, und dieser Name hat sich eingebürgert.

[17]Die Briefe von Herbrand an Hasse waren in deutscher Sprache geschrieben, zwar manchmal etwas unbeholfen aber gut verständlich. Der volle Wortlaut der Briefe ist wiedergegeben in meinem Homepage:
http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/ ci3/Transkriptionen/manutrans.html

[18]Daraus kann nicht gefolgert werden, dass Chevalley damals auch in Hamburg war. Er kam erst im Wintersemester 1931/32 nach Hamburg, als Rockefeller-Stipendiat auf Einladung von Artin.

5 Der Hauptgeschlechtssatz

Was ist denn nun der erwähnte „Hauptgeschlechtssatz“ und wie hängt er mit dem Hasseschen Normensatz und dem Herbrandschen Lemma zusammen?

Um das erläutern zu können, muss ich (in diesem und dem folgenden Abschnitt) einige Kenntnisse über die Grundbegriffe der Klassenkörpertheorie voraussetzen. Ich werde dabei die Sprache der sogenannten „Idele“ benutzen, die von Chevalley im Jahre 1936 eingeführt wurden[19] und heute standard ist. Herbrand hat dies zwar nicht mehr erlebt; er arbeitete noch mit Idealgruppen statt Idelgruppen. Aber die Sprache der Idele entspricht durchaus seinem Denken, wie ich meine. In seinen Briefen an Hasse betont Herbrand wiederholt den Zusammenhang zwischen lokaler und globaler Theorie, und um das zu untersuchen ist die Sprache der Idele wohl am besten geeignet. Die „Übersetzung“ aus der Sprache der Idealgruppen in die der Idelgruppen ist leicht und problemlos.

Übrigens stammt die Wortschöpfung „Idel“ von Hasse. Ich kann berichten, dass sich Hasse selbst gelegentlich in persönlichen Gesprächen dahingehend geäußert hat. Auch bestätigt das Iyanaga [Iya06]. Das erste Mal taucht das Wort „Idel“ in den beiden Referaten über die Chevalleysche Arbeit [Che36] auf, einmal durch Hasse im Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik, und außerdem durch den Hasse-Schüler Grunwald im Zentralblatt für Mathematik. Hasse schreibt in seinem Referat:

> *Der Begriff des Ideals entspringt aus der Nichterfüllbarkeit der Forderung, eine Zahl aus k*[20] *zu finden, die für alle Primstellen $\mathfrak{p}$ von k vorgeschriebene Ordnungszahlen hat, wobei für fast alle $\mathfrak{p}$ die Ordnungszahl 0 vorgeschrieben ist. Verschärft man die durch die Ordnungszahlen ausgedrückten groben $\mathfrak{p}$-adischen Annäherungsvorschriften durch Vorschreiben der gesamten $\mathfrak{p}$-adischen Entwicklungen, so entspringt daraus der vom Verf. eingeführte Be-*

[19] Sie tauchen jedoch unter dem Namen „éléments idéaux“ schon ein Jahr vorher in einem Brief von Chevalley an Hasse auf, datiert am 20.6.1935. In diesem Brief teilt Chevalley mit, dass er die Idee zur Einführung der Idele während der Anfertigung seines Enzyklopädie-Artikels erhalten habe. Er hatte nämlich auf Vorschlag von Hasse zugesagt, einen Artikel über Klassenkörpertheorie für die neue Auflage der „Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften“ zu schreiben, die von Hasse und Hecke herausgegeben wurde. Dieser Artikel wurde 1938 fertig, wurde dann ins Deutsche übersetzt (von M. Eichler) ist aber wegen Schwierigkeiten des Drucks infolge der Kriegsereignisse niemals erschienen. Das Manuskript scheint verloren gegangen zu sein.

[20] Hier bedeutet k einen algebraischen Zahlkörper.

griff des idealen Elements (Idels). Diese werden nämlich erklärt als die Systeme $\{a_\mathfrak{p}\}$, deren einzelne Komponenten $a_\mathfrak{p}$ Elemente $\neq 0$ aus den sämtlichen $\mathfrak{p}$-adischen Erweiterungen von k sind, mit der Einschränkung, dass $a_\mathfrak{p}$ für fast alle $\mathfrak{p}$ Einheit ist. Dabei sind auch die unendlichen Primstellen einbezogen; Einheit für eine solche bedeutet nur $\neq 0$.

Wir bezeichnen mit J_k die Gruppe der Idele von k. Die multiplikative Gruppe $k^\times$ des Körpers k wird diagonal in J_k eingebettet; das sind die sogenannten „Hauptidele“. Es bedeute C_k die zugehörige Idelklassengruppe, sodass die Sequenz

$$1 \to k^\times \to J_k \to C_k \to 1 \tag{9}$$

exakt ist. Diese Idelklassengruppe ist das universelle Objekt der Klassenkörpertheorie über k.[21] Die abelschen Erweiterungen K endlichen Grades von k entsprechen umkehrbar eindeutig den offenen Untergruppen von C_k, derart, dass die zu K gehörige Untergruppe gleich der Normgruppe $N_{K|k}C_K$ ist. Die Normfaktorgruppe $J_k/N_{K|k}C_K$ ist isomorph zur Galoisgruppe von $K|k$. Artins Reziprozitätsgesetz liefert einen kanonischen Isomorphimus beider Gruppen; gleichzeitig beschreibt er das Zerlegungsverhalten der Primideale von k in der Erweiterung K.

Wir haben oben von „offenen“ Untergruppen von C_k gesprochen. Das bezieht sich auf die von Chevalley angegebene Topologie. Diese wird zunächst auf J_k definiert und überträgt sich dann auf die Faktorgruppe C_k. Eine Untergruppe $U \subset J_k$ ist genau dann offen, wenn für jede Primstelle $\mathfrak{p}$ von k die $\mathfrak{p}$-adische Projektion $U_\mathfrak{p}$ offen in $k_\mathfrak{p}^\times$ ist, mit der Maßgabe, dass $U_\mathfrak{p}$ für fast alle $\mathfrak{p}$ die Gruppe der $\mathfrak{p}$-adischen Einheiten enthält. Die offenen Untergruppen von C_k sind dann von der Form $K^\times U$ mit U offen in J_k. Sie besitzen endlichen Index in C_k.

In den Briefen von Herbrand an Hasse geht es um *zyklische* Erweiterungen. Sei also $K|k$ zyklisch, und sei σ eine Erzeugende der Galoisgruppe G. Analog zu (9) haben wir eine exakte Sequenz für K:

$$1 \to K^\times \to J_K \to C_K \to 1\,. \tag{10}$$

Die hier erscheinenden Gruppen sind G-Moduln. Wie wir in Abschnitt 3 beschrieben haben, führt diese exakte Sequenz zu einer geschlossenen exakten Sequenz der Kohomologiegruppen in Bezug auf G:[22]

[21]Daher kommt übrigens auch der Name „Klassen“-Körper. Allerdings arbeitete man früher mit Idealen statt Idelen und entsprechend mit gewissen Ideal-„Klassen“. Die Idelklassen sind, wie Hasse in seinem Referat ja betont hat, als Verfeinerung der Idealklassen anzusehen.

[22]Zur Abkürzung bezeichnen wir hier den Normoperator mit N statt $N_{K|k}$.

$$
\begin{tikzcd}
H^0(K^\times) = k^\times/NK^\times \arrow[r] & H^0(J_K) = J_k/NJ_K \arrow[r] & H^0(C_K) \arrow[d, "\delta_N"] \\
H^1(C_K) \arrow[u, "\delta_{1-\sigma}"] & H^1(J_K) = 1 \arrow[l] & H^1(K^\times) = 1 \arrow[l]
\end{tikzcd}
\tag{11}
$$

Wir haben dabei gleich eingetragen, dass $H^1(K^\times) = 1$, das ist der bekannte „Hilbertsche Satz 90“. Ferner ist auch $H^1(J_K) = 1$, weil das für jede $\mathfrak{p}$-adische Komponente von J_K gilt. Der Hassesche Normensatz behauptet, dass die Abbildung $H^0(K^\times) \to H^0(J_K)$ *injektiv* ist. *Aus dem Diagramm ersehen wir wegen der Exaktheit unmittelbar, dass der Hassesche Normensatz gleichbedeutend ist mit dem sogenannten*

$$\textbf{Hauptgeschlechtssatz}: \qquad H^1(C_K) = 1. \tag{12}$$

Der Name „Hauptgeschlechtssatz“ ist historisch bedingt; Hasse spricht von einer *„weitgehenden Verallgemeinerung der klassischen Geschlechtertheorie aus den Gaußschen Disquisitiones Arithmeticae“* [Has66]. Heute verstehen wir in der Regel unter „Hauptgeschlechtssatz“ eine Beschreibung der ersten Kohomologiegruppe. Wir werden unten noch einen anderen Hauptgeschlechtssatz kennenlernen, nämlich den für die Gruppe der Einheiten.

Offensichtlich hatte Herbrand, obwohl eigentlich Neuling in der Klassenkörpertheorie, diesen Zusammenhang zwischen dem Hauptgeschlechtssatz und dem Normensatz sofort gesehen, und er hat sich deshalb dem Beweis des Hauptgeschlechtssatzes zugewandt. Dabei hat er aus den verschiedenen Beweisschritten (Hasse nannte sie „Reduktionen“) sein Lemma herausdestilliert. Bemerkeswert ist, dass dadurch der Beweis von vorneherein für beliebige zyklische Körper geführt werden kann, und nicht nur für zyklische Körper von Primzahlgrad.

Für H^0 ergibt sich aus dem Diagramm (11)

$$H^0(C_K) = C_k/NC_K \tag{13}$$

Nach der Klassenkörpertheorie ist diese Normfaktorgruppe von der Ordnung $n := [K : k]$. Wir können also notieren dass

$$h^0(C_K) = n\,, \tag{14}$$

und daher genügt es zum Beweis des Hauptgeschlechtssatzes zu zeigen, dass der Herbrand-Quotient $q(C_K) = n$.

Hier sehen wir deutlich die Hauptidee von Herbrand. Obwohl wir eigentlich an der Bestimmung von $h^1(C_K)$ interessiert sind, wird $h^1(\cdots)$ durch den Herbrand-Quotienten $q(\cdots)$ ersetzt, weil sich nämlich dieser übersichtlich verhält bei Änderung der Gruppe. Dazu ist es natürlich wichtig, dass $h^0(C_K)$ nach (14) schon bekannt ist.

Aber HALT! In (14) wird schon benutzt, dass die zyklische Erweiterung $K|k$ ein Klassenkörper ist. Es stellt sich jedoch heraus, dass die folgenden Rechnungen auch ohne diese Kenntnis durchgeführt werden können, und dass sich dann daraus umgekehrt ergibt, dass (14) in der Tat gilt, dass also $K|k$ Klassenkörper ist.

Der Satz, dass jede zyklische (und dann auch abelsche) Erweiterung ein Klassenkörper ist, ist einer der von Herbrand in seinem Brief an Hasse vom 27.5.1931 angesprochenen „Takagischen Sätze", für die er einen „vernünftigen Beweis" ankündigte, d.h. einen einfachen Beweis mit Hilfe seines Lemmas. In dem Hasseschen Klassenkörperbericht [Has26], den Herbrand genau studiert hatte und den er in den Briefen an Hasse öfter zitiert, wird jener Satz als „Umkehrsatz" der Klassenkörpertheorie bezeichnet.

Diese Bezeichnung „Umkehrsatz" erklärt sich aus der Systematik von Hasse in seinem Klassenkörperbericht [Has26]. Takagi definierte einen Klassenkörper als einen endlichen Erweiterungskörper K von k, für welchen der Index der Normfaktorgruppe gleich dem Körpergrad ist:

$$(C_k : NC_K) = [K : k] \, ,$$

also (14). Diese, auf den ersten Blick unscheinbare Bedingung impliziert u.a., dass $K|k$ abelsch ist, und dass die Normfaktorgruppe C_k/NC_K isomorph zur Galoisgruppe von $K|k$ ist. Das Artinsche Reziprozitätsgesetz ergibt einen kanonischen Isomorphismus der Normfaktorgruppe auf die Galoisgruppe, in dem sich insbesondere das Zerlegungsgesetz in K für die Primideale aus k spiegelt. In der Takagi-Hasseschen Sytematik ging es dann zunächst um den **Existenzsatz**, dass zu jeder offenen Untergruppe $U \subset C_k$ ein Klassenkörper $K|k$ existiert, dessen Normgruppe $NC_K = U$. Der **Eindeutigkeitssatz** besagt, dass $K|k$ eindeutig durch seine Normgruppe NC_K bestimmt ist. Der **Umkehrsatz** besagt dann, dass *jeder* abelsche Erweiterungskörper von $K|k$ ein Klassenkörper ist. Die Zurückführung auf den Fall eines zyklischen Körpers $K|k$ ist problemlos; und mit dem zyklischen Fall beschäftigt sich nun Herbrand.[23]

[23] Heute würde man besser den „Umkehrsatz" an die Spitze stellen. Das war aber früher nicht möglich, weil man zum Beweis des Umkehrsatzes den Existenzsatz brauchte, jedenfalls Teile davon. Erst durch die „ungeheuren Vereinfachungen" von Chevalley und Her-

Demgemäß bezeichnen wir die Ordnung der Normfaktorgruppe (13) vorläufig mit n', und notieren

$$h^0(C_K) = n' \leq n\,. \tag{15}$$

Die Ungleichung $n' \leq n$ heißt traditionell die *erste Ungleichung* der Klassenkörpertheorie. Sie gilt für alle endlichen Erweiterungen von k, auch wenn sie nicht zyklisch sind. Dafür hatte Artin in seinem Brief an Hasse vom 16.5.1931 eine ganz einfache Herleitung angegeben; dies war einer der „kleinen Punkte", wie er schreibt, an denen er beteiligt war. (Wir haben aus diesem Brief schon oben in Abschnitt 1 auf Seite 3 zitiert.) Artins Beweis beruht auf den Grundeigenschaften der Zetafunktionen von Zahlkörpern.

Es geht nun also um die Berechnung des Herbrand-Quotienten $q(C_K)$. Dazu ist die Sequenz (10) nicht geeignet, weil $q(J_K)$ nicht definiert ist, denn die Normfaktorgruppe $H^0(J_K) = J_k/N_{K|k}J_K$ ist nicht endlich. Demgemäß wird J_K durch eine geeignete Untergruppe ersetzt.

Es sei S eine endliche Menge von Primstellen von k mit der Maßgabe, dass S alle in K verzweigten Primstellen und alle unendlichen Primstellen enthält. Betrachte die Gruppe J_K^S derjenigen Idele aus J_K, die an den Stellen außerhalb S Einheiten sind. Also:

$$J_K^S := \prod_{\mathfrak{p}\in S} K_{\mathfrak{p}}^\times \times \prod_{\mathfrak{p}\notin S} U_{K_{\mathfrak{p}}} \subset J_K\,. \tag{16}$$

Zur Bezeichnung: Es wurde gesetzt:

$$K_{\mathfrak{p}}^\times := (K \otimes_k k_{\mathfrak{p}})^\times = \prod_{\mathfrak{P}|\,\mathfrak{p}} K_{\mathfrak{P}}^\times\,, \qquad U_{K_{\mathfrak{p}}} := \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} U_{K_{\mathfrak{P}}}\,. \tag{17}$$

$U_{\dots}$ ist die jeweilige Gruppe der lokalen Einheiten. Die Relation $\mathfrak{P}|\,\mathfrak{p}$ bedeutet, dass die Primstelle $\mathfrak{P}$ von K über der Primstelle $\mathfrak{p}$ von k liegt.

Das Bild von J_K^S in der Idelklassengruppe C_K ist

$$C_K^S := (K^\times \cdot J_K^S)/K^\times = J_K^S/(K^\times \cap J_K^S) = J_K^S/E_K^S\,, \tag{18}$$

wobei E_K^S die Gruppe der S-Einheiten von $K^\times$ bedeutet, also derjenigen Zahlen $a \in K$, die an allen nicht zu S gehörigen Primstellen lokale Einheiten sind. C_K^S ist *von endlichem Index* in C_K. Denn die Faktorgruppe $C_K/C_K^S = J_K/K^\times J_K^S$ kann identifiziert werden mit der Idealklassengruppe von K; ihre Ordnung ist gleich der Klassenzahl h von K.

brand wurde es möglich, den Umkehrsatz direkt zu beweisen, sodass dann der bisherige „Existenzsatz" ein „Umkehrsatz" wird.

Weil also der Index von C_K^S in C_K endlich ist, so gilt nach dem Herbrandschen Lemma:

$$q(C_K) = q(C_K^S)\,. \tag{19}$$

Der Herbrandsche Quotient $q(C_K^S)$ kann nun berechnet werden mit der exakten Sequenz gemäß (18)

$$1 \to E_K^S \to J_K^S \to C_K^S \to 1\,, \tag{20}$$

Nach dem Herbrandschen Lemma ist

$$q(C_K^S) = q(J_K^S)q(E_K^S)^{-1}\,. \tag{21}$$

Es bleiben also die Herbrandschen Quotienten von J_K^S und von E_K^S zu bestimmen, wobei sich herausstellen wird, dass diese definiert sind, also ist es auch $q(C_K^S)$.

1. Lokale Theorie: Bestimmung von $q(J_K^S)$.

Die Berechnung von $q(J_K^S)$ läuft gemäß (16), (17) auf die Berechnung von $q(K_\mathfrak{p}^\times)$ und $q(U_{K_\mathfrak{p}})$ zurück. Die einzelnen Faktoren $K_\mathfrak{P}^\times$ von $K_\mathfrak{p}^\times$ werden durch die Galoisgruppe G transitiv permutiert. Entsprechend für $U_{K_\mathfrak{p}}$. Wählen wir eine Fortsetzung $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ aus, so ist

$$q(K_\mathfrak{p}^\times) = q(K_\mathfrak{P}^\times)\,, \qquad\qquad q(U_{K_\mathfrak{p}}) = q(U_{K_\mathfrak{P}}) \tag{22}$$

wobei jeweils auf der rechten Seite die Kohomologie in Bezug auf die Galoisgruppe von $K_\mathfrak{P}|k_\mathfrak{p}$, *d.h. die* Zerlegungsgruppe $G_\mathfrak{p}$, *zu nehmen ist.*[24] Heute wird dies als das „Lemma von Shapiro“ zitiert, aber aus den Briefen von Artin an Hasse ist zu entnehmen, dass dies schon damals bemerkt worden war, jedenfalls in dem damals diskutierten Rahmen, der als Anfang der algebraischen Kohomologie anzusehen ist.

Die Herbrand-Quotienten $q(K_\mathfrak{P}^\times)$ und $q(U_{K_\mathfrak{P}})$ sind nun lokaler Natur und können mit Hilfe der lokalen Theorie bestimmt werden. Was zunächst $q(K_\mathfrak{P}^\times)$ betrifft, so wissen wir, dass $h^1(K_\mathfrak{P}^\times) = 1$ nach dem „Hilbertschen Satz 90“. Also ist $q(K_\mathfrak{P}^\times) = h^0(K_\mathfrak{P}^\times)$ die Ordnung der Normfaktorgruppe $k_\mathfrak{p}^\times/N_\mathfrak{P}K_\mathfrak{P}^\times$.[25] Diese ergibt sich nun *nach der lokalen Klassenkörpertheorie* als der lokale Grad $n_\mathfrak{p} := [K_\mathfrak{P} : k_\mathfrak{p}]$. Also

$$q(K_\mathfrak{P}^\times) = h^0(K_\mathfrak{P}^\times) = n_\mathfrak{p}\,. \tag{23}$$

[24] Die Zerlegungsgruppe hängt nur von $\mathfrak{p}$ ab, aber nicht von der Auswahl des Primteilers $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$.

[25] Wir bezeichnen mit $N_\mathfrak{P}$ die Norm von $K_\mathfrak{P}$ nach $k_\mathfrak{p}$.

Nunmehr kann auch $q(U_{K_\mathfrak{P}})$ bestimmt werden[26]: Aus der exakten Sequenz

$$1 \to U_{K_\mathfrak{P}} \to K_\mathfrak{P}^\times \underset{v_\mathfrak{P}}{\to} \mathbb{Z} \to 0 \tag{24}$$

(wobei $v_\mathfrak{P} : K_\mathfrak{P}^\times \to \mathbb{Z}$ die normierte Bewertung bedeutet) folgt nach dem Herbrandschen Lemma

$$q(K_\mathfrak{P}^\times) = q(U_{K_\mathfrak{P}})q(\mathbb{Z})\,. \tag{25}$$

Hierbei wirkt $G_\mathfrak{p}$ auf $\mathbb{Z}$ trivial und daher $q(\mathbb{Z}) = h^0(\mathbb{Z}) = n_\mathfrak{p}$; hieraus ergibt sich nach (23)

$$q(U_{K_\mathfrak{P}}) = 1\,. \tag{26}$$

Nach (22),(16) erhalten wir nunmehr:

$$q(J_K^S) = \prod_{\mathfrak{p}\in S} q(K_\mathfrak{p}^\times) = \prod_{\mathfrak{p}\in S} n_\mathfrak{p}. \tag{27}$$

Dies ist der erste Faktor in (21). Wir sehen, dass diese Berechnung mithilfe des Herbrandschen Lemmas ziemlich einfach vonstatten geht – wenn man die lokale Klassenkörpertheorie voraussetzt.

Es bleibt nun, den Herbrandschen Quotienten der Einheitengruppe E_K^S zu berechnen.

2. Einheiten: Bestimmung von $q(E_K^S)$.

Hier stellt sich nun überraschenderweise heraus, dass ein früheres Resultat von Herbrand über die Galois-Struktur der Einheitengruppe von Bedeutung ist. Wir haben dieses Resultat bereits oben auf Seite 4 erwähnt. Damals hatte Herbrand eine Untergruppe E' von endlichem Index in E_K^S konstruiert, deren Galois-Struktur er genau angeben konnte [Her31c]. Und zwar für eine beliebige Galoissche Erweiterung $K|k$. Er bezog sich dabei auf ein Resultat von Minkowski, der die Sache im Falle $k = \mathbb{Q}$ erledigt hatte. Eine mögliche Anwendung im Falle zyklischer Erweiterungen $K|k$ im Rahmen der Klassenkörpertheorie wurde von Herbrand in [Her31c] nicht erwähnt. Wir vermuten, dass er erst unter dem Einfluss von Artin in Hamburg darauf aufmerksam gemacht wurde. Denn noch in seinem Brief an Hasse vom 18.5.1931 aus Hamburg hatte er gesagt, dass er zum Beweis des Einheiten-Hauptgeschlechtssatzes (siehe (28) unten) den Hasseschen Normensatz brauche. Erst als es klar wurde, dass es zufolge des Herbrandschen Lemmas möglich war, zur Berechnung von $q(E_K^S)$ zu einer Untergruppe E' von endlichem Index überzugehen fand Herbrand einen direkten Beweis, den er in

[26]Für unendliche Primstellen ist $U_{K_\mathfrak{P}} = K_\mathfrak{P}^\times$ und daher können die unendlichen Primstellen für diese Rechnung ignoriert werden.

seinem Brief an Hasse vom 27.5.1931 darstellte. Artin selbst hat den Einheitensatz von Herbrand für so wichtig gehalten, dass er ihm später eine neue Form und einen stark vereinfachten Beweis gegeben hat [Art32]. Artins Beweis ist heute standard.

Wir verzichten hier darauf, den Herbrandschen Satz über die Galois-Struktur von E_K^S aufzuführen. Das wäre zwar nicht schwierig, aber es würde zu sehr ins Detail führen. Wir berichten nur, dass dieser Satz es erlaubt, unter mehrfachem Einsatz des Herbrandschen Lemmas für eine zyklische Erweiterung $K|k$ zu beweisen:

Einheiten-Hauptgeschlechtssatz: $$q(E_K^S) = \frac{\prod_{\mathfrak{p}\in S} n_{\mathfrak{p}}}{n}\,. \tag{28}$$

Somit ergibt sich schließlich:

$$q(C_K) = q(C_K^S) = q(J_K^S)q(E_K^S)^{-1} = \left(\prod_{\mathfrak{p}\in S} n_{\mathfrak{p}}\right) \cdot \left(\frac{\prod_{\mathfrak{p}\in S} n_{\mathfrak{p}}}{n}\right)^{-1} = n \tag{29}$$

wobei jedes Gleichheitszeichen (bis auf das letzte) eine Anwendung des Herbrandschen Lemmas impliziert, wie wir gesehen haben. Es folgt

$$h^1(C_K) = \frac{h^0(C_K)}{q(C_K)} = \frac{n'}{n} \leq 1\,. \tag{30}$$

Nun ist $h^1(C_K)$ seiner Definition nach eine Gruppenordnung, also positive ganze Zahl. Es folgt

$$h^1(C_K) = 1\,. \tag{31}$$

Dies ergibt den Hauptgeschlechtssatz (12).

□

Gleichzeitig ergibt sich $n' = n$, in (15) gilt also das Gleichheitszeichen. Das zeigt, dass jede zyklische Erweiterung $K|k$ tatsächlich ein Klassenkörper ist. Das ist einer der Hauptsätze von Takagi, und darauf nahm Herbrand Bezug, als er am 27.5.1931 aus Hamburg an Hasse schrieb, er habe jetzt „einen vernünftigen Beweis der Takagischen Sätze“ (siehe Seite 16).

6 Weitere Beobachtungen

Wir können an dem obigen Beweis aber noch mehr beobachten. Denn in (23) geht die *lokale Klassenkörpertheorie* ein. Bei der lokalen Klassenkörpertheorie übernimmt die multiplikative Gruppe $k_{\mathfrak{p}}^\times$ des Grundkörpers die Rolle der

Idelklassengruppe C_k im globalen Fall. Für jede abelsche und insbesondere für jede zyklische Erweiterung $K_{\mathfrak{P}}|k_{\mathfrak{p}}$ stimmt die Ordnung der Normfaktorgruppe $k_{\mathfrak{p}}^{\times}/N_{\mathfrak{P}}K_{\mathfrak{P}}^{\times}$ mit dem Körpergrad $[K_{\mathfrak{P}} : k_{\mathfrak{p}}]$ überein, und dadurch sind die abelschen Erweiterungen ausgezeichnet.

Der Herbrandsche Beweis zeigt also, dass und wie beim Aufbau der Klassenkörpertheorie für Zahlkörper die lokale Klassenkörpertheorie eingeht. Das entsprach durchaus dem Hasseschen *dictum*, dass man die globale Klassenkörpertheorie ausgehend vom Lokalen aufbauen solle. Das war aber nicht immer evident.

Denn zuerst hatte Hasse die lokale Klassenkörpertheorie unter Benutzung der globalen Klassenkörpertheorie entdeckt; insbesondere hatte er das Artinsche Reziprozitätsgesetz benutzt, mithilfe dessen er seine lokalen Normsymbole $\left(\frac{a,K|k}{\mathfrak{p}}\right)$ konstruieren konnte [Has30b]. Das wurde von ihm als unbefriedigend empfunden; er schrieb in [Has30b]:

> *Von einem Aufbau der Klassenkörpertheorie, der umgekehrt zunächst die Sätze der Klassenkörpertheorie im Kleinen ab ovo entwickelt, und dann den Grenzübergang zur Klassenkörpertheorie im Großen vollzieht, verspreche ich mir eine erhebliche gedankliche, wenn nicht auch sachliche Vereinfachung der Beweise der Klassenkörpertheorie, die ja in ihrem bisherigen ungehobelten Zustande wenig geeignet sind, das Studium dieser in ihren Resultaten so glatten Theorie verlockend erscheinen zu lassen.*

Dieses Problem wird von Herbrand schon in seinem ersten Brief an Hasse vom 11.3.1931 angesprochen, allerdings zunächst mit Zweifeln, angesichts des von Hasse gefundenen Gegenbeispiels für den Normensatz bei einem abelschen, nicht-zyklischen Körper $K|k$. Herbrand schreibt:

> *Scheint es Ihnen nicht, dass dieses Gegenbeispiel gegen die Hoffnung geht, die ganze Klassenkörpertheorie von der Klassenkörpertheorie im Kleinen*[27] *herzuleiten? Denn etwas kann in allen* $\mathfrak{p}$*-adischen Körpern wahr sein, und nicht mehr im Körper selbst gültig bleiben.*

Aber in seinem späteren Brief vom 18.5.1931 aus Hamburg zeigt er sich schon zuversichtlicher. Nachdem er den Einheiten-Hauptgeschlechtssatz (28) formuliert hatte, sagt er zwar noch, er brauche dazu den Hasseschen Normensatz. Aber er fügt an:

[27] D.h. der lokalen Klassenkörpertheorie.

> *Nehmen wir an dass* (28) *direkt bewiesen ist, und dass* (27) *bewiesen ist. Dann folgt wie im Primzahlfall, die Theoreme von Takagi und Ihr Theorem über Normenreste. Aber* (27) *ist das Hauptresultat der Klassenkörpertheorie im Kleinen. In dieser Richtung, kann man die Kl. Körper Theorie im Kleinen anwenden; ich glaube, es ist die wahre Richtung.*[28]

Und schließlich, in seinem Brief vom 27.5.1931, stellt er fest, dass es in der Tat die „wahre Richtung“ gewesen ist, und er erklärt Hasse den vollen Beweis von (28), im wesentlichen so wie wir ihn oben dargestellt haben.

Und weiter: Die obige Rechnung zeigt nicht nur, dass und wie die lokale Klassenkörpertheorie beim Beweis des Hasseschen Normensatzes und des „Umkehrsatzes“ der Klassenkörpertheorie verwendet werden kann. Denn es ergibt sich, dass auch die *Begründung* der lokalen Klassenkörpertheorie mit Hilfe des Herbrandschen Lemmas enorm vereinfacht werden kann. Wir zitieren noch einmal aus Herbrands Brief vom 27.5.1931 an Hasse:

> *Herr Chevalley sagt mir auch dass die Klassenkörpertheorie im Kleinen mit analogen Methoden gegrundet sein kann …*

„Analoge Methoden“ bedeutet dabei, dass dies wiederum mit Hilfe des Herbrandschen Lemmas möglich ist. Weiter schreibt Herbrand im nächsten Brief vom 29.6.1931, jetzt schon aus Göttingen:

> *Ich habe einen anderen Beweis des fundamentalen Satzes der Klassenkörpertheorie im kleinen gefunden der viel einfacher ist als derjenige von Chevalley mir skizziert hat. Er ist kaum länger als der Beweis der Einheiten-Satzes.*

Herbrand schreibt nicht, wie dieser andere, einfachere Beweis ausgesehen hat. Wir finden jedoch eine Andeutung in seinem Buch [Her35], das er nicht mehr selbst fertigstellen konnte, das aber von seinem Freund Chevalley redigiert und durch einen Anhang ergänzt wurde. Es erschien 1935. Im erwähnten Anhang beschreibt Chevalley u.a. die Methode von Herbrand beim Beweis des Umkehrsatzes, und insbesondere denjenigen Teil des Beweises, der den lokalen Teil betrifft. Es geht um den Beweis der Relation (23) auf Seite 23, also

[28] Wir haben hier unsere Formelnummern eingesetzt; bei Herbrand sind das andere Nummern. Außerdem ist zu beachten, dass bei Herbrand „Einheiten“ im klassischen Sinne zu verstehen sind, dass also die hier mit S bezeichnete Ausnahmemenge dort nur aus den unendlichen Primstellen besteht. Erst Hasse hatte bemerkt, dass die Einbeziehung auch endlicher Ausnahme-Primstellen die Angelegenheit begrifflich und rechnerisch übersichtlicher macht [Has33c].

um den lokalen „Umkehrsatz“. Diese besagt, dass für eine zyklische lokale Erweiterung $K_{\mathfrak{P}}|k_{\mathfrak{p}}$ die Ordnung der Normklassengruppe $k_{\mathfrak{p}}^{\times}/N_{\mathfrak{P}}K_{\mathfrak{P}}^{\times}$ gleich dem Körpergrad $n_{\mathfrak{p}}$ ist. Wegen (25) ist dies gleichbedeutend mit (26), also mit der Bestimmung des Herbrand-Quotienten der lokalen Einheitengruppe $U_{K_{\mathfrak{P}}}$. Chevalley sagt zunächst etwas über Herbrands Methode:

> *... d'un mode de raisonnement auquel Herbrand a donné la form d'un lemme de théorie des groupes, connu sor le nom de lemme de Herbrand ...*

woraus wir entnehmen können, dass die Bezeichnung „Herbrandsches Lemma“ damals (1935) schon geläufig war. Und er erläutert weiter, worauf sich der Herbrandsche Beweis von (26) stützt:

> *... par un théorème de Deuring sur l'existence d'une base minima d'une extension galoisienne formèe des conjugués d'un element.*

Das können wir nachvollziehen:

Um die Relation
$$q(U_{K_{\mathfrak{P}}}) = 1 \tag{32}$$
zu beweisen, darf $U_{K_{\mathfrak{P}}}$ nach dem Herbrandschen Lemma durch eine Untergruppe von endlichem Index ersetzt werden. Wir ersetzen $U_{K_{\mathfrak{P}}}$ durch die Einseinheitengruppe $U_{K_{\mathfrak{P}}}^{(r)}$ der Stufe r, also die multiplikative Gruppe derjenigen Zahlen $a \in U_{K_{\mathfrak{P}}}$, welche der Kongruenz

$$a \equiv 1 \bmod \mathfrak{P}^r$$

genügen. Wenn r hinreichend groß ist, so ist der p-adische Logarithmus auf $U_{K_{\mathfrak{P}}}^{(r)}$ definiert und stiftet einen Galois-Isomorphismus der multiplikativen Gruppe $U_{K_{\mathfrak{P}}}^{(r)}$ auf die additive Gruppe des Ideals $\mathfrak{P}^r$. Also genügt es, nach dem Herbrandschen Lemma, (32) für $\mathfrak{P}^r$ statt $U_{K_{\mathfrak{P}}}$ zu verifizieren. Nun wähle man eine Normalbasis von $K_{\mathfrak{P}}|k_{\mathfrak{p}}$, sie besteht aus einem Element u und seinen Konjugierten u^τ, $\tau \in G_{\mathfrak{p}}$. Man kann $u \in \mathfrak{P}^r$ annehmen. Betrachte den von u und seinen Konjugierten erzeugten Modul

$$M := \sum_{\tau \in G_{\mathfrak{p}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} u^\tau \tag{33}$$

über dem Ring $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ der ganzen Zahlen aus $k_{\mathfrak{p}}$. Der Index von M in $\mathfrak{P}^r$ ist endlich, also genügt es, nach dem Herbrandschen Lemma, (32) für M statt $U_{K_{\mathfrak{P}}}$ zu verifizieren. Nun hat aber M triviale Kohomologie, also $q(M) = 1$;

das erkennt man aus (33) indem man $H^0(M) = H^1(M) = 0$ direkt bestimmt (oder z.Bsp. unter Anwendung des Lemmas von Shapiro).

Übrigens: Der Satz von der Existenz einer Normalbasis einer Galois-Erweiterung stammt nicht von Deuring, wie Chevalley sagt, sondern er wurde von Emmy Noether bewiesen. Deuring bezieht sich in [Deu32] ausdrücklich auf die Noethersche Arbeit [Noe32], aber er gibt dann einen neuen Beweis, der insbesondere auch den (trivialen) Fall von endlichen Körpern einschließt, der durch die Noethersche Argumentation nicht erfasst wurde.

Zusammenfassung:

Wir haben gesehen, dass durch konsequente Anwendung des Herbrandschen Lemmas einfache Beweise entstehen für folgende Sätze über relativ zyklische Zahlkörper:

- Hassescher Normensatz (Seite 15),
- Hauptgeschlechtssatz (Seite 20),
- „Umkehrsatz“ der Klassenkörpertheorie (Seite 21),
- „Umkehrsatz“ der lokalen Klassenkörpertheorie (Seite 28).

Diese Resultate lassen sich dann *mutatis mutandis* auf relativ abelsche Zahlkörper übertragen. Aber Herbrand geht noch weiter: In seinem vorletzten Brief an Hasse, datiert am 29. Juni 1931 in Göttingen, schreibt er:

> *Seit meinem letzten Brief, sind grosse weitere Vereinfachungen der Klassenkörpertheorie gekommen. Erstatten Sie mir sie Ihnen mitzuteilen.*
>
> *Ich habe den Existenzbeweis völlig umgeformt, und ich zeige gleichzeitig dass das Zerlegungsgesetz wahr ist im Fall des Primzahlgrad, wenn die ℓ^{ten} Einheitswurzeln im Grundkörper sind: der allgemeine Fall des Zerlegungsgesetzes beweist man dann gleichzeitig mit dem Existenzbeweis, mit derselben Rekursion, ohne Schwierigkeiten. . .*[29]
>
> *Es sind das die wichtigsten Vereinfachungen; aber in den Einzelheiten, gibt es noch viel andere Sachen die sehr einfach geworden sind. Die Theorie ist jetzt völlig elementar. . .*

[29]Das hier erwähnte „Zerlegungsgesetz“ der Klassenkörpertheorie beschreibt die Zerlegung der Primideale des Grundkörpers im abelschen Erweiterungskörper. Dies wird präzisiert durch das Artinsche Reziprozitätsgesetz; deshalb ist es nicht erstaunlich, dass wir in diesem Brief in Hasses Handschrift die Randbemerkung finden: *Artins R.G. auch ?*

> *Ich habe mich entschlossen, die Theorie in seiner neuen Form in einer ausführlichen Darstellung zu schreiben, denn alle die Beweise sind jetzt völlig umgeformt.*

Kurz: Herbrand ist dabei, die Klassenkörpertheorie völlig umzukrempeln und auf eine neue Grundlage zu stellen.

7 Danach

Wenn man sich die Klassenkörpertheorie der 1920er Jahre als ein imposantes Gebäude vorstellt, an dem viele Generationen gearbeitet haben, dessen Renovierung aber inzwischen fällig geworden ist – dann erscheint Herbrand als ein junger Architekt, der nach kurzem Augenschein die Notwendigkeiten erkennt und Pläne für eine Erneuerung vorlegt. Er reißt dabei alte Mauern ein, schafft neue Verbindungen und eröffnet hinreißende Ausblicke; er vergisst nicht die Fundamente zu sanieren und auch nicht die attraktive Innenausstattung. Und er beginnt sogleich, seine Pläne umzusetzen. Aber bald verlässt er die Baustelle und hinterlässt viel Unvollendetes. Danach führen die bisherigen Bewohner und Benutzer des Gebäudes seine Arbeiten fort, gelegentlich mit Abweichungen wenn es geraten erscheint, aber insgesamt mit dem Ziel ein vollendetes architektonisches Kunstwerk zu erstellen.

In diesem Bilde sind als „Bewohner“ vornehmlich die Namen Emil Artin, Helmut Hasse und Emmy Noether aktiv, in gewisser Weise auch Claude Chevalley, der jedoch eher zu der jungen Generation zu zählen wäre, und vielleicht als Assistent und Vertrauter des Architekten in dem Bild seinen Platz findet. Ein erheblicher Teil ihrer Arbeiten in den nächsten Jahren ist weiterhin der Klassenkörpertheorie gewidmet, unter Fortführung der Ideen und Visionen des jungen Herbrand.

Es wäre eine interessante Aufgabe, diesen Entwicklungsprozess in der Klassenkörpertheorie im einzelnen zu verfolgen. Dies würde aber hier zu weit führen, da wir uns hier nur die Entstehungsgeschichte und die Wirkungsweise des Herbrandschen Lemmas zum Ziel gesetzt hatten. Immerhin wollen wir auf die folgenden Aktivitäten hinweisen, die im Jahre nach Herbrands Deutschland-Besuch stattfanden:

1. Die **drei Vorträge Artins in Göttingen** vom 29.2. bis 2.3.1932. Artin gab einen Bericht über das neue Gesicht der Klassenkörpertheorie, wie es sich aus den Herbrandschen Resultaten und Ideen zu zeigen begann. Diese Vorträge waren ein besonderes „Event“ (wie man heute sagen würde) und zogen viele Besucher auch von auswärts an. Die Vorträge wurden von Olga

Taussky ausgearbeitet und konnten als vervielfältigte Blätter erworben werden. Erst im Jahre 1978 erschienen sie im Druck, in englischer Übersetzung im Anhang des Buches [Coh78].

2. Die **Marburger Vorlesung von Hasse** über Klassenkörpertheorie im Sommersemester 1932. Dort wurde die Klassenkörpertheorie in ihrer neuen Form *ab ovo* dargestellt, mit allen Beweisen. Auch diese Vorlesungen wurden aufgezeichnet (von Hasses Assistenten Wolfgang Franz), hektographiert und verteilt. Im Jahre 1934 sollten sie, nach einem Plan von Mordell, ins Englische übersetzt werden; als Übersetzer war von Hasse Reinhold Baer vorgeschlagen worden, der damals nach Manchester emigriert war. Aber (aus uns unbekannten Gründen) konnte das nicht realisiert werden. Erst im Jahre 1967 erschienen die Marburger Vorlesungen in Buchform [Has67].

3. Über das **Artinsche Reziprozitätsgesetz**: Auf Seite 29 haben wir aus Herbrands Brief vom 29.6.1931 zitiert, wobei Herbrand auf seine Vereinfachungen für das „Zerlegungsgesetz“ zu sprechen kam. Dort haben wir in Fußnote 29 erwähnt, dass Hasse auf den Rand des Briefes die Frage notiert hat: „*Artins Reziprozitätsgesetz auch?*“

Offenbar hatte Hasse diese Frage auch an Herbrand geschrieben, denn in seiner Antwort am 23.7.1931 (seinem letzten Brief an Hasse) schreibt dieser:

> *Ich habe auch gesucht ob es möglich ist das Artin'sche Reciprocitätsgesetz in der Rekursion des Existenzsatz einzuführen. Es muss ohne Schwierigkeit möglich sein, aber es ist nicht vorteilhaft, denn bisher haben wir für dieses Gesetz im Fall des Primzahlgrad (mit den Einheitswurzeln im Grundkörper), keinen Beweis der einfacher ist als derjenige von Artin im allgemeinen Fall.*

Dennoch gelang es Hasse im Frühjahr 1932, einen neuen Beweis des Artinschen Reziprozitätsgesetzes für relativ zyklische Körper $K|k$ zu finden, der sich mühelos in die Herbrandsche Linie einordnen lässt. Das ist durchgeführt in seiner Arbeit [Has33a], die er Emmy Noether zu ihrem 50. Geburtstag am 23.März 1932 gewidmet hat. In der Einleitung verweist Hasse direkt auf den Chevalley-Herbrandschen Beweis des Normensatzes mit den „neuen Vereinfachungen“. Das Artinsche Reziprozitätsgesetz kann nun nach Hasse als Produktformel für sein Normsymbol geschrieben werden;

$$\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{a, K|k}{\mathfrak{p}} \right) = 1 \qquad \text{für } a \in k^{\times} .$$

4. Zur **Normenresttheorie galoisscher Zahlkörper.** Diese wichtige Arbeit von Hasse [Has34a], für beliebige relativ Galoissche Körper, basiert direkt auf der Herbrandschen Arbeit [Her31b] über eine neue Zählung der Verzweigungsgruppen. Vorankündigung erschien 1933 in [Has33b].

8 Anhang

In diesem Anhang publizieren wir (ohne Kommentare) zwei bisher offenbar unbekannte Briefe an Chevalley, einen aus Hamburg von Artin und einen aus Göttingen von Emmy Noether. Es handelt sich um den wissenschaftlichen Nachlass von Herbrand.

8.1 Artin an Chevalley

Hambourg, le 7 août 1931 . Cher Monsieur Chevalley,

Hier matin j'ai reçu la nouvelle désolante de la mort de M. Herbrand. Nous connaissons tous deux la perte enorme que subit notre science et la pensée à son séjour à Hambourg me semplit avec tristesse. Il ne se passait pas un jour que nous n'étions pas ensemble et que nous ne parlions pas de nos problèmes. C'était un plaisir de travailler avec lui.

Il nous a laissé un travail ,,Sur les Théorèmes du genre principal et des idéaux principaux", qu'il a voulu publier a Hambourg dans les Hamburger Abhandlungen. Il paraîtra dans le prochain cahier. Je lirai les épreuves. Mais à part cela, je ne possède aucun manuscript. Dans une seule lettre il m'a parlé d'une nouvelle méthode de démontrer le théorème du Einheitenhauptgeschlecht. Mais plus tard il a retiré cette idée et je ne crois non plus que ce chemin puisse conduire au but. Donc, je n'ai rien que je puisse vous envoyer.

Mais il m'a communiqué ses idées concernant la simplification de la théorie des corps de classe, et c'est le sujet sur lequel nous avons travaillé ensemble. Probablement il vous en a raconté. Il a voulu publier à Hambourg un mémoire sur la théorie des corps de classe, mais il n'a plus pu commencer ce travail. Connaissant très bien sa disposition de ce mémoire (nous avons beaucoup parlé de cela), je vous propose que je le publierai en son nom, c'est à dire que ce mémoire paraîtra comme travail commun de lui et de moi.

Mais il y a une autre difficulté. Je sais, que c'est vous qui lui avez suggeré les démonstrations des Théorèmes du Einheitenhauptgeschlecht et des Normenreste. Puis il a trouvé un théorème de la théorie des groupes, qui permet de démontrer tous les deux théoremes. Ce théorème c'est la géneralisation de votre méthode. Quant à moi j'y ai seulement contribué de simples démonstrations de son théorème sur les unités, et de la base des nombres p-adiques. Il m'a dit que vous préparez votre thèse et que vous voulez prendre comme sujet vos démonstrations de ces théorèmes et votre nouvelle et intéressante demonstration du théorème d'éxistence. Donc il est nécessaire, que votre thèse paraît avant le mémoire. Quand aurez – vous achevé votre thèse

Vous connaissez les contributions de M. Herbrand à la théorie des corps de classes:

1.) Son théorème sur les groupes et les démonstrations du Théorème de l'Einheitenhauptgeschlecht et des Normenreste.

2.) Son démonstration nouvelle du théorème d'éxistence et du théorème de la décomposition des idéaux premiers. C'est le point que j'admire le plus.

3.) Nouvelle détermination des conducteurs. Un croquis de cette démonstration se trouve dans le travail qui paraîtra dans les Hamburger Abhandlungen.

Mes contributions à la théorie sont négligeables:

1.) Autre arrangement de la partie analytique, ce qui permet de démontrer d'abord le Umkehrsatz pout tout corps abélien sans faire usage de l'existence.

2.) Simplifications déjà mentionneés.

3.) Quelques simplifications de son théorème d'éxistence et de decomposition, qui permettent de ne pas faire usage de la détermination du conducteur au cas ℓ.

M. Herbrand m'a aussi parlé de la Rockefellerstiftung. N'avez vous pas envie d'essayer encore une fois de recevoir une bourse? Je pourrais écrire à la Rockefellerstiftung. M. Herbrand, vous a-t-il parlé de cela?

Agréez Monsieur, l'expression de mes sentiments devoués,
Artin .

Si vous n'êtes pas d'accord avec mes propositions, écrivez moi vos projets s'il vous plait.

8.2 Emmy Noether an Chevalley

Göttingen, 12/12.31. Lieber Herr Chevalley!

Die Korrekturbogen von Herbrand habe ich, mit paar Erinnerungsworten versehen, an Blumenthal weitergelassen. Ich habe noch die inzwischen erschienene Arbeit von Deuring zitiert; die Anmerkungen [16)] und [18)] füllen Sie wohl bei der zweiten Korrektur aus, und lassen diese auch wieder an mich gehen, nicht an Blumenthal direkt.

Es ist schön, daß Sie die Konzepte zum zweiten Teil gefunden haben!

Dagegen tut es mir sehr leid, daß sich über die algebr. Funktionenkörper garnichts finden ließ; das Resultat scheint doch sehr wichtig zu sein! Auch mit Schmidt - Erlangen hat Herbrand nicht über die Sachen gesprochen; wohl aber hatte er mit Schmidt besprochen, daß sie sich gegenseitig die Manuskripte der ,,Klassenkörpertheorie im Kleinen" schicken wollten. Ich möchte Sie daher bitten, einen Manuskriptdurchschlag an Schmidt zu schicken, der sein Manuskript jetzt fertig stellt; er hat mir noch neulich deshalb geschrieben.

Ich dachte daran die beiden Briefstellen in den Annalen zu publizieren, und hätte daher gern die Briefe zurück – oder we[nig]stens jeweils den Schluß wenn Ihnen das andere für die unendlichen Körper nützlich ist. Vielleicht könnten Sie aber vorher eine Abschrift an André Weil schicken; ich halte es nicht für ausgeschlossen, daß Herbrand im Sommer mit ihm über die Sache gesprochen hat. Sie waren viel zusammen, und Weil interessiert sich ja für solche Fragen. Vielleicht finden Sie auch doch noch etwas im Nachlaß!

Von den hyperkomplexen Sachen, über die Sie gearbeitet haben, ist uns hier in Göttingen allerhand bekannt. Ein Schüler von mir, Fitting – er hat auch in Marburg vorgetragen – hat im Anschluß an seine Dissertation über Automorphismenringe verallgemeinerter Gruppen die Idealtheorie in Ordnungen ziemlich weit entwickelt. Er zerlegt allgemein die einseitigen Ideale in primäre, was noch in verschiedene Abstufungen zerfällt, und hat auch den Satz über die Korrespondenz der zum Führer teilerfremder Ideale. Er macht jetzt erst den Automorphismenring zum Druck fertig, dann kommt das andere. Die Zerlegung in Primärideale steht aber schon in der Dissertation; wenn ein Durchschlag von Hasse zurück kommt, können Sie ihn haben.

Im Fall der zyklischen – nicht der allgemeinen abelschen – Körper läßt sich das Normenrestsymbol sehr einfach hyperkomplex definieren: das habe ich mir anläßlich meines diesjährigen Seminars (Klassenkörpertheorie im Kleinen u.s.w.) überlegt, es folgt fast unmittelbar aus Hasse, zykl. Algebren, Gött. Nachr. 1931.

Sei $A = (\beta, Z, S)$ in der dortigen Bezeichnung das verschränkte Produkt von Z/k (wo Z *zyklisch*) mit seiner Gruppe, und der *erzeugenden* Substitution S dieser Gruppe; sei weiter $A_\mathfrak{p}$ die $\mathfrak{p}$-adische Erweiterung von A. Sei r die Invariante von $A_\mathfrak{p}$ nach Hasse, Schiefkörper, also Invariante der zugehörigen Divisionsalgebra D; multipliziert mit Grad des Matrizenrings über D. (Etwas allgem. als bei Hasse). Sei $e \cdot f$ der Grad der Zerlegungsgruppe also $n = g \cdot e \cdot f$; Dann setze ich:

$$\left(\frac{\beta, Z}{\mathfrak{p}}\right) = S^{(g \cdot r)}.$$

Diese Definition ist invariant: Sei $\overline{S}$ eine andere erzeugende Substitution; $\overline{S} = S^h$ mit $(h, n) = 1$: dann kommt: $A = (\beta^h, Z, \overline{S})$; also $\overline{A} = (\beta, Z, \overline{S}) = A^{\overline{h}}$

mit $h\overline{h} \equiv 1\,(n)$ (Potenzen von A bedeuten direktes Produkt). Somit kommt für die Invariante: $\overline{r} = r\overline{h}$ ($\leftarrow$ Letztes Kapitel meiner an Artin geschickten Vorlesung) und damit:

$$\overline{S}^{g\overline{r}} = S^{hgr\overline{h}} = S^{gr}.$$

Aus dieser Definition folgen sofort die Sätze: β dann u. nur dann $\mathfrak{p}$-ad. Norm, wenn

$$\left(\frac{\beta, Z}{\mathfrak{p}}\right) = 1; \quad \left(\frac{\beta_1, Z}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\beta_2, Z}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\beta_1\beta_2, Z}{\mathfrak{p}}\right)$$

nach dem Produktsatz für Faktorensysteme und die Sätze für Unterkörper. Was fehlt ist das Reziprozitätsgesetz (Produktformel). Es scheint mir fast daß Ihre Definition komplizierter ist. Übrigens schrieb mir im Fall des Hilbertschen Normenr.symb. Deuring schon im Sommer, daß er eine hyperk. Definition – wohl dieselbe?, – hätte.

Beste Grüße Ihre Emmy Noether.

Literatur

[Art32] E. Artin. Über die Einheiten relativ galoisscher Zahlkörper. *J. Reine Angew. Math.*, 167:153–156, 1932. 12, 25

[BHN32] R. Brauer, H. Hasse, and E. Noether. Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren. *J. Reine Angew. Math.*, 167:399–404, 1932. 5

[Che33] C. Chevalley. Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect. I 2:365–476, 1933. 17

[Che35] C. Chevalley. Sur la pensée de J. Herbrand. *Enseignement math.*, 34:97–102, 1935.

[Che36] C. Chevalley. Généralisation de la théorie du corps de classes pour les extensions infinies. *J. Math. pur. appl. (9)*, 15:359–371, 1936. 18

[CL71] C. Chevalley and A. Lautmann. Biographical Note on Jacques Herbrand. In W. D. Goldfarb., editor, *Logical writings.*, pages 21–23. D. Reidel Publishing Company., 1971. 4

[Coh78] H. Cohn. *A classical invitation to algebraic numbers and class fields. With two appendices by Olga Taussky: "Artin's 1932 Göttingen lectures on class field theory" and "Connections between algebraic number theory and integral matrices."*. Universitext. Springer–Verlag, New York – Heidelberg – Berlin, 1978. XIII, 328 pp. 31

[Deu32] M. Deuring. Galoissche Theorie und Darstellungstheorie. *Math. Ann.*, 107:140–144, 1932. 29

[Die82] Jean Dieudonné. Jacques Herbrand et la théorie des nombres. In *Logic colloquium 1981, Proc. Herbrand Symp., Marseille 1981*, volume 107 of *Stud. Logic Found. Math.*, pages 3–7, 1982. 4

[Dub83] P. Dubreil. Souvenirs d'un boursier Rockefeller 1929-1931. *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques.*, 4:61–73, 1983. 7

[FLR14] G. Frei, F. Lemmermeyer, and P. Roquette, editors. *Emil Artin and Helmut Hasse. Their correspondence 1923-1958. English version, revised and enlarged.*, volume 5 of *Contributions in Mathematical and Computational Science.* Springer Basel, 2014. X + 484 pp. 4

[FR08] G. Frei and P. Roquette, editors. *Emil Artin and Helmut Hasse. Their correspondence 1923-1934. With contributions of Franz Lemmermeyer and an introduction in English.* Universitäts–Verlag, Göttingen, 2008. 497 pp. 4

[Has26] H. Hasse. Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. I: Klassenkörpertheorie. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 35:1–55, 1926. 5, 21

[Has27] H. Hasse. Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. Teil Ia: Beweise zu I. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 36:233–311, 1927. 5

[Has30a] H. Hasse. Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. II: Reziprozitätsgesetz. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 6(Ergänzungsband), 1930. IV + 204 pp. 5

[Has30b] H. Hasse. Die Normenresttheorie relativ–Abelscher Zahlkörper als Klassenkörpertheorie im Kleinen. *J. Reine Angew. Math.*, 162:145–154, 1930. 5, 26

[Has31] H. Hasse. Beweis eines Satzes und Widerlegung einer Vermutung über das allgemeine Normenrestsymbol. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.–Phys. Kl. I*, pages 64–69, 1931. 16

[Has33a] H. Hasse. Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper. Insbesondere Begründung der Theorie des Normenrestsymbols und Herleitung des Reziprozitätsgesetzes mit nichtkommutativen Hilfsmitteln. *Math. Ann.*, 107:731–760, 1933. 31

[Has33b] H. Hasse. Théorie des restes normiques dans les extensions galoisiennes. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 197:469–471, 1933. 32

[Has33c] H. Hasse. Vorlesungen über Klassenkörpertheorie. Preprint, Marburg. [Later published in book form by Physica Verlag Würzburg (1967)], 1933. 27

[Has34a] H. Hasse. Normenresttheorie galoisscher Zahlkörper mit Anwendungen auf Führer und Diskriminante abelscher Zahlkörper. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect. I vol. 2, Part 10:477–498, 1934. 31

[Has34b] H. Hasse. Über gewisse Ideale in einer einfachen Algebra. (Exposés mathématiques, publiés à la mémoire de Jacques Herbrand, I.). *Actual. Sci. Ind.*, 1934(109):12–16, 1934. 12

[Has66] H. Hasse. Geschichte der Klassenkörpertheorie. *Jahresber. Dtsch. Math. Ver.*, 68:166–181, 1966. 20

[Has67] H. Hasse. *Vorlesungen über Klassenkörpertheorie.* Physica–Verlag, Würzburg, 1967. 275 pp. 31

[Her30] J. Herbrand. Nouvelle démonstration et généralisation d'un théorème de Minkowski. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 191:1282, 1930. 4

[Her31a] J. Herbrand. Sur la théorie des corps de nombres de degré infini. *C. R. Acad. Sci.*, 193:504–506, 1931. 7

[Her31b] J. Herbrand. Sur la théorie des groupes de décomposition, d'inertie et de ramification. *Journ. de Math. (9)*, 10:481–491, 1931. 32

[Her31c] J. Herbrand. Sur les unités d'un corps algébrique. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 192:24–27, 188, 1931. 4, 6, 24

[Her32a] J. Herbrand. Sur les théorèmes du genre principal et des idéaux principaux. *Abhandl. Math. Sem. Hamburg*, 9:84–92, 1932. 10

[Her32b] J. Herbrand. Théorie arithmétique des corps de nombres de degré infini. I. Extensions algébriques finies de corps infinis. *Math. Ann.*, 106:473–501, 1932. 7

[Her33a] J. Herbrand. Sur la non-contradiction de l'arithmétique. *J. Reine Angew. Math.*, 166:1–8, 1933. 7, 8

[Her33b] J. Herbrand. Théorie arithmétique des corps de nombres de degré infini. II. Extensions algébriques de degré infini. *Math. Ann.*, 108:699–717, 1933. 7

[Her35] J. Herbrand. *Le développement moderne de la théorie des corps algébriques; corps de classes et lois de réciprocité.* Mem. Sci. Math. 75. Gauthier–Villars, Paris, 1935. 72 pp. 10, 27

[Iya06] S. Iyanaga. Travaux de Claude Chevalley sur la théorie du corps de classes: Introduction. *Japan J. Math.*, 1:25–85, 2006. 18

[Noe32] E. Noether. Normalbasis bei Körpern ohne höhere Verzweigung. *J. Reine Angew. Math.*, 167:147–152, 1932. 29

[Rei07] K. Reich. Artin in Hamburg 1922–1937. In Karin Reich and Alexander Kreuzer, editors, *Emil Artin (1898–1962). Beiträge zu Leben, Werk und Persönlichkeit.*, pages 41–98. Dr. Erwin Rauner Verlag, Augsburg, 2007. 2

[Roq05] P. Roquette. *The Brauer-Hasse-Noether Theorem in historical perspective.*, volume 15 of *Schriftenreihe der Heidelberger Akademie der Wissenschaften.* Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2005. I, 77 pp. 5

[Ste30] E. Steinitz. *Algebraische Theorie der Körper. Neu herausgegeben, mit Erläuterungen und einem Anhang: Abriß der Galoisschen Theorie versehenen von R. Baer und H. Hasse.* de Gruyter–Verlag, Berlin, 1930. 177 pp. 7

[Wir12] Claus-Peter Wirth. Herbrand's fundamental theorem in the eyes of Jean van Heijenoort. *Log. Univers.*, 6(3-4):485–520, 2012. 4, 12