Vorwort zur Ausarbeitung der Vorlesung [1])

Erich Hecke, Analysis und Zahlentheorie

gehalten in Hamburg 1920/1921

von Peter Roquette

Im Jahre 1956 erhielt ich von Herrn B. Schoeneberg ein kleines Heft aus dem Nachlaß von Erich Hecke. Es enthielt die handschriftliche Aufzeichnung einer Vorlesung, die Hecke 1920 an der Universität Hamburg gehalten hatte. Der Titel jener Vorlesung war in der Aufzeichnung nicht vermerkt; aus dem Inhalt war jedoch zu entnehmen, daß es sich um das Zusammenspiel von Analysis und Zahlentheorie handelt; ein Thema, das schließlich das gesamte wissenschaftliche Werk von Hecke geprägt hat.

Ich selbst war damals, als ich das Heft bekam, gerade als junger Privatdozent nach Hamburg gekommen. Ich hatte meine ersten Vorlesungen zu halten und stand dabei zum ersten Mal vor den Problemen, die mit der Konzeption einer mathematischen Vorlesung verbunden sind. Die Weitergabe und Vermittlung unserer Wissenschaft vollzieht sich ja in einer Vorlesung nach anderen Gesichtspunkten als etwa durch ein Lehrbuch oder durch eine wissenschaftliche Publikation, denn im Hörsaal spielt das gesprochene Wort und der persönliche Kontakt des Dozenten zum Auditorium eine wichtige Rolle.

Natürlich hatte ich als Student bei meinen akademischen Lehrern auch die Kunst der Vorlesung beobachten und studieren können, insbesondere bei Helmut Hasse, dessen Vorlesungen immer ein besonderes Erlebnis darstellten. Aber erst angesichts der Notwendigkeit, selbst eine Vorlesung halten zu müssen, wurde es mir deutlich, daß es dabei keine universell gültigen besten Methoden gibt, die jeder anzustreben hätte, sondern daß jeder einzelne wohl seinen eigenen Stil und die ihm persönlich angemessenen Formen finden müsse, die er im Hörsaal mit einiger Wirkung einsetzen kann. Auf der Suche nach einem „eigenen Stil“ wollte ich natürlich gerne wissen, wie denn die großen Meister unserer Wissenschaft sich dieser Aufgabe gestellt hatten, auch diejenigen, die ich nicht mehr selbst im Vortrag habe hören können.

Deshalb kam mir die freundliche Vermittlung der Heckeschen Vorlesung durch Herrn Schoeneberg sehr gelegen; Hecke galt ja als ein „Meister in der Kunst des Vortrags“. [2]) Ich habe diese Vorlesungsausarbeitung mit Interesse studiert. Die Ausarbeitung hat weitgehend den ursprünglichen Vorlesungscharakter bewahrt, der geprägt ist durch den persönlichen Vortragsstil; in den ersten beiden Teilen finden sich sogar Datumsangaben, aus denen das jeweilige Tagespensum der Vorlesung zu entnehmen ist. Wir finden hier also noch nicht die

[1]) Dokumente zur Geschichte der Mathematik, Band 3, hrsg. im Auftrag der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von Winfried Scharlau. Vieweg (1987)

[2]) Zitiert nach J. Nielsen, *Rede zum Gedächtnis an Erich Hecke.* Diese Rede ist enthalten in einer vom Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 1947 herausgegebenen hektographierten Broschüre mit dem Titel: *Reden gehalten zum Gedächtnis an Erich Hecke.* Die Broschüre enthält außerdem Reden von H. Bohr, W. Maak und H. Zassenhaus. Die Rede von Nielsen ist übrigens auch abgedruckt in Heckes Gesammelten Werken, S.18-20; die Rede von Maak findet sich in den *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, Bd.16.

fertige, für eine Publikation aufgearbeitete Form des Heckeschen Zahlentheorie-Buches, das zwar den Titel „Vorlesungen“ trägt, aber nach Form, Inhalt und Konzeption eben doch als ein Lehrbuch gemeint ist.

* * *

Die Hamburger Vorlesungsausarbeitung gliedert sich in 3 Teile, nämlich:

I. Die Rolle der Exponentialfunktion in der Arithmetik.

II. Die elliptischen Modulfunktionen in der Arithmetik.

III. Die klassische Theorie der Dedekindschen Zetafunktion und die Bestimmung der Klassenzahl.

Von den Teilen I und III finden sich längere Passagen in dem bereits erwähnten späteren Lehrbuch von Hecke. Dagegen hat Hecke den Teil II, der sich mit der Theorie der komplexen Multiplikation befaßt, nicht in das Buch aufgenommen. Die Gründe dafür sind uns nicht bekannt. Vielleicht lag die Theorie der komplexen Multiplikation noch nicht in einer solch fertigen Form vor, wie es Hecke für eine Lehrbuchdarstellung erforderlich erschien. In der Tat hat er sich ja in seinen eigenen Forschungsarbeiten viel damit beschäftigt, eine der komplexen Multiplikation analoge Theorie auch für andere als imaginär-quadratische Grundkörper zu entwickeln.

Es war nun gerade dieses Kapitel II, das mich 30 Jahre später wieder zu dem Heft mit der Heckeschen Vorlesung greifen ließ. Der Anlaß dazu ergab sich aus meiner Beschäftigung mit dem Nachlaß von Helmut Hasse, und dabei mit Hasses richtungweisenden Arbeiten zur komplexen Multiplikation. Ich erinnerte mich, daß ja auch in der Heckeschen Vorlesungsausarbeitung ein Kapitel über komplexe Multiplikation enthalten war.

Es erschien mir durchaus möglich, daß Hasse z.Bsp. während seiner Zeit als Privatdozent in Kiel 1922–1925 Kenntnis von der Ausarbeitung erhalten hatte. Ob das wirklich der Fall war, konnte ich zwar nicht einwandfrei feststellen. Aus dem Briefwechsel zwischen Hecke und Hasse, soweit er uns vorliegt, ist ersichtlich, daß zwischen beiden ein enger wissenschaftlicher und persönlicher Kontakt bestand; vielleicht schon zu Hasses Kieler Zeit, mit Sicherheit jedoch in den folgenden Jahren. Immer wieder geht es in den Briefen um Fragen der komplexen Multiplikation und es ist offensichtlich, daß Hasse bei seinen diesbezüglichen Arbeiten in starkem Maße durch Hecke beeinflußt und bestärkt wurde. [3]) Es liegen jedoch keine definitiven Anzeichen dafür vor, daß Hasse die Hamburger Ausarbeitung der Heckeschen 1920er Vorlesung wirklich gekannt hat. [4])

Was ich jedoch feststellen mußte, war der schlechte äußere Zustand meines Exemplars des Heckeschen Vorlesungsmanuskripts. Im Laufe der Zeit war das Papier brüchig und die Schrift an vielen Stellen verblaßt und unleserlich geworden. Es war klar, daß nach wenigen Jahren diese Ausarbeitung nicht mehr

[3]) Hecke wurde von Hasse stets als einer der beiden für seine eigene Entwicklung wichtigsten akademischen Lehrer betrachtet. (Der andere war Kurt Hensel.) Vgl. C. Meyer, *Automorphe Funktionen und Zahlentheorie*, Mitt. Math. Ges. Hamburg 11 (1982) 77-98.

[4]) Im Sommersemester 1920 war Hasse bereits in Marburg immatrikuliert, er hat also die Hamburger Vorlesung von Hecke mit Sicherheit nicht selbst gehört. Ein Jahr vorher jedoch, im Sommersemester 1919, hatte Hasse in Göttingen die Vorlesungen von Hecke über Zahlentheorie und über elliptische Funktionen belegt; vgl. dazu G. Frei, *Helmut Hasse*, Expositiones Math. 3 (1985) 55-69.

zu lesen sein würde; wenn sie für spätere Mathematikergenerationen zugänglich bleiben sollte, so mußte sie bald neu abgeschrieben werden. Zwar enthält die Vorlesungsausarbeitung vom mathematischen Inhalt her keine besonderen Neuigkeiten oder Überraschungen; aus den o.g. Gründen erschien es mir aber wünschenswert, sie als ein Dokument über den *Vorlesungsstil* von Hecke zu bewahren.

Herr Scharlau, dem ich diesen Sachverhalt geschildert hatte, zeigte Interesse daran, die Heckesche Vorlesungsausarbeitung in die von ihm herausgegebene DMV-Buchreihe „Dokumente zur Geschichte der Mathematik" aufzunehmen.

So bin ich also dazu gekommen, eine Vorlesung von Hecke herauszugeben, obwohl ich Hecke selbst nicht mehr habe hören können.

* * *

Aus dem Vorlesungsverzeichnis der Universität Hamburg des Jahres 1920 ergibt sich, daß Hecke seine Vorlesung unter dem Namen:

Anwendung der Analysis auf Zahlentheorie

angekündigt hat. Sehr wahrscheinlich wurde dieser Titel in Anlehnung an den Titel von Dirichlets großer Arbeit:

Recherches sur diverses applications de l'Analyse
infinitésimale à la Théorie des Nombres

im Crelleschen Journal (Bde.19 und 21) gewählt. [5])

Es ist schwierig, abzuschätzen, an welche Art von studentischen Hörern sich Hecke in dieser Vorlesung wandte. Explizit wird in der Einleitung gesagt, daß bei dem Hörer die Bekanntschaft mit den Grundzügen der *Theorie der elliptischen Funktionen* vorausgesetzt wird; ebenso die Elemente der *Theorie der algebraischen Zahlkörper*. Für die letzteren werden zu Beginn der Vorlesung die grundlegenden Begriffe und Sätze zusammengestellt; für die Beweise wird auf den Zahlbericht von Hilbert verwiesen sowie auf Band III des Weberschen Algebra-Lehrbuches.

Legen wir unsere heutigen Maßstäbe an, so würden wir sagen, daß sich die Vorlesung nicht an Durchschnitts-Studenten gewendet haben kann; nur von den besonders interessierten und engagierten Mathematikstudenten ist zu erwarten, daß sie Hilbert oder Weber III gelesen haben oder lesen, und daß sie sich sowohl in Funktionentheorie als auch in algebraischer Zahlentheorie gut auskennen.

Vielleicht sollen und können wir jedoch nicht die Verhältnisse an unseren heutigen Universitäten, mit ihrem Massenunterricht in Mathematik, vergleichen mit den Verhältnissen vor 65 Jahren. Mathematik als eigenständige Disziplin (abgesehen von ihrer Rolle als Hilfswissenschaft für Physik, Technik und Wirtschaft) galt damals als ein *Bildungsfach*; ein Berufsziel als Mathematiker außerhalb der Hochschule oder des Gymnasiums war praktisch nicht vorhanden (es gab noch kein Mathematik-Diplom). Wer sich damals als Mathematikstudent einschrieb, bei dem konnte man wohl besonderes Interesse und Engagement für diese Wissenschaft voraussetzen.

Demnach kann angenommen werden, daß damals auch der „Durchschnittsstudent" sich sowohl in Funktionentheorie als auch in algebraischer Zahlentheorie ausgekannt hat, jedenfalls so weit, daß er der Heckeschen Vorlesung

[5]) Nach Mitteilung von Herrn Schoeneberg.

im Prinzip hätte folgen können. Aber solche Studenten fanden sich doch wohl nur an denjenigen Universitäten, die eine längere mathematische Tradition in der studentischen Ausbildung aufweisen konnten, vielleicht in Göttingen, oder Berlin, Königsberg etc. Die Hamburgische Universität war dagegen im Jahre 1920 noch jung, eben erst gegründet; Hecke war einer der ersten dorthin berufenen Mathematiker und konnte nicht erwarten, daß er in Hamburg bereits eine in Mathematik gut ausgebildete Studentenschaft vorfand.

So hat die Heckesche Hamburger Vorlesung 1920 wohl vornehmlich einen *programmatischen* Charakter gehabt: als die Vorstellung einer mathematischen Disziplin, die in Hamburg eben noch nicht vertreten war, und für die Hecke sozusagen werben wollte.

Demgemäß wird die Hörerschaft wohl nur relativ klein gewesen sein. Sicherlich befand sich J. Nielsen unter den Hörern, denn dieser war, wie er sagt, Hecke nach Hamburg gefolgt und dort „*in den folgenden Jahren Zeuge des Aufblühens der Mathematik an der neuen Universität.*“ [6]) Mit einiger Wahrscheinlichkeit dürfen wir H. Behnke unter der Hörern vermuten, vielleicht auch A. Ostrowski und K. Reidemeister. [7])

* * *

Schon die weitgespannte Einleitung, vorgetragen am 4. Mai 1920, zeigt, daß Hecke bei seinen Hörern einen ziemlich weiten mathematischen Horizont voraussetzt. Er schildert die Entwicklung der Funktionentheorie, die von dem Studium spezieller Funktionen ausging und sich daraus zu einer Theorie von allgemeinen *Funktionenklassen* entwickelt hat. Er schlägt die Brücke zwischen mathematischer Physik und Zahlentheorie als den beiden Quellen, die der Funktionentheorie ihren Vorrat an speziellen, „bekannten“ Funktionen liefern und damit die Problemstellungen und die Entwicklungsrichtung der Analysis bestimmen.

Für die Funktionentheorie, so sagt Hecke, ist die Zahlentheorie unentbehrlich; umgekehrt zieht aber auch die Zahlentheorie Nutzen aus der Verbindung mit der Funktionentheorie.

Und damit kommt er zu dem eigentlichen Thema der Vorlesung, nämlich der Rolle von speziellen Funktionen in der Zahlentheorie. Die drei Funktionen, die im Blickpunkt dieser Vorlesung stehen und deren zahlentheoretische Bedeutung je in den drei o.g. Kapiteln besprochen werden, sind:

I. die Exponentialfunktion $e^{2\pi iz}$ mit den ganzen Zahlen als Perioden; die Werte dieser Funktion an den „singulären“ Stellen $z = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ führt zur Erzeugung der absolut abelschen Körper;

II. die elliptische Modulfunktion $j(\tau)$, die gegenüber der Modulgruppe invariant ist; hier führen die „singulären“ Werte zur Erzeugung abelscher Erweiterungskörper von imaginär-quadratischen Körpern;

III. die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$ und ihre Verallgemeinerung $\zeta_k(s)$ im Sinne von Dedekind, für einen algebraischen Zahlkörper k. Die Untersuchung dieser Funktion an der „singulären“ Stelle $s = 1$ führt zu den Formeln zur Berechnung der Klassenzahl von k. Hecke betont, daß das

[6]) loc.cit.[2])

[7]) Vgl. H.Behnke, *Semesterberichte*, Vandenhoeck und Ruprecht 1978, S.46 und 53.

> Studium der Dedekindschen Zetafunktionen $\zeta_k(s)$ *mit innerer Notwendigkeit* auf die Exponential- und Modulfunktionen in I. und II. hinführt; die letzteren sind also auch von der Arithmetik her zu gewinnen und verdanken ihr Dasein nicht nur einem funktionentheoretischen Zufall.

Es ist nun nicht meine Absicht, hier eine ins einzelne gehende Besprechung der Heckeschen Vorlesungsausarbeitung in ihren drei Teilen zu geben. Der Leser wird sich nach einer Orientierung anhand des Inhaltsverzeichnisses direkt die ihn interessierenden Abschnitte ansehen; es ist durchaus möglich, die Lektüre irgendwo zu beginnen, auch ohne daß man die vorangehenden Ausführungen alle kennt. Im folgenden sollen lediglich einige Beobachtungen und Überlegungen geschildert werden, die uns bei der Arbeit an der Herausgabe des Manuskripts gekommen sind.

* * *

Der oben erwähnte programmatische Charakter der Vorlesung äußert sich nicht nur in der Auswahl des Stoffes, sondern auch in der Art der Darstellung. An vielen Stellen der Vorlesung finden wir, daß die Beweise nicht in voller Allgemeinheit geführt werden, sondern nur in besonderen Spezialfällen.

Betrachten wir zum Beispiel die Diskussion der abelschen Körper in Teil I. Diese wird in den wesentlichen Teilen fast ausschließlich auf *zyklische* Körper beschränkt, und auch dort meist nur auf den Fall eines Körpers von *Primzahlgrad* ℓ; oft genug wird dabei angenommen, daß der Körper *zahm verzweigt* ist (wie man heute sagen würde), daß also ℓ nicht in der Diskriminante des Körpers aufgeht; dann manchmal noch zusätzlich, daß die *Diskriminante nur einen einzigen Primteiler* p besitzt, d.h. der zu untersuchende Körper ist enthalten im Körper der p-ten Einheitswurzeln. Und manchmal wird zur Illustration angenommen, daß $\ell = 3$.

Die Methode des Beweises allgemeiner Sätze anhand von Spezialfällen ist ein bewährtes didaktisches Hilfsmittel, um dem Hörer die wesentlichen Gedanken und Einsichten auch ohne einen zu umfangreichen Begriffsapparat vermitteln zu können. Heute ist diese Methode etwas in Mißkredit geraten, aber in früherer Zeit wurde sie oft und mit Selbstverständlichkeit verwendet.

Uns will es heute scheinen, daß es Hecke ohne größere Mühe möglich gewesen wäre, die Diskussion auf allgemeinerem Niveau zu führen. Offenbar hat Hecke jedoch keinen Wert darauf gelegt; es war sein Ziel, dem Hörer in anschaulicher und konkreter Form über die Problemstellungen und ihre möglichen Lösungen zu berichten. Das bedeutete natürlich eine besondere Anforderung an den Hörer, aber wohl auch Ansporn: der Hörer mußte sich nämlich aufgrund der in der Vorlesung gegebenen Anregungen dann selbständig mit der Literatur bekanntmachen und viel Eigeninitiative aufwenden, um die allgemeinen Gesetzmäßigkeiten aus den von Hecke vorgeführten Spezialfällen abzuleiten. Für den, der sich diesen Anforderungen stellte, konnte das einen größeren Gewinn bedeuten als das Hören einer polierten und systematisch aufgearbeiteten Vorlesung, bei welcher die Rolle des Hörers ja zunächst nur passiv sein kann.

Wir können dabei annehmen, daß diese Unterrichtsmethode, nämlich die Betonung der Diskussion von Spezialfällen ohne dabei die allgemeinen Gesetzmäßigkeiten aus den Augen zu verlieren, durchaus Heckes eigener Denkungsart entsprach. Maak berichtet von Heckes „Abneigung gegenüber zu weit getriebener

Eleganz in der Mathematik, und seiner Abneigung gegenüber der reinen Axiomatik.“ [8]) Diese kommt ja auch in Heckes mathematischen Publikationen zum Vorschein: auch dort geht er (oft nach einer großartigen Einleitung allgemeiner Natur) meist von Spezialfällen aus und bringt sorgfältig ausgesuchte Beispiele. Die Heckesche Unterrichtsmethode war also nicht ein von ihm kunstvoll angewandtes didaktisches Hilfsmittel, sondern nur auf diese Weise konnte er den Hörern sein eigenes, persönliches Engagement für das ihm vorrangig am Herzen liegende mathematische Gebiet nahebringen, nämlich das *Grenzgebiet zwischen Analysis und Zahlentheorie*. Dieser Fähigkeit, in der Vorlesung sein eigenes Engagement für die Sache zum Ausdruck zu bringen und sie auf die Hörer zu übertragen, ist wohl der Erfolg der Heckeschen Wirksamkeit in Hamburg zu einem guten Teil zu verdanken.

Die Übermittlung des mathematischen Wissens vom Lehrer an den Schüler ist, wie Maak sagt, „*das Fluidum, durch das der Lehrer dem Schüler Mitteilung macht von seiner Wesensart* “.[8]) Für uns, die wir Hecke nicht mehr gekannt haben, kann demnach diese Vorlesungsausarbeitung eine Gelegenheit bieten, etwas über die Wesensart Heckes zu erfahren. Im Lichte des Maakschen Zitats wäre es reizvoll, den Vorlesungsstil von Hecke zu vergleichen mit dem der beiden anderen großen Zahlentheoretiker, die die Tradition des Hamburgischen Mathematischen Seminars geprägt haben: E.Artin und H.Hasse. Die Vorlesungen von Artin zeichneten sich aus durch äußerste Eleganz und und kristallklare Schönheit, sparsame Methoden und angemessene Axiomatik. Hasse legte in seinen Vorlesungen Wert auf eine systematische, organische und vollständige Durchdringung der zu erforschenden Gegenstände; die Untersuchungsmethoden mussten dem Sachverhalt in jedem Falle angemessen sein, bis hin zu der verwendeten Terminologie und den Bezeichnungen. (Vielleicht könnten später einmal auch Vorlesungsausarbeitungen von Artin und Hasse in diese Buchreihe „Dokumente zur Geschichte der Mathematik“ aufgenommen werden?)

* * *

Im einzelnen konnte die Heckesche Vortragsart wohl auch zu Ungenauigkeiten im Detail führen. Wenn nach der ausführlichen Diskussion von Spezialfällen der allgemeine Fall nur summarisch und berichtweise behandelt wurde, so konnte es wohl vorkommen, daß sich dabei fehlerhafte Formulierungen einstellten, sei es, weil der Vortragende selbst in Eile und im Eifer etwas übersehen hatte, oder weil der Protokollant nicht mehr so schnell alles mitbekam und daher bei der Niederschrift Fehler machte. Übrigens hatte es der Protokollant wohl auch nicht einfach. Zassenhaus berichtet über den Heckeschen Vorlesungsstil wie folgt: [9])

> „*Die Vorlesungen Heckes geben ein lebendiges Zeugnis seiner fruchtbaren Tätigkeit als Forscher. Es ist keineswegs leicht, ihnen zu folgen. Die Technik des ständigen Löschens von Formeln mitten in einem gewaltigen Apparat ist für den Zuschauer verwirrend, ja geradezu beängstigend. Aber dazwischen kommen immer wieder Hinweise, die den Hörer in die ganze Tiefe der Problematik hineinführen, ihn mitten vor die Schwierigkeiten stellen. Man darf sagen, es handelt sich um eine dramatisch bewegte Erzählung.*“

[8]) W.Maak, *Rede zum Gedächtnis an Erich Hecke*, loc.cit.[2]).
[9]) H.Zassenhaus, *Rede zum Gedächtnis an Erich Hecke*, loc.cit.[2]).

Herr Schoeneberg hat mich zwar darauf hingewiesen, daß diese Schilderung von Zassenhaus übertrieben ist:

> *„Hecke hat sich auf seine Vorlesungen intensiv vorbereitet und gerade schwierigeren Fragen sehr geglückte Einleitungen und Übersichten vorausgeschickt.“*

Jedenfalls können wir dem protokollierenden Hörer gute Arbeit bescheinigen dafür, daß er ein solch umfangreiches und wohl auch ziemlich getreues Manuskript fertiggestellt hat. Übrigens handelt sich wahrscheinlich um mehrere Protokollanten; im dritten Teil sind jedenfalls verschiedene Handschriften auszumachen.

Immerhin haben wir bei der Durchsicht eine Reihe von Ungenauigkeiten festgestellt. Ich meine dabei nicht offensichtliche Schreibfehler; diese wurden selbstverständlich sofort korrigiert, wenn sie bemerkt wurden. Aber auch bei denjenigen Ungenauigkeiten, die nicht als reine Schreibfehler angesehen werden können, haben wir uns schließlich entschlossen, eine Berichtigung direkt im Text vorzunehmen. Solche Stellen sind uns insbesondere in Teil III aufgefallen; es scheint so, daß der Teil III mit weniger Sorgfalt als die beiden ersten Teile aufgeschrieben wurden. In jedem der von uns gefundenen Fehler-Vorkommen war es klar, wie die mathematisch richtige Formulierung heißen müßte. Bei der Formulierung der Berichtigungen haben wir uns bemüht, uns an den Heckeschen Stil zu halten; in einigen Fällen wurden die entsprechenden Fassungen aus dem Heckeschen Lehrbuch zum Vergleich herangezogen. Natürlich wäre es möglich gewesen, den Text der Ausarbeitung ungeändert zu lassen und in Anmerkungen auf die Fehler und ihre Korrektur hinzuweisen. Dazu waren uns aber die Fehler nicht gewichtig genug; es erschien uns in diesem Falle nicht angebracht, um des Prinzips der historischen Genauigkeit willen einen inkorrekten Text zu publizieren.

In drei Fällen sind wir allerdings von diesem Vorgehen abgewichen: vgl. die Anmerkungen auf den Seiten 231-232.

Der Leser wird bemerken, daß die von Hecke verwendete *Terminologie* in einigen Punkten von der heute üblichen Terminologie abweicht. Zum Beispiel wird schlicht von einem „Körper“ gesprochen, wenn es sich um einen „algebraischen Zahlkörper endlichen Grades“ handelt; eine „Basis“ bedeutet stets „Ganzheitsbasis“ dieses Körpers; eine „Zahl“ des Körpers ist meist eine „ganze Zahl“, wenn nicht ausdrücklich gesagt wird, daß auch gebrochene Zahlen mit in den Kreis der Betrachtung einbezogen werden. Diese Terminologie war damals durchaus üblich und bereitet wohl auch dem heutigen Leser keine Schwierigkeiten.

Etwas problematischer erscheint uns, daß die in dem Skriptum verwendeten *Bezeichnungen* nicht sehr systematisch und nicht immer konsequent benutzt werden; das hat uns, zugegeben, manches Mal irritiert. Es kommt mehrmals vor, daß ein Symbol zunächst ohne Erklärung verwendet wird, bevor es (einige Seiten später) tatsächlich definiert wird. Gelegentlich wird eine Bezeichnung ohne Vorwarnung geändert und der Leser muß aus dem Zusammenhang entnehmen, was nun tatsächlich gemeint ist. Öfters findet man im gleichen Kontext dasselbe Symbol für verschiedene mathematische Größen verwendet. Solche Inkonsistenzen sind in einer *Vorlesung* durchaus akzeptabel, weil ja der Vortragende mündlich auf die jeweils aktuelle Bedeutung der verwendeten Bezeichnung hinweisen kann. In einem *schriftlichen Text* sollten sie jedoch tunlichst vermieden werden, jedenfalls dann, wenn dieser Text einer breiteren mathematischen

Öffentlichkeit zugänglich wird und damit auch solchen Lesern, die die Vorlesung nicht gehört haben.

Dennoch haben wir der Versuchung widerstanden, die Bezeichnungen zu systematisieren und entsprechend abzuändern. Überall dort, wo nach unserer Meinung der Sinn aus dem Zusammenhang eindeutig hervorgeht, haben wir die Bezeichnungen in der originalen Form belassen. Dies erschien uns angebracht und auch erwünscht, um die unmittelbare Wirkung des Textes als *Vorlesung* beizubehalten. Wir glauben, daß Hecke selbst dieses unser Vorgehen gebilligt haben würde. Hecke hat, wie es heißt, seine Hörer stets als „geborene erwachsene Mathematiker“ angesehen, also als im Grunde gleichgesetzte Gesprächspartner, denen er berichtete und die weder einer Einführung noch einer Führung bedurften.

* * *

Der Umfang des dargebotenen Vorlesungsstoffes ist erstaunlich groß. Im Sommersemester 1920 wurden sowohl der Teil I (abelsche Körper) als auch Teil II (komplexe Multiplikation) behandelt. Das letzte eingetragene Datum ist der 23. Juli 1920; die Vorlesung in jenem Semester endete mit dem Hauptsatz der komplexen Multiplikation für Ringklassenkörper.

Es erscheint uns bemerkenswert, daß Hecke in den knapp drei Monaten eines Sommersemesters in einer 4-stündigen Vorlesung ein solch reichhaltiges und abwechslungsreiches Programm bieten konnte. Dabei ist noch zu bedenken, daß viele elementare Tatsachen aus Algebra und Zahlentheorie, die wir heute zu den Grundbegriffen und selbstverständlichen Voraussetzungen einer solchen Vorlesung rechnen würden, offenbar nicht als bekannt angenommen werden konnten; daher mußte sich Hecke immer wieder im Laufe der Vorlesung mit der Diskussion solcher, nicht zum eigentlichen Thema gehörenden Dinge abgeben. Und das alles bei einem Vorlesungsstil, der wie gesagt keine aufs allgemeine ausgerichtete Systematik enthielt, sondern auf die Diskussion ausgesuchter Spezialfälle und Rechnungen ausgerichtet war. Oder war es vielleicht gerade dieser Vorlesungsstil, der die Behandlung eines solch reichhaltigen Stoffes erst ermöglichte?

Der Teil III der Vorlesung (über die Dedekindsche Zetafunktion eines algebraischen Zahlkörpers) ist nicht mehr im Sommermester 1920 vorgetragen worden. Im darauffolgenden Wintersemester 1920/21 hatte Hecke keine Fortsetzungsvorlesung angekündigt; dagegen findet sich im Vorlesungsverzeichnis für das Sommersemester 1921 eine Ankündigung mit dem gleichen Titel: „ Anwendung der Analysis auf Arithmetik.“ Und zwar diesmal 2-stündig.

Wir können daher wohl annehmen, daß der Teil III im Sommersemester 1921 gelesen wurde. Allerdings fehlen in diesem Teil III die Datumsangaben, sodaß der Zeitpunkt des Vortrags für diesen Teil nicht mehr direkt aus der Ausarbeitung entnommen werden kann.

Einige der Hörer aus dem Jahr 1920 werden wohl auch 1921 dabei gewesen sein; jedenfalls wird gelegentlich auf die früheren Teile I und II der Vorlesung verwiesen. Andererseits hat Hecke wohl auch auf neu hinzugekommene Hörer Rücksicht genommen; es ist zu bemerken, daß der Teil III, ungeachtet einiger Rückverweise, insgesamt in sich abgeschlossen und ziemlich eigenständig aufgebaut ist. Es ist durchaus möglich, dem Gang der Vorlesung in Teil III zu folgen, ohne genauere Kenntnis der beiden ersten Teile zu besitzen.

In diesem Teil III, bei der Diskussion der Dedekindschen Zetafunktionen, kommt Hecke seinen eigenen Forschungsarbeiten am nächsten und aus der Lektüre gewinnt man den Eindruck, daß er diesen Teil mit besonderer innerer Anteilnahme vorgetragen hat. Zwar wird die von Hecke erst wenige Jahre zuvor bewiesene Funktionalgleichung der Zetafunktion nicht behandelt; das hätte wohl auch den ziemlich elementaren Rahmen der Vorlesung gesprengt. Doch auch bei den hier behandelten Themen: der analytischen Klassenzahlformel und der Kroneckerschen Grenzformel, kann Hecke in extenso das aufzeigen, was ihn offenbar Zeit seines Lebens am meisten fasziniert hat, nämlich *die beherrschende Rolle der Analysis im Zusammenhang mit der Theorie der algebraischen Zahlen.*

Auch bei den Themen aus den früheren Teilen I und II spielte natürlich die Analysis eine wichtige Rolle, und Hecke hatte jede Gelegenheit benutzt, besonders darauf hinzuweisen, wenn eines der dargebotenen Resultate auf transzendentem Wege gewonnen worden war. Aber jetzt, bei der Diskussion der Zetafunktion und der damit zusammenhängenden Dirichletschen Reihen, tritt die Analysis in besonders deutlicher Form nicht nur als wichtiges Hilfsmittel, sondern als eine der Zahlentheorie gleichberechtigte Disziplin hervor. Und das ist wohl, man merkt es der Diktion dieses Teiles an, so ganz nach Heckes Geschmack.

Beim Studium des Heckeschen Werkes legt man sich oft die Frage vor, ob er denn vornehmlich als Zahlentheoretiker anzusehen sei oder mehr als Funktionentheoretiker. Er selbst pflegte auf Befragen zu antworten, seine Arbeitsgebiete seien Arithmetik, Algebra und Funktionentheorie; so wird uns von Zassenhaus berichtet.[9]) Das Eigentümliche an der Heckeschen Arbeitsweise ist (so sagt Zassenhaus weiter), daß zwar die zahlentheoretischen Feststellungen im Mittelpunkt seiner Arbeiten stehen, daß er aber diese „*aus der Betrachtung funktionentheoretischer Identitäten hervorzaubert*“.

Für einen Mathematiker der heutigen Zeit, der gewohnt ist, seine Gedanken im Rahmen der Begriffswelt der sog. *Strukturen* zu formulieren, sieht die Hecke-sche Argumentation vielleicht manchmal wie „Zauberei“ aus. Hecke selbst wird jedoch wohl anders empfunden haben. Wir können zwar glauben, daß er besonderes Vergnügen daran fand, zahlentheoretische Sachverhalte als Folge von funktionentheoretischen Gesetzmäßigkeiten zu erkennen. So wie es eben in diesem dritten Teil geschieht, angefangen von der Formel für die Eulersche φ-Funktion bis hin zur Klassenzahlformel und zur Kroneckerschen Grenzformel. Aber die Funktionentheorie war doch wohl für Hecke nicht nur ein Hilfsmittel zum „Hervorzaubern“ zahlentheoretischer Gesetzmäßigkeiten.

Wenn er, wie uns Zassenhaus berichtet hat, von seinen Arbeitsgebieten Arithmetik, Algebra und Funktionentheorie spricht, so haben wir das wohl so aufzufassen, daß Hecke diese drei Gebiete nicht getrennt sehen möchte sondern zu einer Einheit verbunden. In diesem Sinne führte Hecke die Tradition der großen Meister des vergangenen Jahrhunderts weiter, wobei er insbesondere seinem akademischen Lehrer D. Hilbert folgt.

In der Formulierung seines 12. Problems beschreibt Hilbert die drei grundlegenden Disziplinen der Mathematik, nämlich die Zahlentheorie, Algebra und Funktionentheorie, als „*in die innigste gegenseitige Berührung*“ miteinander tretend. Wir können wohl annehmen, daß die Äußerung von Hecke dort ihren Ursprung und Interpretation besitzt.

Am Schluß der Vorlesung macht Hecke seine Hörer mit eben diesem 12. Hilbertschen Problem bekannt. Er referiert, wenn auch nur kurz, über die diesbezüglichen Arbeiten von Blumenthal und von ihm selbst. Er wirft die Hilbertsche Frage auf, ob nicht auch in anderen Fällen, für andere algebraische Zahlkörper, diese Körper mit Hilfe von analytischen Funktionen aufzubauen seien. Und diese Funktionen, so sagt Hecke, „*sollten aus der Zetafunktion des betr. Körpers gewonnen werden.*“ Damit schließt Hecke seine Vorlesung mit einem Ausblick auf die von ihm als wichtig erachtete Richtung der zukünftigen Forschung; er hat seine Hörer an die Fragen herangeführt, denen er selbst einen erheblichen Teil seiner Arbeiten gewidmet hat.

* * *

Das Mathematische Seminar in Hamburg hatte sich bereits in den ersten Jahren seines Bestehens einen hohen Rang unter den deutschen und auch den ausländischen mathematischen Institutionen erwerben können. Das kam nicht von ungefähr, sondern war die Folge einer wohlüberlegten und erfolgreichen Berufungspolitik, der es von vorneherein gelang, hervorragende Mathematiker nach Hamburg zu holen. Was dabei die Rolle von Erich Hecke betrifft, so äußert sich H.Bohr wie folgt:[10])

> „*Wenn es gelang, sozusagen aus dem Nichts und in verblüffend kurzer Zeit in Hamburg ein blühendes wissenschaftliches Zentrum zu erschaffen, das nicht nur Großes für die Zukunft versprach, sondern gleichzeitig tiefe Wurzeln in der Vergangenheit zu haben schien, so war dies nicht im wenigsten Heckes energischem und freudigem Einsatz zu verdanken und den reichen Traditionen, die er mit sich brachte.*“

Die vorliegende Vorlesungsausarbeitung legt uns Zeugnis ab von dem Beginn dieser, uns durch H.Bohr so eindringlich vor Augen geführten fruchtbaren Tätigkeit von Hecke in Hamburg.

Heidelberg, am 24.4.1987

* * *

An dieser Stelle möchte ich mich bedanken bei denjenigen Freunden und Kollegen, die mir bei der Vorbereitung dieser Ausgabe ihren Rat und Hilfe zur Verfügung gestellt haben: B. Schoeneberg (Hamburg); W. Maak (Göttingen); C. Meyer (Köln); Frau S. Böge (Heidelberg); M.Kneser (Göttingen); W. Purkert (Leipzig); O.Riemenschneider (Hamburg). Frau E. Grüner hat das handschriftliche, schwer lesbare Manuskript mit anerkennenswerter Sorgfalt und in hervorragender Qualität in Maschinenschrift übertragen.

Das vorangestellte fotografische Porträt Heckes stammt aus den Jahren vor 1922, also aus etwa der Zeit der Hamburger Vorlesung. Das Original befindet sich im Göttinger Universitätsarchiv und wurde uns freundlicherweise durch Herrn M. Kneser vermittelt. Außer diesem Porträt haben wir noch einen handschriftlichen Brief Heckes in Faksimile abgedruckt. Er stammt zwar aus einem späteren Jahr, nämlich 1926. Es handelt sich um einen Brief an Hasse, die komplexe Multiplikation betreffend.

[10]) H. Bohr, *Rede zum Gedächtnis an Erich Hecke,* loc.cit.[2]).