Briefwechsel

H. Hasse – J. Herbrand

Version von Mittwoch, 28. Juli 2004

Letztmalig geändert am 17. Januar 2013

Herbrand an Hasse 2.3.31 – 23.7.31
Briefauszüge von Wedderburn, Artin, Noether an Hasse
Briefe von Herbrand Sen. und Chevalley an Hasse

Für PDFLaTeX/hyperref und LaTeX2ε/hyperref sowie für Übersetzung mit `latex --src-specials` geeignet.

Helmut Hasse

Jacques Herbrand

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vorspann

1.1 Vorwort

Dieses Buch enthält Transkriptionen aller 6 Briefe von Jacques Herbrand an Helmut Hasse aus der Zeit vom 11. März bis zum 23. August 1931. Die Originale befinden sich heute in der Handschriftenabteilung der Universitätsbibliothek in Göttingen. Zusätzlich haben wir auch Auszüge aus anderen Briefen an Hasse aufgenommen, in denen auf Herbrand Bezug genommen wird. Es handelt sich um Briefe von Emmy Noether, Wedderburn, Artin und A. Weil. Der Vollständigkeit halber haben wir auch Briefe von Herbrand sen., dem Vater von Jacques Herbrand, und von Chevalley aufgenommen; in diesen Briefen (teilweise in Auszügen) geht es um die Redaktion von nachgelassenen Manuskripten sowie um die Planung eines Gedenkbandes für Herbrand.

Die Herausgabe der Briefe war schon seit vielen Jahren geplant[1], musste jedoch wegen manch anderer Projekte bisher immer wieder verschoben werden. Auch jetzt habe ich noch nicht die Zeit zu ausführlicheren Kommentaren gefunden, mit denen die Bedeutung der Herbrandschen Ideen im Rahmen der Klassenkörpertheorie hinreichend zum Ausdruck gebracht wird. Ich weiß nicht, wann ich dazu kommen werde.

Wenn ich dennoch diese historischen Dokumente der mathematischen Öffentlichkeit übergebe, so nicht nur als Zeugen der Entwicklung der algebraischen Zahlentheorie, sondern auch und im besonderen als Homage für Herbrand, dieser einzigartigen und faszinierenden Mathematiker-Persönlichkeit des vergangenen Jahrhunderts. Die kurzen, hier eingestreuten Kommentare können vielleicht als Basis dienen für eine spätere ausführlicher kommentierte Ausgabe dieser Briefe.

Peter Roquette

* * * * *

Jacques Herbrand (1908-1931) gehörte zu den jungen französischen Mathematikern, die in den 1920er und 1930er Jahren nach Deutschland kamen,

[1] Die Briefe befanden sich vorher im Privatbesitz von Professor Günther Frei. Leider konnte er infolge einer schweren Erkrankung nicht mehr an der Herausgabe der Briefe teilnehmen, wie wir es ursprünglich vorgesehen hatten.

um sich mathematisch weiterzubilden. Wie Henri Cartan berichtet:[2]

> „*We were the first generation after the war.*[3] *Before us there was a vacuum, and it was necessary to make everything new. Some of my friends went abroad, notably to Germany, and observed what was being done there. This was the beginning of a mathematical renewal. It was due to such people as Weil, Chevalley, de Possel ... The same people, responding to André Weil's initiative, came together to form the Bourbaki group.*"

Sicherlich wäre auch Herbrand unter den Gründern von Bourbaki gewesen, wenn ihn nicht das Schicksal getroffen hätte, von dem André Weil in seinem Brief an Hasse vom 4. August 1931 berichtet: Am 27. Juli 1931 verunglückte der 23-jährige Herbrand tödlich bei einer Bergtour in den Alpen.

Die mathematischen Interessen Herbrands umfassten Logik und Zahlentheorie. Nach seinem Doktorat in Paris (mit einer Thèse aus der mathematischen Logik) hielt er sich im akademischen Jahr 1930/31 mit einem Rockefeller-Stipendium in Deutschland auf, dem damaligen „Mekka der Zahlentheorie".[4] Vornehmlich in dieser Zeit beschäftigte er sich mit Klassenkörpertheorie, die sich damals im Umbruch und Neuorientierung befand. Er nahm Kontakte zu Emmy Noether, Artin und Hasse auf, die als die herausragenden Repräsentanten der Klassenkörpertheorie angesehen wurden.

Herbrand waren nur noch einige wenige Monate vergönnt. Er hinterließ 10 Arbeiten auf hohem Niveau, die für die Entwicklung der algebraischen Zahlentheorie von wegweisender Bedeutung wurden. Welch eine Bilanz!

Aber nicht nur sein Werk, sondern auch Herbrands Persönlichkeit hinterließ bei denjenigen, mit denen er zusammentraf, einen unvergesslichen Eindruck. Man vergleiche die enthusiastischen Äußerungen von Emmy Noether, Artin und A. Weil in ihren Briefen an Hasse, die wir in das dritte Kapitel aufgenommen haben. Hasse hat dem Andenken an Herbrand ein Denkmal gesetzt in dem Vorwort zu dessen Arbeit, die er für das Crellesche Journal angenommen hatte, die jedoch erst nach seinem Tod erscheinen konnte [Her33a]. Dort heißt es:

---

[2] Zitiert nach [Jac99].
[3] Gemeint ist der erste Weltkrieg.
[4] Zitiert nach Dieudonné [Die82].

> *Jacques Herbrand, geboren am 12. Februar 1908 in Paris, verunglückte tödlich bei einer Bergbesteigung in den Alpen am 27. Juli 1931. Am gleichen Tag ging das Manuskript der hier veröffentlichten Arbeit bei der Redaktion ein.*
>
> *Die letzten 6 Monate seines Lebens verbrachte er an deutschen Universitäten, in enger Berührung und lebhaftem Gedankenaustausch mit einer Reihe deutscher Mathematiker. Tief hat sich ihnen allen seine edle mit reichen wissenschaftlichen Gaben ausgestattete Persönlichkeit eingeprägt. Ein ungewöhnlich begabter Geist ist mit ihm in der Blüte seiner Jugend dahingegangen. Die schönen und wichtigen Resultate, die er auf dem Gebiete der Zahlentheorie und der mathematischen Logik gefunden, und die fruchtbaren Ideen, die er in mathematischen Gesprächen geäußert hat, berechtigten zu den größten Hoffnungen. Die mathematische Wissenschaft hat durch seinen frühzeitigen Tod einen schweren, unersetzlichen Verlust erfahren.*

Emmy Noether sagt Ähnliches in ihrem Vorwort zu Herbrands Arbeit in den Mathematischen Annalen [Her32c].

> *Jacques Herbrand, geboren am 12. Februar 1908 in Paris, verunglückte tödlich am 27. Juli 1931 bei einer Bergbesteigung in den französischen Alpen.*
>
> *Eine der stärksten mathematischen Begabungen ist mit ihm dahingegangen, mitten aus intensivster Arbeit heraus, voller Ideen für die Zukunft. Das letzte Jahr seines Lebens, das er als Rockefeller-Stipendiat in Deutschland verbrachte, hat ihn mit einer Reihe deutscher Mathematiker wissenschaftlich und menschlich eng verbunden. Von dem in der vorliegenden Arbeit angezeigten zweiten Teil haben sich die Konzepte noch gefunden, sodaß eine Publikation möglich sein wird. Ein Überblick über die beiden Teile ist enthalten in einer noch von Herbrand selbst redigierten Note.*[5]

[5] Noether bezieht sich hier auf die Vorankündigung in den Comptes Rendus [Her31a]. Der von Noether angekündigte zweite Teil erschien 1933, ebenfalls in den Mathematischen Annalen [Her33b].

Artin schrieb in seinem Brief vom 24. August 1931 an Hasse:

> *Sie werden wahrscheinlich schon von dem schrecklichen Unglück gehört haben, das Herbrand getroffen hat. Er ist in den Alpen tödlich verunglückt. Das ist wirklich ein schwerer Schlag der die Arithmetik getroffen hat. Vierzehn Tage vor seinem Tode war Herbrand noch unser Gast und ich erwartete mir große Dinge von ihm ...*

* * * * *

Wie Emmy Noether in ihrem Brief an Hasse berichtet, hatte sich Herbrand seine Kenntnisse in der Klassenkörpertheorie im Selbstudium aus dem dreiteiligen Hasseschen Klassenkörperbericht angeeignet: Teile I, Ia und II [Has26, Has27, Has30a]. In der Tat wurde der Hassesche Bericht in den 1920er und 1930er Jahren oft als ein Zugang zur Klassenkörpertheorie benutzt, der das Studium der verstreuten Originalarbeiten fürs erste entbehrlich machte. Bessel-Hagen z.Bsp. berichtet auf einer Postkarte am 17. August 1926 an Hilbert:

> *In dem vor wenigen Tagen erschienenen Hefte des Jahresberichtes der D.M.V. befindet sich ein Bericht von Hasse über die Klassenkörpertheorie, der so vorzüglich klar geschrieben ist und den ganzen Aufbau der Theorie mit einem nur die Hauptgedanken enthaltenden Skelett der Beweise so wundervoll herausschält, daß die Lektüre ein wahres Vergnügen ist und für das Eindringen in die Theorie jetzt wirklich alle Schwierigkeiten aus dem Wege geräumt sind ...*

Dies bezog sich auf den Teil I des Hasseschen Berichts. Bei dem ein Jahr später erschienenen Teil Ia sah die Sache jedoch anders aus. Der Teil Ia enthielt nämlich die *Details* der Beweise, die Hasse im ersten Teil nur skizzenhaft gebracht hatte. Diese mehrfach verschlungenen und teilweise komplizierten Beweise führten zu einem allgemeinen Unbehagen, da sie nicht den so glatten und eindrucksvollen Resultaten zu entsprechen schienen. Hasse hat diese Diskrepanz von Anfang an gesehen; in seinem Briefwechsel mit Artin und Emmy

Noether wird immer wieder die Suche nach „durchsichtigen“ Beweisen angesprochen.[6] In einer Fußnote in Teil II des Klassenkörperberichts hatte Hasse skizziert, wie er sich in Zukunft den Aufbau der Klassenkörpertheorie vorstellt, nämlich zunächst die Klassenkörpertheorie „im Kleinen“, also lokal, und dann darauf aufbauend die Theorie „im Großen“, also global. (Heute geschieht das routinemäßig.) Hasse schreibt:

> *Davon verspreche ich mir eine erhebliche gedankliche, wenn nicht auch sachliche Vereinfachung der Beweise der* [*globalen*] *Klassenkörpertheorie, die ja in ihrem bisherigen ungehobelten Zustande wenig geeignet sind, das Studium dieser in ihren Resultaten so glatten Theorie verlockend erscheinen zu lassen.*

Hier nun setzt Herbrand an. In seinen Briefen an Hasse kommt immer wieder das Motiv der „Vereinfachung“ vor; Schritt für Schritt berichtet Herbrand über seine Fortschritte. Diese Briefe sind eindrucksvolle historische Dokumente über die Stationen auf dem Weg Herbrands zu seinen Resultaten, die ja damals so viel Aufsehen auf sich gezogen haben.

In der Tat gestatten die Herbrandschen Resultate, zusammen mit denen von Chevalley und Artin, eine erhebliche Vereinfachung der Beweise der Klassenkörpertheorie. Das kommt ja auch in dem oben zitierten Brief von Artin an Hasse zum Ausdruck. Aber es geht in Herbrands Briefen nicht ausschließlich um Vereinfachung, sondern Herbrand findet auf dem Wege auch neue, interessante Resultate. Die wichtigsten davon sind die folgenden, und sie alle kommen in den Briefen an Hasse direkt oder indirekt zur Sprache:

1. Die Struktur der Einheitengruppe als Galoismodul.
2. Die Galois-Struktur der Klassengruppe eines zyklotomischen Körpers.
3. Verallgemeinerung des Hauptidealsatzes auf verzweigte Klassenkörper.
4. Die Arithmetik von Zahlkörpern unendlichen Grades, insbesondere Verzweigungstheorie.
5. Das heute so genannte Herbrandsche Lemma, heute meist im Rahmen der Kohomologietheorie formuliert.

Bei dem „Herbrandschen Lemma“ handelt es sich um ein methodisches Hilfsmittel aus der Gruppentheorie, das anlässlich seiner Bemühungen um

[6] Vgl. [LR06] und [FR08].

Vereinfachung des Beweises zum sog. „Hauptgeschlechtssatz“ der Klassenkörpertheorie gefunden wurde, das aber auch in vielen anderen Fällen erfolgreich benutzt werden kann. Nicht zuletzt weil Herbrands Name mit diesem Lemma verbunden ist, wird er für viele Mathematikergenerationen unvergessen bleiben.

* * * * *

Herbrand und Hasse trafen sich auf dem sogenannten „Schiefkörper-Kongress“ in Marburg, der vom 26. Februar bis zum 1. März 1931 stattfand. Hasse hatte zu dieser kleinen Tagung (heute würde man sagen: „workshop“) eingeladen, um eine Reihe der von ihm aufgestellten Vermutungen über Schiefkörper zu diskutieren. Insbesondere ging es um die damals noch offene Frage, ob jeder endlichdimensionale Schiefkörper über einem algebraischen Zahlkörper zyklisch sei. An der Planung für diese Tagung nahm auch Emmy Noether teil. In ihrem Brief an Hasse vom 8.2.1931 unterbreitete sie eine Reihe von Vorschlägen, wer zur Tagung eingeladen werden sollte. Darunter war eben auch Herbrand, wie wir lesen. Sie hatte Herbrand in Halle kennengelernt, wo sie einen Kolloquiumsvortrag gehalten hatte. Zu diesem Vortrag war auch Herbrand erschienen, der sich damals in Berlin aufhielt. Emmy Noether schrieb an Hasse über Herbrand:

> *Er kam nach Halle, und hat am meisten von allen von meinen Sachen verstanden.*

Im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von 1931 findet sich ein kurzer Tagungsbericht des Hasseschen Schiefkörperkongresses in Marburg. Daraus können wir entnehmen, wer an der Tagung teilgenommen und einen Vortrag gehalten hatte. Wir finden dort außer Hasse und Noether die Namen R. Brauer, Deuring, Archibald[7], Fitting, Brandt, Köthe. (F. K. Schmidt und Krull aus Erlangen waren auch eingeladen, sie wären auch gerne gekommen, aber sie mussten absagen, weil gerade an dem betreffenden Wochenende ein Gastredner im mathematischen Kolloquium in Erlangen erwartet wurde.) Aber Herbrand ist nicht erwähnt. Das ist wohl dadurch zu erklären, dass Herbrand auf der Tagung keinen Vortrag gehalten hat. Herbrand

[7] Archibald war ein Schüler von Dickson aus den USA, der sich damals in Göttingen aufhielt und bei E. Noether arbeitete. Er beschäftigte sich insbesondere mit Matrix-Algebren.

war von Noether ausdrücklich nur als Teilnehmer vorgeschlagen worden, nicht unbedingt als Vortragender. Vielleicht hatte das seinen Grund darin, dass die zur Verfügung stehende Zeit schon durch andere Vorträge verplant war, vielleicht aber auch weil das Herbrandsche Vortragsthema, nämlich die Galoisstruktur der Einheitengruppe, nicht direkt in den thematischen Rahmen der Tagung passte. Dass Herbrand dennoch an dem „Schiefkongress“ (wie Noether die Tagung zu nennen pflegte) aktiv teilgenommen hat, ist aus seiner nachfolgenden Korrespondenz mit Hasse zu entnehmen, in der darauf Bezug genommen wird. Außerdem erwähnt er das selbst in seinem Abschlussbericht an die Rockefeller-Stftung über seinen Deutschland-Aufenthalt:

> *...j'ai assisté a Marburg a un congrès mathématiques, où j'ai pu recontrer la plupart des savants allemands intèressés dans les domaines où je poursuivais mes recherches.*

Hasse und Herbrand haben sich also in Marburg nur wenige Tage getroffen. Das hat ausgereicht, um eine intensive Korrespondenz zu beginnen, wenn sie schließlich auch nur kurz andauerte. Wir können daraus nicht nur ein gegenseitiges Verständnis für die anstehenden mathematischen Probleme einschließlich der Details entnehmen, sondern auch den Beginn einer freundschaftlichen Verbundenheit, wie sie ja auch in dem oben zitierten Nachruf aufscheint.

Leider sind nur die Briefe von Herbrand an Hasse erhalten. Wir haben keine Briefe in der umgekehrten Richtung, also von Hasse an Herbrand, gefunden. Wir können aber wohl davon ausgehen, dass mindestens ebensoviele Briefe in der umgekehrten Richtung geschickt wurden, in denen Hasse die Herbrandschen Mitteilungen kommentiert und vielleicht auch weitergehende Fragen gestellt hat. Hasse hat Zeit seines Lebens jeden eingehenden Brief, der ihn mathematisch interessierte, umgehend beantwortet.

* * * * *

Nach der Schiefkörper-Tagung ging Herbrand nach Berlin zurück. Das entnehmen wir aus der Tatsache, dass seine ersten beiden Briefe an Hasse in Berlin aufgegeben wurden; einer am 11.3. und der nächste am 28.4.

Herbrand hatte sich schon vorher, während des Wintersemesters 1930/31 in Berlin aufgehalten, um mit John von Neumann zu arbeiten, der sich (wie auch Herbrand) für mathematische Logik interessierte, der aber darüberhinaus offen für alle Fragen der Mathematik und Philosophie war. Damals hatte Herbrand von Berlin aus einen kurzen Abstecher nach Halle gemacht, um dort einen Kolloquiumsvortrag von Emmy Noether zu hören. Das war am 30./31. Januar 1931 gewesen. Herbrand und Emmy Noether waren also zum ersten Mal in Halle zusammengetroffen. Wie bereits berichtet, war Emmy Noether dabei so beeindruckt gewesen, dass sie ihn als Teilnehmer für den Hassesche Schiefkörper-Kongress in Marburg vorschlug, der am 26.2. bis zum 1.3.1931 stattfand.

Übrigens: Drei Wochen später, am 18. Februar 1931, war Herbrand noch einmal von Berlin nach Halle gefahren. Diesmal hat er selbst dort einen Kolloquiumsvortrag gehalten, mit dem Thema: „Hilbert-Dedekindsche Theorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern“. Wir haben diese Information aus dem Jahresbericht der DMV für das Jahr 1931 entnommen, in welchem die Kolloquiumsvorträge aufgelistet sind, die in Halle im akademischen Jahr 1930/31 gehalten wurden.[8] Es ist anzunehmen, dass Herbrand dabei über seine Arbeit [Her31a] berichtet hat, von der eine Ausarbeitung später in den Mathematischen Annalen in zwei Teilen erschienen ist [Her32c], [Her33b]. Es ist uns unbekannt, wer damals die Einladung Herbrands nach Halle veranlasst hatte; vielleicht war es Reinhold Baer, damals Privatdozent in Halle. Baer war besonders auch an unendlichen Körpererweiterungen und ihrer Galoistheorie interessiert, siehe z.Bsp. seine gemeinsam mit Hasse herausgegebene Edition der Steinitzschen Arbeit zur Körpertheorie [Ste30].

Noch ein drittes Mal fuhr Herbrand zu einem Kurzbesuch nach Halle; am 22. 4. 1931 trug er dort vor über ein Thema aus der Mathematischen Logik, nämlich über die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik – das ist diejenige Arbeit, die er später, wenige Tage vor seinem Tod, an Hasse zur Publikation im Crelleschen Journal geschickt hatte. Danach fuhrer wieder nach Berlin von wo er, wie bereits gesagt, am 28. .4. seinen zweiten Brief an Hasse schickte.

Der dritte Brief von Herbrand an Hasse ist am 18. 5. 1931 in Hamburg datiert. Demnach hielt er sich während des Sommersemesters 1931 in Hamburg auf, wo er mit Artin zusammentraf. Artin war von Herbrand sehr angetan; er schrieb am 16. 6. an Hasse, dass „wir alle begeistert“ waren.

Da war Herbrand jedoch schon aus Hamburg abgereist, und zwar war er nach Göttingen zu Emmy Noether gegangen. Das wird bestätigt durch einen

[8] Darauf hat uns freundlicherweise F. Lemmermeyer aufmerksam gemacht.

Brief von Emmy Noether an Hasse: sie schreibt am 2. 6. 1931, dass Herbrand Mitte Juni nach Göttingen kommen wird. In der Tat ist der nächste Brief vom Herbrand am 29. 6. 1931 in Göttingen datiert.

Aber schon einen Monat später ist er wieder in Paris. Am 23. 7. 1931, vier Tage vor seinem tragischen Tod, ist dort sein letzter Brief an Hasse datiert.

Angesichts dieses engen Zeitplans ist es zweifelhaft, ob Herbrand nach dem Schiefkörper-Kongress noch einmal mit Hasse zusammentraf. Es ist zwar möglich, dass er von Göttingen aus noch einmal kurz nach Marburg gefahren war; die Entfernung ist ja nicht groß. Es ist denkbar, dass Hasse bei einem solchen Treffen angeboten hatte, Herbrands Arbeit über Klassenkörper im Crelleschen Journal zu publizieren. Denn in Herbrands letztem Brief aus Paris schreibt er, dass er diese Arbeit ja schon für die Einzelhefte der Hamburger Mathematischen Abhandlungen versprochen habe, und dass er sie daher nicht dem Crelleschen Journal senden kann. Stattdessen fragt er an, ob sein Manuskript über die Widerspruchslosigkeit der Arithmetik im Crelleschen Journal erscheinen könne.[9] Allerdings gibt es keine Dokumente, die ein solches zweites Zusammentreffen von Hasse und Herbrand belegen könnten. Hasse hätte ja auch brieflich das Angebot zur Publikation im Crelleschen Journal machen können. Wie bereits gesagt, sind die Briefe von Hasse an Herbrand offenbar verloren gegangen oder jedenfalls unzugänglich.[10]

Es gibt einen Bericht von Paul Dubreil über dessen Jahre als Rockefeller-Stipendiat 1929/31 [Dub83]. Insbesondere beschreibt er seinen Aufenthalt in Hamburg bei Artin ein Jahr bevor Herbrand nach Hamburg kam. Der Bericht ist lebhaft und ausführlich, und wir können uns dadurch vorstellen, wie es damals im Kreis um Artin zuging. Herbrand wird die Hamburger Atmosphäre ähnlich erlebt haben, und deshalb haben wir den Bericht von Dubreil in dieses Buch aufgenommen. Im Sommer 1931 hat Dubreil übrigens Herbrand noch in Göttingen getroffen, kurz vor dessen Abreise nach Paris, und er spricht von zwei brillianten Vorträgen (*deux brillantes exposés*), die dieser dort in der Mathematischen Gesellschaft gehalten habe.

[9]Die Arbeit über Klassenkörpertheorie hat Herbrand nicht mehr zum Druck fertigstellen können. Sie wurde später von seinem Freund Chevalley redigiert und erschien in Paris [Her35]. Die Arbeit über die Widerspruchslosigkeit der Arithmetik konnte noch im Crelleschen Journal erscheinen; die Korekturen dazu wurden vo Bernays gelesen.

[10]Wie ich gehört habe, befinden sich im „Dossier Vessiot“ – ENS eine Reihe von Papieren zu Herbrand. Mit ist jedoch nicht bekannt, ob sich darunter die Hasse-Briefe befinden.

* * * * *

Eine Ausgabe der Schriften Herbrands über Logik ist erschienen in [Her71]. Eine entsprechende, kommentierte Ausgabe der Schriften über Zahlentheorie ist m.W. bisher nicht erschienen. Dies wäre in der Tat eine lohnende Aufgabe. Alle 10 zahlentheoretische Arbeiten haben wir im Literaturverzeichnis aufgelistet. Wir verweisen dazu auch auf den Artikel von Dieudonné über die zahlentheoretischen Resultate von Herbrand [Die82]. Für biographische Angaben über Herbrand siehe z.Bsp. Chevalley-Lautmann [CL71].

Nach Herbrands Tod planten Chevalley und Weil, einen Gedenkband für Herbrand herauszugeben, und sie haben dazu eine Reihe von Mathematikern, mit denen Herbrand Kontakte hatte, angeschrieben und um Beiträge gebeten. In Kapitel 4 findet man einige Briefe von Chevalley an Hasse, in denen auf dieses Projekt Bezug genommen wird. Allerdings wurden die Beiträge dann nicht zusammen in einem Band publiziert, sondern als einzelne Hefte in der Reihe „Exposés Mathématiques" bei Hermann. Aus der Korrespondenz zwischen Hasse, Noether und Chevalley ergibt sich, dass zumindest diese drei mit Beiträgen dabei waren. Ferner hat auch André Weil einen Beitrag geliefert. In dem Zentralblatt für Mathematik fanden wir weiterhin die Namen Baer[11], R. Brauer, Brelot, H. Cartan, Dieudonné, Dubreil, Lusin, Delsarte, Iyanaga, J. von Neumann. Die diesbezüglichen Arbeiten finden sich in unserem Literaturverzeichnis angegeben. Artin ist nicht dabei; er hatte allerdings schon kurz vorher dem Crelleschen Journal eine Arbeit gegeben, in welcher er, bezugnehmend auf Herbrand, einen besonders einfachen Beweis von dessen Satz über die Galois-Struktur der Einheitengruppe liefert [Art32]. (Artins Beweis ist heute standard.)

In dem Heft mit Hasses Arbeit [Has34b] finden sich auch Nachrufe von Hadamard und Vessiot auf Herbrand. Von dort haben wir auch das Foto von Herbrand übernommen. Auf dem Foto steht: „Cliché Prof. Artin". Es erscheint wahrscheinlich, dass das Foto von Artins Frau Natascha aufgenommen worden ist.

* * * * *

Bemerkung: Die Briefe von Herbrand an Hasse sind in deutscher Sprache

[11] Baer war damals Privatdozent in Halle, und wahrscheinlich hat Herbrand ihn bei seinen Besuchen in Halle im Februar 1931 getroffen.

geschrieben. Wir publizieren sie hier im Original, haben also davon Abstand genommen, sein etwas holpriges Deutsch sprachlich zu glätten, wenn keine Schwierigkeiten für das Verständnis zu erwarten sind.

1.2 Die Klassenkörpertheorie um 1930

Zum Verständnis der Briefe Herbrands an Hasse erscheint es angebracht, sich den Stand der Klassenkörpertheorie zu der damaligen Zeit zu vergegenwärtigen, nicht nur die Resultate, wie sie damals bekannt waren, sondern auch die Tendenzen zur weiteren Entwicklung, die schließlich zu einem ganz neuen Verständnis der Situation führten.

Gegeben sei ein Zahlkörper k.

Sei $K|k$ eine Galoissche Erweiterung und $\mathfrak{m}$ ein Idealmodul aus k. Sei $N_K^{\mathfrak{m}}$ diejenige Idealklassengruppe mod $\mathfrak{m}$ aus k, die von den Normen der zu $\mathfrak{m}$ primen Ideale aus K erzeugt wird.

> **Definition:** *Wenn der Index von $N_K^{\mathfrak{m}}$ mit dem Körpergrad $[K : k]$ übereinstimmt, dann heißt K ein Klassenkörper über k, und $\mathfrak{m}$ heißt ein Definittionsmodul von K.*

Diese Definition wurde von Takagi gegeben [Tak20].

Einige Bemerkungen zu dem hier auftretenden Begriff „Idealklassengruppe mod $\mathfrak{m}$“ sind vielleicht am Platze. In diesem Zusammenhang bezeichnet $\mathfrak{m}$ einen ganzen Divisor, zusammengesetzt aus endlich vielen Primdivisorpotenzen $\mathfrak{p}^{\mu_\mathfrak{p}}$; dabei sind die unendlichen Primstellen in bekannter Weise zu berücksichtigen. Es bedeute $D^{\mathfrak{m}}$ die Gruppe derjenigen Divisoren von k, welche relativ prim sind zu $\mathfrak{m}$. Betrachte die Untergruppe $H^{\mathfrak{m}} \subset D^{\mathfrak{m}}$, bestehend aus denjenigen Hauptdivisoren (a), die von Elementen $a \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}$ erzeugt werden können. Die Faktorgruppe $C^{\mathfrak{m}} = D^{\mathfrak{m}}/H^{\mathfrak{m}}$ heißt die „Idealklassengruppe modulo $\mathfrak{m}$“. Auch jede Untergruppe von $C^{\mathfrak{m}}$ wird als Idealklassengruppe modulo $\mathfrak{m}$ bezeichnet. Die in der obigen Definition auftretende, von den Normen erzeugte Gruppe $N_K^{\mathfrak{m}}$ ist also nach Definition in $C^{\mathfrak{m}}$ enthalten. Ihr Index ist $h_K^{\mathfrak{m}} = (C^{\mathfrak{m}} : N_K^{\mathfrak{m}})$, die „Klassenzahl modulo $\mathfrak{m}$“.

Heute würden wir mit „Ideleklassengruppen“ statt mit Idealklassengruppen arbeiten, genauer mit offenen Untergruppen von endlichem Index in der vollen Ideleklassengruppe $C = J/k^\times$ von k. Hier bezeichnet J die Gruppe der Idele von k, und $k^\times$ ist die in J diagonal eingebettete Untergruppe der Hauptidele. Die Topologie von $C = J/k^\times$ wird induziert durch die von J, und letztere wird gegeben durch Moduln $\mathfrak{m}$ wie folgt. Zu jedem Modul $\mathfrak{m}$

gehört eine offene Umgebung $U^{\mathfrak{m}}$ des Einselements in J, bestehend aus denjenigen Idelen a, die an den zu $\mathfrak{m}$ teilerfremden Primstellen lokale Einheiten sind, während a lokal an den in $\mathfrak{m}$ aufgehenden Primstellen der Kongruenz $a \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}$ genügen.

Die Normabbildung $N : K \to k$ führt zu einer Abbildung der entsprechenden Ideleklassengruppen. Wir bezeichnen mit N_K das Bild der Ideleklassengruppe von K. Dies ist eine offene Untergruppe von C von endlichem Index.

> *Wenn der Index $h_K = (C : N_K)$ gleich dem Körpergrad $[K : k]$ ist, so heißt K Klassenkörper über k.*

Dies ist die heutige Definition des Klassenkörpers, die auf Chevalley zurückgeht [Che40]. Sie hat den begrifflichen Vorteil, dass sie nicht auf den Hilfsmodul $\mathfrak{m}$ zurückgreift, auf den es nicht ankommt. Obwohl Chevalley seine „Idele“ erst 1936 in seiner Arbeit [Che36a] eingeführt hat[1], so ist es evident, dass dies nicht zuletzt unter dem Einfluss seines Freundes Herbrand erfolgte. Denn Chevalley hatte den Begriff des Ideles geschaffen, um auch unendliche Zahlkörper-Erweiterungen in den Griff zu bekommen, und diese Entwicklung war ja durch Herbrand in zwei Arbeiten über unenendliche Zahlkörper-Erweiterungen vorbereitet worden [Her32c], [Her33b].

Die Hauptsätze der Klassenkörpertheorie lauten in der Fassung mit Idelen wie folgt:

Eindeutigkeitssatz: Ein Klassenkörper $K|k$ ist durch seine Normgruppe N_K eindeutig bestimmt.

Existenzsatz: Zu jeder offenen Idelklassengruppe $U \subset C$ existiert ein Klassenkörper $K|k$, derart, dass $U = N_K$.

Isomorphiesatz: Die Galoisgruppe von $K|k$ ist isomorph zur Faktorgruppe C/N_K. Insbesodere ist ein Klassenkörper $K|k$ abelsch.

Zusatz: Artinsches Reziprozizätsgesetz: Es gibt einen kanonischen Isomorphismus von C/N_K auf die Galoisgruppe von $K|k$, welcher dadurch erzeugt wird, dass jedem unverzweigten Primideal $\mathfrak{p}$ von k sein Frobenius-Automorphismus zugeordnet wird.

Umkehrsatz: Jede abelsche Körpererweiterung $K|k$ ist Klassenkörper.

[1]Er spricht jedoch schon ein Jahr früher, in einem Brief an Hasse vom 20.6.1935, von seinen „éléments idéaux“.

Herbrand arbeitete noch nicht mit Idelen. Aber dieselben Sätze gelten auch in der Fassung mit Definitionsmoduln $\mathfrak{m}$, wenn man an den entsprchenden Stellen den oberen Index $\mathfrak{m}$ anbringt, und auf diese Sätze bezieht sich Herbrand in seinen Briefen. Die Namen der obigen Sätze hatte Hasse in seinem Klassenkörperbericht [Has26] eingeführt, und sie wurden auch von Herbrand benutzt.

Daneben spricht Herbrand auch von der lokalen Klassenkörpertheorie, für die er den damals üblichen Namen „im Kleinen" benutzt. Dort gelten dieselben Sätze, wobei man die Idelklassengruppe C durch die multiplikative Gruppe $k_P^\times$ zu ersetzen hat. Also:

Gegeben sei eine Komplettierung k_P nach einer Primstelle P von k.

Sei $K_P|k_P$ eine Galoissche Erweiterung. Sei $N_{K_P} \subset k_P^\times$ die Gruppe der Normen von Elementen aus $K_P^\times$. Dies ist eine offene Untergruppe in der P-adischen Topologie von $k_P^\times$, von endlichem Index.

> **Definition:** *Wenn der Index $(k_P^\times : N_{K_P})$ gleich dem Körpergrad $[K_P : k_P]$ ist, dann heißt K_P Klassenkörper über k_P.*

Die Hauptsätze der lokalen Klassenkörpertheorie lauten:

Eindeutigkeitssatz: Ein Klassenkörper $K_P|k_P$ ist durch seine Normgruppe N_{K_P} eindeutig bestimmt.

Existenzsatz: Zu jeder offenen Untergruppe $U_P \subset k_P^\times$ existiert ein Klassenkörper $K_P|k_P$ derart, dass $U_P = N_{K_P}$.

Isomorphiesatz: Die Galoisgruppe von $K_P|k_P$ ist isomorph zur Faktorgruppe $k_P^\times/N_{K_P}$. Insbesodere ist ein Klassenkörper $K_P|k_P$ abelsch.

Zusatz: Hassesches Reziprozitätsgesetz: Es gibt einen kanonischen Isomorphismus von $k_P^\times/N_{K_P}$ auf die Galoisgruppe von $K_P|k_P$; dieser wird induziert durch den globalen Isoorphismus des Artinschen Reziprozitätsgesetzes.

Umkehrsatz: Jede abelsche Körpererweiterung $K_P|k_P$ ist Klassenkörper.

Im Jahre 1931 war die lokale Klassenkörpertheorie gerade erst entdeckt worden, nämlich durch Hasse im Rahmen seiner Normenresttheorie [Has30b]. Allerdings konnte er die Beweise dazu nicht lokal führen, sondern er musste das globale Artinsche Reziprozitätsgesetz heranziehen. Das haben wir in der Formulierung des Zusatzes zum Hasseschen Reziprozitätsgesetz explizit kenntlich gemacht. Es entstand die Aufgabe, die Beweise zur lokalen Klassenkörpertheorie rein lokal zu führen. Herbrand spricht in seinen Briefen dieses Problem an und erwähnt, dass er gehört habe, Chevalley hätte schon einen solchen lokalen Aufbau erhalten. Das war tatsächlich der Fall [Che31]; gleichzeitig aber hatte das auch Hasse inzwischen erreicht [Has33]. Beidemale wurde dazu die von Hasse entwickelte lokale Theorie der einfachen Algebren vewendet.

Herbrand verwendet in seinen Briefen auch den Begriff des „Führers" eines Klassenkörpers. Dieser hat sowohl in der globalen als auch in der lokalen Theorie seine Bedeutung. Sei $K|k$ Klassenkörper. Sein Führer ist definiert als der kleinste Definitionsmodul von $K|k$. Er ist eindeutig bestimmt und wird meist mit $\mathfrak{f}$ bezeichnet.[2] Lokal ist der Führer $\mathfrak{f}_P$ von $K_P|k_P$ definiert als die kleinste Potenz P^r sodass jede Zahl $a \in k^\times$ mit $a \equiv 1 \bmod P^r$ eine Norm aus K_P ist. Man setzt $f_P = P^r$.

Führersatz: (i) Es gilt $\mathfrak{f}_P \neq 1$ dann und nur dann, wenn P in K verzweigt ist.
(ii) Der globale Führer $\mathfrak{f}$ ist das Produkt der lokalen Führer:

$$\mathfrak{f} = \prod_P \mathfrak{f}_P \, .$$

Dabei sind die unendlichen Stellen P in gewohnter Weise zu berücksichtigen.

[2] Im Englischen heißt es "conductor" und man findet häufig die Bezeichnung $\mathfrak{c}$ dafür.

Kapitel 2

Briefe von Herbrand an Hasse

2.1 11.03.1931, Herbrand an Hasse

Berlin, den 11. März 1931

Sehr geehrter Herr Hasse!

Ich danke Sie viel mir den ganzen Beweis des Theorems über Normenresten geschickt zu haben.[1]

Es ist sehr merkwürdig dass es für einen abel'schen Oberkörper nicht mehr wahr sei. Scheint es Ihnen nicht, dass (obwohl es, in der Klassenkörpertheorie, immer möglich sei alle die Beweise auf den Fall relativ zyklischer Zahlkörper zurückzuführen), dieser Gegenbeispiel gegen die Hoffnung geht, die ganze Klassenkörpertheorie von der Kl. K. Th. im kleinen herzuleiten?[2] Denn etwas kann in allen $\mathfrak{p}$–adischen Körpern wahr sein, und nicht mehr im Körper selbst gültig bleiben.[3]

Ich möchte noch folgende Bemerkung machen: sei k ein Körper K und K' zwei Galoische Oberkörper. Ihr Beispiel zeigt dass eine Zahl von k, die Norm von K und Norm von K' ist, nicht immer Norm von KK' ist. Aber wenn k ein $\mathfrak{p}$–adischer Körper ist, eine Norm von K und K', immer eine Norm von KK' ist: es ist klar im Fall abelscher Oberkörper; im allgemeinen Fall, kann es leicht bewiesen sein, mit Hilfe der Resultaten von Chevalley.[4]

Ich habe Ihre Fotographien aus dem Schiefkörperkongress bekommen, und ich danke Sie viel davon.[5]

Mit vorzüglicher Hochachtung,

Ihr sehr ergebener,
J. Herbrand

[1] Siehe Seite 22.
[2] Siehe Seite 23.
[3] Siehe Seite 24.
[4] Siehe Seite 24.
[5] Wir haben nach diesen Fotografien gesucht, sie aber nicht gefunden.

2.1.1 Kommentare

1. Das von Herbrand zitierte „Theorem über Normenreste" besagt folgendes:

> *Sei $K|k$ eine zyklische Erweiterung von Zahlkörpern. Ein Element $a \in k$ ist Norm eines Elements aus K, wenn und nur wenn a für jede Primstelle $\mathfrak{p}$ von k Norm eines Elementes aus der lokalen Erweiterung $K_{\mathfrak{p}}$ ist.*

Es handelt sich also um das Lokal-Global Prinzip für Normen aus zyklischen Erweiterungen (oder, damit gleichbedeutend, das Lokal-Global Prinzip für zyklische Algebren). Aus der Klassenkörpertheorie war das für eine zyklische Erweiterung von Primzahlgrad bekannt (nach Furtwängler 1907). Hasse hatte in seinem Zahlbericht die Vermutung ausgesprochen, dass dieser Normensatz auch für beliebige abelsche Erweiterungen gilt [Has30a].

Auf dem Schiefkörperkongress in Marburg, an dem ja Herbrand teilgenommen hatte, entwickelte Hasse seine neue Theorie der zyklischen Algebren über Zahlkörpern, u.a. die Beschreibung der zyklischen Algebren durch ihre lokalen Invarianten (die heute „Hasse-Invarianten" genannt werden). Dazu war der vermutete Normensatz zumindest für beliebige zyklische Erweiterungen (nicht notwendig von Primzahlgrad) von entscheidender Bedeutung. Jedoch war es Hasse auf dem Kongress nicht gelungen, diesen Satz zu beweisen.

Aber schon eine Woche später, am 6. März 1931, sandte Hasse einen Rundbrief an die Teilnehmer des Kongresses, also auch an Herbrand, mit dem folgenden Text im Telegrammstil:

> *Liebe(r) Herr/Fräulein ...... Habe soeben den fraglichen Normensatz für zyklische Relativkörper bewiesen, und mehr braucht man für die Theorie der zyklischen Divisionsalgebren nicht.*

Herbrand bedankt sich hier aber nicht nur für diese Mitteilung, sondern für den ganzen Beweis. Offenbar hatte ihm Hasse diesen Beweis geschickt. Wir wissen nicht, ob Hasse den Beweis auch an andere Teilnehmer des Schiefkörper-Kongresses geschickt hatte. Jedenfalls erfahren wir durch diesen Brief, dass Herbrand von Hasse als kompetenter Gesprächs- und Briefpartner geschätzt wurde – obwohl er (Herbrand) erst vor einigen Monaten damit begonnen hatte, die Klassenkörpertheorie zu lernen, also auf diesem Gebiet als Neuling einzustufen war.

Der Hassesche Beweis erschien schon im April 1931 in den Nachrichten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften [Has31a]. Gleich anschließend daran publizierte Hasse dort eine Vorankündigung seiner Theorie der zyklischen Algebren [Has31b], die nunmehr durch das Lokal-Global Prinzip ihre Grundlage erhalten hatte. Die ausführliche Darstellung dazu erschien später in den USA in englischer Sprache [Has32b]. Nach dem Gesagten können wir annehmen, dass Herbrand durch Hasse über diese Theorie zyklischer Algebren informiert war.

2. In der unter **1.** genannten Arbeit [Has31a] steht auch ein Gegenbeispiel zu der ursprünglichen Vermutung von Hasse, dass das Lokal-Global Prinzip für Normen aus einer beliebigen abelschen (nicht notwendig zyklischen) Erweiterung gilt. Offenbar hatte Hasse auch dies an Herbrand geschrieben.

Herbrand fragt angesichts dieses Gegenbeispiels, ob man vielleicht aus diesem Grund die Hoffnung aufgeben müsse, die globale Klassenkörpertheorie (KL.K.Th.) aus der lokalen KL.K.Th. herzuleiten. (Er spricht, wie es damals üblich war, von der Kl.K.Th. „im Kleinen“ und „im Großen“, während man heute „lokal“ und „global“ sagt.) Man beachte hierzu, dass die lokale Kl.K.Th. zunächst nur mit Hilfe der globalen Kl.K.Th. entwickelt werden konnte (durch Hasse und F. K. Schmidt [Has30b, Sch30]). Es war aber Herbrand bekannt, dass inzwischen Chevalley eine direkte, nur auf lokalen Daten beruhende Begründung der lokalen Kl.K.Th. gefunden hatte. Denn er nimmt darauf in seinem Bericht über Klassenkörpertheorie Bezug (den er nicht mehr ganz fertigstellen konnte, der aber dann durch Chevalley zum Druck gebracht wurde [Her35]). Dieser Bericht ist derjenige, den Herbrand in seinem letzten Brief an Hasse vom 23. Juli 1931 erwähnt.

Die direkte Begründung der lokalen Kl.K.Th. durch Chevalley findet sich dann in dessen Thèse [Che33b], aber auch schon vorher in [Che33a]. Unabhängig davon hatte das auch Hasse in seiner Abhandlung [Has32a] gefunden, jedenfalls im zyklischen Fall. Beide, Hasse und Chevalley, beziehen sich auf Emmy Noether, die entscheidende Anregungen zur Durchführung dieses Programms gegeben habe. Ferner gab es eine briefliche Ankündigung von F. K. Schmidt, dass auch er die lokale Klassenkörpertheorie direkt aufbauen könne, aber dies ist wohl niemals publiziert worden. Wie es scheint, stand Herbrand in Briefwechsel mit F. K. Schmidt.

Die Befürchtung Herbrands, dass man angesichts des Hasseschen Gegenbeispiels die Hoffnung aufgeben müsse, die globale Theorie aus der lokalen herzuleiten, war etwas zu pessimistisch. Denn nach den Ergebnissen der Arbeit von Brauer-Hasse-Noether [BHN32] kann ja das Lokal-Global Prinzip auf beliebige Galoissche Erweiterungen erweitert werden, wenn man den Normensatz richtig interpretiert, nämlich als Satz über die Noetherschen Faktorensysteme (also beliebige einfache Algebren). Dieses erweiterte Lokal-Global Prinzip, das Herbrand nicht mehr erlebt hat, spielt bis heute eine zentrale Rolle in der Kl.K.Th.

3. Ob Herbrand in diesem Zusammenhang schon überlegt hat, dass und wie man die Abweichung vom Lokal-Global Prinzip der Normen messen kann? Jedenfalls wurde diese Frage einige Jahre später von Arnold Scholz aufgenommen; in zwei hochinteressanten Arbeiten [Sch36, Sch40] untersucht er den heute sogenannten „Scholzschen Knoten“ einer Körpererweiterung, definiert als die Faktorgruppe der Gruppe aller Zahlen, die lokal überall Normen sind, modulo der globalen Normen. Die Scholzschen Resultate wurden zwar längere Zeit vergessen, aber später durch Artin und Tate wiederentdeckt; Artin berichtet in einem Brief an Hasse vom 12. März 1953 darüber. Einen guten Überblick findet man bei Jehne [Jeh79, Jeh82].

4. Offenbar kannte Herbrand die Ergebnisse von Chevalleys Arbeit zur Neubegründung der lokalen Klassenkörpertheorie mit rein lokalen Mitteln. Die Voranzeige dazu erschien laut Jahrbuch der Mathematik noch im Jahre 1930, während die Publikation heute meist mit dem Jahr 1931 zitiert wird [Che31]. Die ausführlichen Beweise dazu erschienen jedoch erst später [Che33a]. Diese Arbeit hatte Hasse in das Crellesche Journal aufgenommen; das von Herbrand erwähnte Resultat findet sich auf Seite 141, jedoch nicht explizit als Satz formuliert.

2.2 28.04.1931, Herbrand an Hasse

BERLIN–Charlot.
Mommsenstr. 47
bei Ehrmann

Berlin, den 28 April,

Sehr geehrter Herr Professor !

Sie können mir einen grossen Dienst leisten. Ich postuliere nämlich ein Stipendium der Princeton Universität. Sie kennen hoffentlich Prof. Maclagan Wedderburn. Können Sie so gütig sein um ihm sofort zu schreiben um mich ihm zu vorstellen ? Ich werde ihm auch schreiben, um ihn zu bitten um einen Brief den ich den Papieren meiner Kandidatur zufügen könnte. Aber es würde natürlich viel besser sein dass er von mir vorher gehört hätte. Desto mehr dass ich in Princeton die Theorie der hyperkomplexen Systeme besonders studieren möchte, und dass Wedderburn ein der amerikanischen Specialisten in diesem Gebiet ist.[1]

Ich habe in die vorigen Wochen einige neue Theoreme des Klassenkörpertheorie gefunden: eine Verallgemeinerung des Theorems des Hauptgeschlechts (immer im zyklischen Fall, natürlich), die die Theoreme B'''', C, 21, 22, und 23 ihres Klassenkörpersbericht verallgemeinert; und eine Verallgemeinerung des Hauptidealsatzes (im Fall des Strahlklassenkörpers, statt des absoluten Klassenkörpers).[2] Alles beruht auf folgendem Lemma:

Sei $\overline{K}$ ein abelscher Oberkörper von k, K ein Zwischenkörper; $\widetilde{\mathfrak{f}}$ der

[1]Hasse hat daraufhin sofort einen Empfehlungsbrief an Wedderburn geschrieben. Die Antwort Wedderburns ist vom 25. 5. 1931 datiert und ist in dieses Buch aufgenommen.

[2]Siehe Seite 27.

Führer[3] von K im bezug auf k; $\widetilde{\mathfrak{M}}$ und $\widetilde{\mathfrak{m}}$ die Führer von $\overline{K}$ im bezug auf K und k. Sei $\widetilde{\mathfrak{m}} = \widetilde{\mathfrak{f}}\,\widetilde{\mathfrak{m}}_0$. Dann gilt: $\widetilde{\mathfrak{M}} = \widetilde{\mathfrak{F}}\,\widetilde{\mathfrak{m}}_0$.

$$\begin{tikzcd} \overline{K} \arrow[d, dash, "\mathfrak{M}"] \arrow[dd, dash, bend right, "\mathfrak{m}"'] \\ K \arrow[d, dash, "\mathfrak{f}"] \\ k \end{tikzcd}$$

Man bestimmt $\widetilde{\mathfrak{F}}$ folgendermassen:

1) $\widetilde{\mathfrak{F}}$ ist teilbar durch keine unendliche Primstelle.

2) Sei ein endliche Primstelle $\mathfrak{p}$ von k, $\mathfrak{P}$ ein Primteiler von $\mathfrak{p}$ in K. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dass $\widetilde{\mathfrak{F}}$ durch $\mathfrak{P}$ teilbar sei, ist dass $\mathfrak{f}$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar sei. Der Beitrag von $\mathfrak{P}$ zu $\widetilde{\mathfrak{F}}$ ist dann $\mathfrak{P}^{1+V}$, wo V die Zahl der Verzweigungsgruppen von $\mathfrak{P}$ im bezug auf k ist (das heisst dass die Verzweigungsgruppe $\sigma\alpha \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{P}^{V+1}}$, eine von 1 verschiedene Ordnung hat, und dass die Verzweigungsgruppe $\sigma\alpha \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{P}^{V+2}}$ von der Ordnung 1 ist).

Dieses Theorem beweise ich mit meinem Theorem über Verzweigungsgruppen, und Ihre Ergebnisse über Verzweigungsgruppen des Klassenkörpers. Eine andere Anwendung ist folgende: die Rechnung von $(H : E^{1-\sigma})$ (Bezeichnungen des Th. 12 Ihres Berichts) im allgemeinen zyklischen Fall.[4]

Ich kann leider Ihnen alles das heute [nicht] genau erklären, denn ich kein Zeit genug habe. Ich werde aber bald Ihnen genau schreiben was ich bisher gefunden habe.

Ich werde Ihnen sehr dankbar sein für den Brief an Wedderburn; und ich bin, mit vorzüglicher Hochachtung,

Ihr sehr ergebener

J. HERBRAND

[3]Siehe Seite 28

[4]Hierzu siehe die Kommentare zum nächsten Brief vom 18. Mai 1931.*

P. S. Ich erlaube mich diesen Brief gleichzeitig in Marburg und in Allendorf[5] zu schicken, denn ich weiss nicht wo Sie jetzt sind, und es ist ziemlich eilig. Ich hoffe dass eine der beiden Adressen richtig ist.

2.2.1 Kommentare

2. Es handelt sich um die zentralen Sätze im Beweis der Hauptsätze der Takagischen Klassenkörpertheorie.

Wenn Herbrand gewisse Theoreme mit ihren Nummern zitiert, so bezieht er sich dabei auf den Hasseschen Klassenkörperbericht, Teil I [Has26] und Ia [Has27]. Die Hassesche Bezeichnung B richtet sich nach dem Abschnitt, in welchem die betreffende Aussage aufgestellt wird; die Aussage B steht demgemäß im Abschnitt „B) Existenzbeweise“ auf Seite 19 von Teil I. Es handelt sich also um den Existenzsatz. Im Laufe der Diskussion wird diese Behauptung bei Hasse Schritt für Schritt umgeformt und auf einfachere Aussagen reduziert; so entstehen nacheinander die Behauptungen B', B'', B''' und schließlich B'''', die von Herbrand zitiert wird.

Die Aussage C steht im Abschnitt „C) Beweis des Umkehrsatzes“ auf Seite 27.

Die von Herbrand erwähnten Sätze 21-23 finden sich in Teil Ia des Hasseschen Berichts, wo es um die Details der Beweise geht. Man findet sie in den §19 und §20 von Teil Ia (sie sind nicht zu verwechseln mit den Sätzen 21 und 22 in Teil I).

Es lohnt sich hier nicht, auf die Details in der Formulierung dieser Sätze einzugehen, denn es handelt sich nur um Herbrands erste Schritte in Richtung einer Vereinfachung und Verallgemeinerung; später wird Herbrand viel mehr erreichen. Vielleicht ist es aber für den Leser lohnend, einmal in den Hasseschen Bericht hineinzusehen, insbesondere in den Teil Ia. Man staunt, dass Herbrand, der ja ein Neuling in der algebraischen Zahlentheorie war, sofort den wesentlichen Kern dieser verschlungenen Beweise erkannt hat, die sich im Laufe der langen Geschichte der Zahlentheorie herausgebildet hatten, aber der modernen Sichtweise nicht mehr recht adäquat erschienen. Er hat nicht nur diese Beweise durchschaut, sondern er geht auch sofort daran,

[5] Allendorf war der Wohnort von Hasses Eltern, und Hasse hielt sich mit seiner Familie öfter dort auf.

zu vereinfachen und dazu zunächst die entscheidenden Fakten herauszuarbeiten. Diese sieht er, in dieser ersten Phase, in dem von ihm formulierten Lemma repräsentiert. (Mehr zu diesem Lemma in den Kommentaren zu dem nächsten Brief vom 18. Mai 1931.)

3. Herbrand benutzt die Tilde in $\widetilde{\mathfrak{f}}$ um anzudeuten, dass auch die unendlichen reellen Primstellen zu berücksichtigen sind. Damit folgt er der Schreibweise in Hasses Klassenkörperbericht [Has27]. Aber schon in seinem nächsten Brief vereinfacht Herbrand die Bezeichnung und lässt die Tilde wieder weg – ohne allerdings die Voraussetzung aufzugeben, dass auch die unendlichen Primstellen zu berücksichtigen sind. Auch in seiner Arbeit in den Hamburger Abhandlungen benutzt Herbrand diese vereinfachte Schreibweise [Her32b]. Mir scheint, dass dies auf den Einfluss Artins zurückzuführen ist, denn sie erfolgte während des Aufenthaltes von Herbrand in Hamburg. Artin hat stets darauf geachtet, sowohl in Vorlesungen als auch in seinen Publikationen, dass die verwendeten Bezeichnungen und Formeln so einfach und klar wie möglich sind.

2.3 18.05.1931, Herbrand an Hasse

$\mathcal{J}.\mathcal{H}.$

Hamburg, den 18 Mai
Pension Hallereck
Hallerstr. 83 , Hamburg.

Sehr geehrter Herr Professor!

Ich danke Sie viel für Ihren Brief an Wedderburn[1]; und auch für Ihre Mitteilung über die Arbeit von Iyanaga[2]: sie ist in sehr enger Beziehung mit meinen Ergebnissen, die doch vollständiger sind. Ich will Ihnen zuerst meine Resultaten genau erklären.[3]

Ich beweise zuerst folgenden Hilfssatz:

I Sei

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[d, leftrightarrow, "\mathfrak{f}"] \arrow[dd, leftrightarrow, bend left, "\mathfrak{m}"] \\
K \arrow[d, leftrightarrow, "\mathfrak{M}"] \\
\overline{K}
\end{tikzcd}$$

$\overline{K}$	ein Abelscher Oberkörper von k				
K	ein Zwischenkörper				
$\mathfrak{f}$	der Führer von	K	in bezug auf	k
$\mathfrak{m}$	〃	$\overline{K}$	〃	k
$\mathfrak{M}$	〃	$\overline{K}$	〃	K

Sei $\mathfrak{m} = \mathfrak{f}\mathfrak{m}_0$; dann gilt

$$\boxed{\mathfrak{M} = \mathfrak{F}\mathfrak{m}_0}$$

[1] Siehe den vorigen Brief vom 28.4.1931.*

[2] Siehe Seite 36.

[3] In den folgenden Ausführungen erklärt Herbrand im wesentlichen seine Resultate aus der Arbeit [Her32b], die 1932 in den Hamburger Abhandlungen erschien. Sie ist dort am 12. Juni 1931 eingegangen, also etwa einen Monat nach diesem Brief an Hasse.

wo $\mathfrak{F}$ folgendermassen bestimmt ist:
Sei $\mathfrak{P}$ irgend ein Primidéal von K, $\mathfrak{p}$ der zugehörige Idéal von k.

a) Wenn $\mathfrak{P}$ unendlich ist, so ist $\mathfrak{P}$ *nicht* in $\mathfrak{F}$ enthalten.

b) Wenn $\mathfrak{P}$ endlich ist, $\mathfrak{F}$ ist durch $\mathfrak{P}$ teilbar nur wenn $\mathfrak{f}$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist. $\mathfrak{F}$ ist dann genau durch $\mathfrak{P}^{1+v}$ teilbar, wo v die Zahl der Verzweigungsgruppen von $\mathfrak{P}$ im bezug auf k ist.

(Das heisst : es gibt $\sigma \neq 1$ derart dass

$$\alpha \equiv \sigma\alpha \pmod{\mathfrak{P}^{v+1}}$$

aber kein $\sigma \neq 1$ derart dass

$$\alpha \equiv \sigma\alpha \pmod{\mathfrak{P}^{v+2}} \qquad \text{für alle } \alpha \text{ von } K$$

II Aus diesem Hilfssatz folgt mühelos, der:

Allgemeiner Hauptgeschlechtssatz. Sei:

K	*zyklischer* Oberkörper von k
σ	eine erzeugende Substitution der Galoischen Gruppe
n	der Relativgrad
$\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{m}$	zwei Ideale (von K et k), die die gleiche Beziehungen zwischen sich haben, wie im Hilfssatz. (Es ist klar dass $\sigma\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$; $\mathfrak{M} \mid \mathfrak{m}$; $\mathfrak{m}$ ist ein Vielfaches des Führers)
$\overline{A}$	die Gruppe der Ideale von K die prim zu $\mathfrak{M}$ sind
A	—————— k —————— $\mathfrak{m}$ ——
$H_{\mathfrak{m}}$	die Gruppe der Ideale von A die kongruent mod $\mathfrak{m}$ zu Normen von Idealen von $\overline{A}$ sind
$\overline{H}_0$	eine Gruppe von Idealen von $\overline{A}$, die modulo $\mathfrak{M}$ erklärt ist, derart dass $G\overline{H}_0 = \overline{H}_0$.
H_1	die Gruppe der Ideale von A, die kongruent modulo $\mathfrak{m}$ zu Normen von Idealen von $\overline{H}_0$ sind
$\overline{H}_1$	die Gruppe von Idealen von $\overline{A}$ mit Normen in H_1 (der Hauptgeschlecht)

$$\begin{tikzcd} & \overline{A} \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{Zahl der Geschlechter}"'] \arrow[d, leftrightarrow] & & \overline{H}_1 \arrow[d, leftrightarrow] & \overline{H}_0 & \text{mod } \mathfrak{M} \\ A \arrow[r, leftrightarrow, "n"'] & H_{\mathfrak{m}} & & H_1 & & \text{mod } \mathfrak{m} \end{tikzcd}$$

1) $\overline{H}_1$ ist gleich der Gruppe der Potenzen $1-\sigma$ von Elementen von $\overline{A} : \overline{H}_0$

2) Wenn $\overline{H}_0$ der Strahl modulo $\mathfrak{M}$ ist, dann ist H_1 der Strahl modulo $\mathfrak{m}$ (dieser Teil ist wahr im nicht–zyklischen Fall)

3) Die Zahl der Elemente von $\overline{A} : \overline{H}_0$ die durch σ invariant sind (ambige Klassen), ist der $n^{\underline{\text{te}}}$ Teil der Zahl der Elemente von $A : H_1$

Bemerkungen

1) $\overline{H}_0$ ist eine *beliebige* Gruppe (denn es gibt $\mathfrak{M}$ die so gross sind wie man will)

2) Besondere Fälle des Th. sind die Theoreme $21, 22, 23, \mathrm{B}''''$, C, Ihres Berichts (Teile Ia und I)

Wann $\mathfrak{m} = 1$[4] dann ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$ (im Hilfssatz bestimmt) ; man kann im *allgemeinen zyklischen Fall*, für $\overline{H}_0$ die Hauptidealklassen nehmen. $\mathfrak{F}$ ist der übliche Geschlechtermodul.

Beweis Man betrachtet die der Gruppen zugehörigen Klassenkörper.

III Aus dem Hilfssatz folgt *trivialerweise* :

Allgemeiner Hauptidealsatz. Sei K der Strahlklassenkörper modulo $\mathfrak{f}$. Jedes Ideal von k wird Hauptideal in K, und liegt im Strahl modulo $\mathfrak{F}_0$. $\mathfrak{F}_0$ ist folgendermassen bestimmt: sei $\mathfrak{F}$ derselbe Ideal wie im Hilfssatz; $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F} \times$ die unendliche Primstellen die in $\mathfrak{f}$ enthalten sind. Man beweist unmittelbar dass $\mathfrak{F}$ dieselbe Modul ist wie bei Iyanaga. Der "Führersatz" von Iyanaga ist eine triviale Folgerung meines Hilfssatzes.

[4] Handschriftlicher Vermerk (von H. Hasse ?): "$\mathfrak{m}_0$?"

Aber ich habe ein explicites Formel für diesen $\mathfrak{F}$ (im Hilfssatz), und viel einfachere Beweise.

IV
Einheiten–Hauptgeschlechtssatz.

Aus II, durch eine Umkehrung des gewöhnlichen Beweises, hat man folgenden Satz:

$$(H : E^{1-\sigma}) = \frac{n}{2^\rho}\,(\varepsilon : \eta) \tag{1}$$

(Bezeichnungen Ihres Berichts, Teil Ia, Seite 92 ff)

$$\rho = \text{ Zahl der unendlichen Primstellen des Führers.}$$

Ich brauche dafür Ihren neuen Satz über Normenreste. Wollen Sie so gütig sein, um mich zu erlauben dieses Theorem zu erwähnen, in der Abhandlung die ich jetzt schreibe und die diese Resultaten enthält: Es ist unentbehrlich um (1) zu beweisen.

Bemerkung Nehmen wir an dass (1) direkt bewiesen ist; und dass

$$(\alpha : r) = m \cdot 2^\rho \tag{2}$$

bewiesen ist ($\alpha \neq 0$, r Normenreste mod $\mathfrak{f}$). ($m =$Produkt der Grade der verschiedenen Trägheitskörper)

Dann folgt *wie im Primzahlgrad–Fall*, die Theoreme von Takagi, und Ihr Theorem über Normenreste.

Aber (2) ist der Haupt Resultat der Theorie des Klassenkörpers im Kleinen.

So, wenn (1) bewiesen ist, würden direkt folgen die Theoreme von Takagi im allgemeinen zyklischen Fall, und würde man vermeiden den schweren Beweis des Hauptgeschlechter–Satz im Fall ℓ^ν; daher eine *grosse* Vereinfachung im Takagischen Beweis.

Aber (1) ist eine gruppentheoretische Tatsache, die man zweifellos wie im Primzahlgrad–Fall beweisen kann. Andererseits, glaube ich, wenn ich gut verstanden habe, dass Herr Chevalley sie vor kurzem direkt bewiesen hat.[5]

[5]Siehe den nächsten Brief vom 27.05.1931.*

In dieser Richtung, kann man die Kl. Körper Theorie im Kleinen anwenden; ich glaube, es ist die wahre Richtung.

Mit solcher und anderen Vereinfachungen konnte der Takagische Beweis ganz einfach geführt werden; erlauben Sie mir zwei kleine Vereinfachungen, zum Beispiel, zu zeigen:

1.) Ihrer Bericht, Teil Ia, Seite 118 und 119; man soll beweisen dass : der Modul $\mathfrak{f}_{Kk}$ Teiler des kleinsten Multiplums in k des Moduls $\mathfrak{F}_{K'k'}$ ist.

Beweis $\mathfrak{P}'$ Primideal von K', der $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}$, und $\mathfrak{P}$ in K, k und k' gibt. (prim zu ℓ <u>oder nicht</u>)

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \mathfrak{P}'^{e} \cdots \\ \mathfrak{p} &= \mathfrak{p}'^{e'} \cdots \\ \mathfrak{f}_{K'k'} &= \mathfrak{p}'^{1+V} \cdots \\ \mathfrak{f}_{Kk} &= \mathfrak{p}^{1+v} \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} & K' \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] \\ K \arrow[dd, dash] & \\ & k' \arrow[dl, dash] \\ k & \end{tikzcd}$$

wo V (bzw. v) die Zahl der Verzweigungsgruppen von $\mathfrak{p}'$ (bzw. $\mathfrak{p}$) ist. $v = V = 0$, wenn $\mathfrak{p}$ prim zu ℓ ist).

$$A' \equiv \sigma A' \qquad (\text{mod } \mathfrak{P}'^{1+V}) \qquad (A' \text{ in } K' \text{ beliebig}),$$

wo σ die Gruppe von K'/k' in K/k erzeugt. Daher im besonderen:

$$A \equiv \sigma A \qquad (\text{mod } \mathfrak{P}'^{1+V}) \qquad \text{für eine Zahl } A \text{ von } K\,.$$

Daher

$$A \equiv \sigma A \qquad (\text{mod } \mathfrak{P}'^{1+n})$$

wo $1+n$ die kleinste ganze Zahl ist, die $\geq \frac{1+V}{e}$ ist. Sei $\left[\frac{1+V}{e}\right]$ $(= 1+n)$ diese Zahl. Man sieht dass $1+v \leq \left[\frac{1+V}{e}\right]$.

Aber der kleinste Multiplum in k von $\mathfrak{f}_{K'k'}$ ist

$$\mathfrak{f}'_{Kk} = \mathfrak{p}^{\left[\frac{1+V}{e'}\right]}$$

Der Satz folgt dann aus $e' = e$ der trivial ist (wenn man die Trägheitsgruppe, zum Beispiel, betrachtet : da die Ordnungen von $K : k$ und $k' : k$, prim zueinander sind, ist die Trägheitsgruppe der directe Produkt, einer Untergruppe der Galoisschen Gruppen von K'/K und einer Untergruppe der Galoisschen Gruppe von K'/k')

2. Seite 113, im Beweis des Umkehrsatzes.[6] Man kann die Hilfsideale vermeiden. Man muss beweisen, dass

$$m_1 + m_2 \geq m\,.$$

a) es ist leicht zu beweisen dass

$$\ell^{\,m_1+m_2} \;=\; (\mathfrak{a} : \mathfrak{m}_1(\mu_2)\mathfrak{a}^{\ell}\,)$$

(dieselbe Bezeichnungen wie in Ihrem Bericht, aber man fügt die Bedingung hinzu: $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{m}_1$, μ_2, prim zu den $\bar{\mathfrak{l}}'$, $\mathfrak{l}''$, $\mathfrak{p}''_{\infty,1}$ (kurz, : prim zu

$$\mathfrak{f}_1 = \prod \bar{\mathfrak{l}}'^{\,\overline{e}'_0\ell-\overline{\varpi}'} \prod \mathfrak{l}''^{\,e_0\ell} \prod \mathfrak{p}''_{\infty,1}\,)$$

Daher:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\ell^{\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2}-1}{\ell-1} & \text{ist die Zahl der Idealgruppen die mod } \mathfrak{f}_1 \\ & \text{erklärt sind, und für welche die } \mathfrak{p} \text{ und die } \mathfrak{l}' \\ & \text{in der Hauptklasse sind.} \end{array} \right.$$

b) $$(\omega : \alpha^{\ell}) \;=\; \ell^{\,m}$$

Die $k(\sqrt[\ell]{\alpha})$ sind, wie leicht die Theorie der Kummerschen Körper zeigt, die Körper von Führer $\mathfrak{f}_1$, wo die $\mathfrak{p}$ und die $\mathfrak{l}'$ voll zerfällen. Daher:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\ell^{m}-1}{\ell-1} & \text{ist die Zahl der Körper } k(\sqrt[\ell]{\omega})\text{, von Führer } \mathfrak{f}_1\text{,} \\ & \text{wo die } \mathfrak{p} \text{ und die } \mathfrak{l}' \text{ voll zerfällen.} \end{array} \right.$$

Aber zu jedem solchen Körper gehört eine Gruppe die modulo $\mathfrak{f}_1$ erklärt ist, und wo $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{l}'$ in der Hauptklasse liegen. (ist schon bewiesen). Man hat dann:

$$m \leq m_1 + m_2$$

[6] Die Seitenzahl bezieht sich auf Teil Ia des Hasseschen Klassenkörperberichts [Has27].

w. z. b. w.

Wörtlich ist dieser Beweis vielleicht nicht kürzer als der andere; aber sie benutzt keine neue Idee.

Ich bin überzeugt dass, mit verschiedenen unwesentlichen Vereinfachungen, werden so allmählich die Takagischen Beweise sehr einfach sein, ich habe Ihnen schon gesagt wie die Hilbertsche Theorie der Galoisschen Körper vereinfacht sein kann.

Verzeihen Sie, bitte, diesen langen Brief. Ich möchte doch noch Ihnen zwei kleine Theoreme sagen, die ich vor kurzem bewiesen habe:

1°) *Sei* K *ein metazyklischer Oberkörper von* k *,* $\mathfrak{d}$ *sein Diskriminant; man hat* $\mathfrak{d} = \mathfrak{a}^2(\beta)$ *wo* $\beta \equiv 1$ $(mod\, \mathfrak{m})$ *ist;* $\mathfrak{m}$ *ist der grösste Idealteiler von +++ der prim zu* $\mathfrak{d}$ *ist.*

Die Sache bietet einige Schwierigkeiten nur im Fall des Grads 2 : die nachherige Verallgemeinerung ist trivial.

Man kann vergleichen mit dem Theorem von Hecke:

Für irgend einen K $\mathfrak{d} = \mathfrak{a}^2(\beta)$ (β eine Zahl)

2°) k ein Körper; K und K' Oberkörper (*nicht galoisch*)

$\mathfrak{P}'$ ein Primideal von KK'; $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{p}$ die zugehörigen Ideale in K', K, k .

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & k, \mathfrak{p} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ K', \mathfrak{p}' \arrow[dr, dash] & & K, \mathfrak{P} \arrow[dl, dash] \\ & KK', \mathfrak{P}' & \end{tikzcd}$$

n	der Grad von	K	im bezug auf	k
n'	der Grad von	KK'	———	K'
f'	———	$\mathfrak{P}'$	———	$\mathfrak{p}'$
f	———	$\mathfrak{P}$	———	$\mathfrak{p}$
$\mathfrak{p}'$	$= \mathfrak{P}'^{e'} \cdots$,	$\mathfrak{p}$	$= \mathfrak{P}^{e} \cdots$,	

a) $e' \leq e$, $f' \leq f$

b) Wenn $n' = n$, so ist e' ein *Teiler* von e , f' ein *Teiler* von f .

Ich brauchte dieses Theorem in der Theorie des unendlichen Körpers.[7] Aber der Beweis ist ziemlich kompliziert für einen so elementaren Satz. (Zerfällung einer Gruppe in Bezug auf einen Doppelmodul)

Mit vorzüglicher Hochachtung

Ihr sehr ergebener

J. Herbrand

2.3.1 Kommentare

2. Es handelt sich um die Arbeit von Iyanaga [Iya29] über den Führer zyklischer Erweiterungen. Diese Arbeit hatte Iyanaga 1929 während seines undergraduate-Studiums bei Takagi in Tokyo geschrieben. Offenbar kannte Hasse die Arbeit, vielleicht hatte er vom Autor einen Sonderdruck erhalten.

Später, im Wintersemester 1931/32 war Iyanaga als Stipendiat in Hamburg (wo er aber Herbrand nicht mehr antraf) und hörte die Vorlesung von Artin über Klassenkörpertheorie. Auch Chevalley war dabei. In den Jahren 1932-1934 hielt sich Iyanaga in Paris auf, wo er gemeinsam mit Chevalley arbeitete. Während seiner Zeit in Paris verfasste er von seiner früheren Arbeit eine neue Version [Iya34], aufbauend auf Hasses gerade neu entwickelte systematische Theorie der Normenreste aus Galoisschen Erweiterungen [Has34a].

[7] Von Herbrand sind drei Arbeiten über unendliche Zahlkörper erschienen: [Her31a], [Her32c], [Her33b].

2.4 27.05.1931, Herbrand an Hasse, mit Anlage

Sehr geehrter Herr Professor,

Ich bin sehr froh Ihnen einen „vernünftigen Beweis“ der Takagischen Sätze mitteilen zu können.

Wie ich in meinem letzten Brief* gesagt hatte, genügt es, um zu beweisen dass jeder relativ–zyklische Körper Klassenkörper (im Takagischen Sinne) ist, folgenden Satz zu beweisen[1]:

Sei k ein Körper; K relativ zyklisch vom Grad m (beliebig); ρ die Anzahl der verzweigten unendlichen Primideale von k;

$$\begin{array}{ll} \varepsilon & \text{die Einheiten von } k \\ E & \text{die Einheiten von } K \\ H & \text{die } E \text{ von Norm } 1: \; N(E) = 1 \end{array}$$

Dann gilt:

$$\big(\varepsilon : N(E)\big) \;=\; \frac{2^{\rho}}{m}\big(H : E^{1-\sigma}\big)$$

Der Beweis wurde mir soeben von Herrn Chevalley mitgeteilt, und er ist merkwürdig einfach; ich schreibe ihn hier wieder, mit einigen weiteren Vereinfachungen:[2]

Betrachten wir eine Basis der Einheiten von K, derselben Form wie in meiner Note der ComptesRendus[3] über der Einheiten (grosso modo: eine

[1]Siehe Formel (1) im vorangegangenen Brief*.
[2]Siehe Seite 42.
[3]Es handelt sich um die Arbeit [Her31c].

Basis, die, von konjugierten Einheiten gebildet ist); mein Beweis der Existenz einer solchen Basis ist, im zyklischen Fall sehr einfach (am Ende der zweiten Note); im Fall der Primzahlgrad, ist es trivial.

Sei E' die Einheiten, die Produkte von positiven oder negativen ganzzahligen Potenzen der Einheiten dieser Basis sind. Dann ist $(E : E')$ endlich (es ist mein Theorem über Einheiten).

a) $$\big([E', \varepsilon] : N(E')\big) = 2^\rho \qquad (N \text{ ist der Norm}) \tag{1}$$

Man sieht dass unmittelbar, indem man sucht welche Einheiten E' invariant für σ sind) (Sehen Sie, bitte, die Note* dagegen.)

b) Nicht weniger einfach sieht man dass:

$$\big([E', H] : E'^{1-\sigma}\big) = m \tag{2}$$

Dann schreibt man:

$$\begin{aligned}
(E : E') &= (E : E'H)\,(E'H : E')\ ; \text{ nehmen wir die Normen von } E \\
&= \big(N(E) : N(E')\big)\,\big(H : [E, H]\big) \qquad (3)\\
&= \big(N(E) : N(E')\big)\,\frac{(H : E^{1-\sigma})\,(E^{1-\sigma} : E'^{1-\sigma})}{\big([E', H] : E'^{1-\sigma}\big)} \\
(E : E') &= (E : \varepsilon E')\,(\varepsilon E' : E') \quad \text{nehmen wir die } 1-\sigma \text{ Potenzen von: } E \\
&= (E^{1-\sigma} : E'^{1-\sigma})\,\big(\varepsilon : [E', \varepsilon]\big) \\
&= (E^{1-\sigma} : E'^{1-\sigma})\,\frac{\varepsilon : N(e')}{\big([E' : \varepsilon] : N(E')\big)} \qquad (4)
\end{aligned}$$

Von (1) und (2) und (3) und (4) kommt:

$$(H : E^{1-\sigma}) = (\varepsilon : N(E))\,\frac{\big([E', H] : E'^{1-\sigma}\big)}{\big([E', \varepsilon] : N(E')\big)} = \big(\varepsilon : N(E)\big)\,\frac{m}{2^\rho}$$

w. z. b. w.

Mit der Klassenkörpertheorie im kleinen, kann man dann den Beweis wie im Primzahlgradfall führen; und Ihre neue Theorem über Normenreste beweisen.

Ich war sehr erstaunt als ich sah wie einfach dieser neue Beweis war. Herr Chevalley sagt auch mir dass die Klassenkörpertheorie im kleinen mit analogen Methoden gegrundet sein kann (man betrachtet eine Basis der $\mathfrak{p}$–adischen

Zahlen statt der Einheiten), und dass der Existenz Beweis der Klassenkörper nur im Fall von unverzweigten Zahlkörpern geführt zu sein braucht, wenn man der Existenzsatz der Klassenkörpertheorie im kleinen voraus setzt. Woher eine grosse Vereinfachung.[4]

Erstatten Sie mir jetzt Ihnen zu zeigen wie man die Hilfsideale vermeiden kann.[5] Ich nehme dieselbe Bezeichnungen wie in Ihrem Bericht. Wie aus meinem letzteren Brief* folgt, muss ich beweisen dass die Anzahl der Gruppen mod. $\mathfrak{f}_1$, wo die $\mathfrak{p}$ und die $\mathfrak{l}'$ in Hauptklasse sind, zu $m_1 + m_2$ entspricht. Ich habe gesetzt:[6]

$$\mathfrak{f}_1 = \prod \overline{\mathfrak{l}'}^{\,\overline{e}'_0\ell - \overline{\omega}'} \prod \mathfrak{l}''^{\,e''_0\ell} \prod \mathfrak{p}''_{\infty,1}$$

Sie beweisen dass man in den Definitionen von α, α_0, μ_1 die Bedingung "prim zu $\mathfrak{f}_1$" hinzufügen kann ohne den Index $(\alpha : \mu_1\mu_2)$ zu ändern. Man beweist ähnlicherweise dass man dieselbe Bedingung in den Definitionen von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{m}_1$ hinzufügen kann, ohne $\big(\mathfrak{a} : \mathfrak{m}_1(\alpha)\big)$ zu ändern. Von jetzt an setze ich diese veränderten Definitionen voraus, so dass alle die α, α_0 sind. Man hat:

$$\begin{aligned} \big((\alpha) : (\mu_1\mu_2)\big) &= (\alpha|\varepsilon : \mu_1\mu_2|\varepsilon) = (\alpha : \mu_1\mu_2) \\ \big[\mathfrak{m}_1(\mu_2), (\alpha)\big] &= (\mu_1\mu_2) \end{aligned}$$

wie man leicht sieht. Woraus:

$$\begin{aligned} \ell^{m_2} = (\alpha : \mu_1\mu_2) &= \big((\alpha) : (\mu_1\mu_2)\big) = \big((\alpha) : [\mathfrak{m}_1(\mu_2), (\alpha)]\big) \\ &= \big(\mathfrak{m}_1(\mu_2)(\alpha) : \mathfrak{m}_1(\mu_2)\big) \\ &= \big(\mathfrak{m}_1(\alpha) : \mathfrak{m}_1(\mu_2)\big) \end{aligned}$$

Dann

$$\big(\mathfrak{a} : \mathfrak{m}_1(\mu_2)\big) = \big(\mathfrak{a} : \mathfrak{m}_1(\alpha)\big)\big(\mathfrak{m}_1(\alpha) : \mathfrak{m}_1(\mu_2)\big) = \ell^{m_1+m_2}$$

Aber $\mathfrak{m}_1(\mu_2)$ ist die Gruppe die von μ_2, den $\ell^{\underline{\text{ten}}}$ Idealpotenzen, und den $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{l}'$ erzeugt ist. $\mathfrak{m}_1(\mu_2)$ ist die grösste Gruppe die mod. $\mathfrak{f}_1$ erklärt ist, von

[4] Artin sprach in einem Brief an Hasse von „ungeheuren Vereinfachungen der Klassenkörpertheorie, die von Chevalley und Herbrand stammen". Siehe [FR08], Brief vom 10.6.1931.

[5] Siehe Seite 34.

[6] Notiz am Rande, augenscheinlich von J. Herbrand: "Die definition von μ_2 ist dann $\mu_2 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}_1}$".

Typus $(\ell, \ell, \ldots, \ell)$, und die die $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{l}'$ enthält. Woraus die zu beweisende Tatsache.

Mit allen diesen Bemerkungen wird die Herleitung der Takagische Theorie aus der Klassenkörpertheorie im kleinen sehr einfach (vielleicht nicht mehr als 15 Seiten...).

Ihre Bemerkung über meinen Ausdruck "der allgemeine Hauptidealsatz folgt trivialerweise aus meinem Lemma", ist natürlich zutreffend: was trivial ist, ist die Reduktion zum Satz X, S. 173 ihres zweiten Berichts.[7]

Ich danke Sie viel für Ihre Separate die ich soeben bekommen habe.

Mit vorzüglicher Hochachtung,

Ihr sehr ergebener

J. Herbrand

P. S. Ich bekomme genau jetzt Ihren letzten Brief. Ich kennte nicht diese Arbeit, und ich danke Sie viel für Ihre Mitteilung.

[7]Gemeint ist Teil II des Hasseschen Klassenkörperberichts [Has30a].

Note[8]

Es ist besser mein Theorem in einem präziseren Form zu schreiben

(die ohne weiteres von dem ursprünglichen Satz folgt); im Fall der uns interessiert, eines relativ zyklischen Körpers, lautet es so:

Sei σ eine erzeugende Substitution; man kann ein System von Einheiten von K bestimmen:[9]

$$\begin{array}{cccc}
\varepsilon_1^{(1)} & \varepsilon_2^{(1)} & \cdots & \varepsilon_n^{(1)} \\
 & \vdots & & \\
\varepsilon_1^{(p)} & \varepsilon_2^{(p)} & \cdots & \varepsilon_n^{(p)} \\
\eta_1^{(1)} & \eta_2^{(1)} & \cdots & \eta_{\frac{n}{2}}^{(1)} \\
 & \vdots & & \\
\eta_1^{(\rho)} & \eta_2^{(\rho)} & \cdots & \eta_{\frac{n}{2}}^{(\rho)}
\end{array}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

a) $\sigma\varepsilon_i^{(n)} = \varepsilon_{i+1}^{(n)}\,, \quad \sigma\varepsilon_n^{(n)} = \varepsilon_1^{(n)}$

b) $\sigma\eta_i^{(n)} = \eta_{i+1}^{(n)} \qquad \sigma\eta_{\frac{n}{2}}^{(n)} = \eta_1^{(n)}$ (woher folgt $\sigma^{\frac{n}{2}}\eta_i^{(n)} = \eta_i^{(n)}$

c) Die Einheiten die von diesen Elementen erzeugt sind, bilden eine Untergruppe von endlichen Grad aller Einheiten von K.

d) Die einzige Relation zwischen diesen Einheiten ist:

$$\varepsilon_1^{(1)}\varepsilon_2^{(1)}\cdots\varepsilon_n^{(1)} = 1 \tag{5}$$

Die Relationen (1) und (2) sind dann elementar.

In dem Fall wo $p = 0$, kann man das System bestimmen derart dass

$$\eta_1^{(1)}\ldots\ldots\eta_{\frac{n}{2}}^{(1)} = 1$$

[8]Auf diese Note hatte Herbrand auf Seite 38 verwiesen.

[9]Im folgenden bezeichnet Herbrand den Körpergrad mit n, während er früher auf Seite 38 den Grad mit m bezeichnet hatte.

statt (5). Dann hat man

$$\big([E', \varepsilon] : N(E')\big) = 2^{\rho-1} \qquad \big([E', H] : {E'}^{1-\sigma}\big) = \frac{n}{2}$$

und am Ende des Beweises findet man dasselbe Wert für $H : E^{1-\sigma}$.

2.4.1 Kommentare

2. Die folgende Rechnung ist wohl das erste bekannte Dokument, in welchem das heute so genannte Herbrandsche Lemma angewandt wird. Erinnern wir uns: Es seien

G eine abelsche Gruppe,
μ, ν vertauschbare Endomorphismen von G.

G^μ, G_μ seien Bild und Kern von G unter μ, und entsprechend für ν. Es wird vorausgesetzt, dass $\mu\nu = 0$. Dann ist offenbar

$$G^\mu \subset G_\nu \qquad \text{und} \qquad G_\nu \subset G_\mu$$

und das Herbrandsche Lemma besagt:

> *Ist $H \subset G$ eine Untergruppe von endlichem Index, die durch μ und ν in sich abgebildet wird, so gilt*
>
> (1) $$\frac{(G_\nu : G^\mu)}{(G_\mu : G^\nu)} = \frac{(H_\nu : H^\mu)}{(H_\mu : H^\nu)}$$

Die linke Seite heißt der „Herbrand-Quotient“ von G (bezügl. μ, ν). Der Herbrand-Quotient ändert sich also nicht, wenn G durch eine Untergruppe von endlichem Index ersetzt wird.

In den Rechnungen auf Seite 38 nehmen E, E' die Rolle von G, H ein, und es wird $\mu = 1 - \sigma$, $\nu = N = 1 + \sigma + \cdots + \sigma^{m-1}$ gesetzt. Dann besagt das Ergebnis dieser Rechnungen, dass zur Berechnungen des Herbrand-Quotienten der Einheitengruppe E diese ersetzt werden kann durch die Untergruppe E'. Diese besitzt, wie Herbrand in der „Note“erläutert, eine Basis, die sich der Wirkung der Galoisgruppe anpasst, sodass der Herbrand-Quotient einfach zu bestimmen ist. Der Herbrandsche Beweis für diese Basisdarstellung findet sich in [Her31c]. Er wurde von Artin in [Art32] vereinfacht, indem Artin ohne die Darstellungstheorie von Gruppen auskommt und stattdessen direkt an die Minkowskische Methode für den Beweis des Dirchletschen Einheitensatzes anknüpft.

Bemerkung: Wie Herbrand in diesem Brief berichtet, stammt die ursprüngliche einfache Beweisidee von Chevalley, und Herbrand hat dann noch Vereinfachungen angebracht. Eigentlich müsste es also das „Lemma von Chevalley-Herbrand“ heißen. Aber Chevalley hat den Namen „Lemme de Herbrand“ geprägt, bei dem es dann geblieben ist.

2.5 29.06.1931, Herbrand an Hasse

Göttingen, den 29 Juni

J. Herbrand
10 Rue Viollet–le–Duc
PARIS (9)

Göttingen, Prinz–Albrechtstr. 4, bei Alt[1]

Sehr geehrter Herr Professor!

Seit meinem letzten Brief*, sind grosse weitere Vereinfachungen der Klassenkörpertheorie gekommen. Erstatten Sie mir sie Ihnen mitzuteilen.

I) Ich habe den Existenzbeweis[2] völlig umgeformt, und ich zeige gleichzeitig dass das Zerlegungsgesetz wahr ist im Fall des Primzahlgrad, wenn die $\ell^{\underline{\text{ten}}}$ Einheitswurzeln im Grundkörper sind: der allgemeine Fall des Zerlegungsgesetzes beweist man dann gleichzeitig mit dem Existenzbeweis, mit derselben Rekursion, ohne Schwierigkeiten.[3]

Im dem gesagten Fall, lautet der Beweis so:

Betrachten wir die Ideale:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f} &= \prod \mathfrak{p} \prod \mathfrak{p}_{\infty,1} \prod \mathfrak{l}_1^{e_1\ell+1} \prod \mathfrak{l}_2^{e_2\ell} \prod \mathfrak{l}_3^{w+1} \\
\mathfrak{f}' &= \prod \mathfrak{p}' \prod \mathfrak{p}'_{\infty,1} \prod \mathfrak{l}_3^{e_3\ell-w} \prod \mathfrak{l}_2'^{e_2'\ell} \prod \mathfrak{l}_1'^{e_1'\ell+1}
\end{aligned}$$

[1]Dieser Adress-Vermerk ist offenbar von Hasse eingetragen.

[2]Gemeint sind Existenzbeweis, Zerlegungsgesetz im Sinne des Hasseschen Klassenkörperberichtes [Has26].

[3] Vermerk am Rande, offenbar von H. Hasse: “Artinsches R.G. auch?”.

wo $0 < w < e_3\ell$. Die $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ sind irgendwelche prim zu ℓ Ideale (jeder $\mathfrak{p}$ verschieden von den $\mathfrak{p}'$); die $\mathfrak{p}_{\infty,1}$ und $\mathfrak{p}'_{\infty,1}$ bilden alle die unendlichen Primstellen ($\mathfrak{p}_{\infty,1}$ von den $\mathfrak{p}'_{\infty,1}$ verschieden); die $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_3$, $\mathfrak{l}'_2$, $\mathfrak{l}'_1$ bilden alle die Primteiler von ℓ, und kein Ideal darf gleichzeitig zweimal vorhanden sein.

Sei $K_\mathfrak{f}$ die Zahl der Körper von Modul $\mathfrak{f}$ oder ein Teiler wo die $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{l}'_1$ völlig zerfallen; $K_{\mathfrak{f}'}$ die Zahl der Körper vom Modul $\mathfrak{f}'$ oder ein Teiler wo die $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{l}_1$ völlig zerfallen.

Sei $G_\mathfrak{f}$ die Zahl der Gruppen von Index ℓ, von Führer $\mathfrak{f}$, wo die $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{l}'_1$ in der Hauptklasse liegen; $G_{\mathfrak{f}'}$ die Zahl der Gruppen vom Index ℓ, von Führer $\mathfrak{f}'$, für welche die $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{l}_1$ in der Hauptklasse liegen.

Nach dem Umkehrsatz:

$$\begin{aligned} K_\mathfrak{f} &\le G_\mathfrak{f} \\ K_{f'} &\le G_{\mathfrak{f}'} \end{aligned} \tag{1}$$

Die $K_\mathfrak{f}$ Körper sind durch $\sqrt[\ell]{\omega}$ erzeugt, wenn:

1) $\omega \underset{(\ell)}{\equiv} 1 \pmod{\mathfrak{f}'}$

2) ω ist von zu ℓ primer Ordnung höchstens für die $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{l}_1$

Das ist leicht zu sehen. Daraus kommt: $K_\mathfrak{f} = (\omega : \alpha^\ell)$.
Aber dieselbe Rechnung wie in der Seite 109 Ihres Berichts gibt:[4]

$$G_\mathfrak{f} = K_{\mathfrak{f}'} \cdot \ell^{R_Z(\mathfrak{f})-(r+1+p'+L'_1)}$$

Ahnlich (denn $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{f}'$ bilden dieselbe Rolle) :

$$G_{\mathfrak{f}'} = K_\mathfrak{f} \cdot \ell^{R_Z(\mathfrak{f}')-(r+1+p+L_1)}$$

Daher:

$$G_\mathfrak{f} G_{\mathfrak{f}'} = K_\mathfrak{f} K_{\mathfrak{f}'} \, \ell^{R_Z(\mathfrak{f})+R_Z(\mathfrak{f}')-[2r+2+p+p'+L_1+L'_1]}$$

Eine leichte Rechnung gibt:

$$R_Z(\mathfrak{f}) + R_Z(\mathfrak{f}') = 2r + 2 + (p + p' + L_1 + L'_1)$$

[4] Vermerk am Rande, offensichtlich von J. Herbrand: „p, p', L, L', sind die Zahlen der Ideale $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}'_1$. “

Daraus folgt:

$$K_{\mathfrak{f}} = G_{\mathfrak{f}} \qquad \text{die Ungleichung (1) wird eine Gleichung)}$$

Die Zahl der Gruppen vom Führer $\mathfrak{f}$ wo die $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{l}_1'$ in der Hauptklasse sind, ist gleich der Zahl der Körper vom Modul $\mathfrak{f}$, für welche die $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{l}_1'$ völlig zerlegen: es ist gleichzeitig der Existenzsatz (wenn es keine $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{l}_1'$ gibt) und der Zerlegungssatz.

Artin hat gezeigt dass man diesen Beweis noch weiter vereinfachen kann, wenn man auf den genauen Wert des Führers verzichtet. Dann braucht man nicht mehr die Theorie des Kummerschen Körpers vorauszusetzen. (nur die trivialen Tatsachen sind notwendig).

2) Ich habe einen anderen Beweis des fundamentalen Satzes der Klassenkörpertheorie im kleinen gefunden, der viel einfacher ist als derjenige von Chevalley mir skizziert hat. Er ist kaum länger als der Beweis der Einheiten-Satzes.

3) Es ist mir gelungen Ihre Beweise für die Bestimmung der Verzweigungsgruppen und des Führers, mit Hilfe meines Theorems über Verzweigungsgruppen, viel zu vereinfachen.

Es sind da die wichtigsten Vereinfachungen; aber in den Einzelheiten, gibt es noch viel andere Sachen die sehr einfach geworden sind. Die Theorie ist jetzt völlig elementar, bis auf der Rechnung des Führers die noch einige komplizierten Beweise verlangt (nämlich, der Hilfssatz der Seite 81 Ihres Berichts in welchem ich die Formeln $(15\,\alpha)$ und $(15\gamma_0)$ noch brauche)

Ich habe mich entschlossen, die Theorie in seiner neuen Form in einer ausführlichen Darstellung zu schreiben, denn alle die Beweise sind jetzt völlig umgeformt.[5]

Können Sie eine kleine Arbeit über Mathematischen Logik in Ihrer Zeitschrift nehmen? Es würde sehr unbequem für mich sie durch Hilbert in den Math. Ann. erscheinen zu lassen, denn ich würde gezwungen lang zu warten. Ich habe nämlich schon da eine Arbeit über unendliche Körper, und sie würden nicht zwei Arbeiten in französischer Sprache desselben Autors gleichzeitig publizieren. Es handelt sich von einer kurzen Abhandlung von

[5] Dazu ist es nicht mehr gekommen. Chevalley hat Herbrand's Manuskript redigiert, ergänzt und herausgegeben [Her35].

etwa 8–10 Seiten, wo ich einen Beweis der Widerspruchlosigkeit einer grossen Teil der Arithmetik gebe.[6]

Ich bin jetzt für einige Wochen in Göttingen. Ich werde nächsten Jahr nach Princeton fahren, denn ich habe die Stiftung die ich postulirte, erhalten. Ich danke Sie noch einmal für Ihren Brief an Wedderburn der mir diese Sache viel vereinfacht hat.[7]

Mit vorzüglicher Hochachtung,

Ihr sehr ergebener,

J. Herbrand

[6] Siehe dazu den nächsten Brief.*

[7] Siehe den Brief vom 28.04.1931. *

2.6 23.07.1931, Herbrand an Hasse

Paris, den 23 ten Juli,
10 Rue Viollet–le–Duc (9)

Sehr geehrter Herr Professor

Ich schicke Ihnen gleichzeitig das Manuscript meiner Arbeit über die Widerspruchlosigkeit der Arithmetik.[1]

Ich kann leider nicht Ihnen meine zukünftige Arbeit über Klassenkörpertheorie für das Crelle's Journal geben, denn ich habe sie schon seit lange für die Hamburger Einzelhefte versprochen.[2]

Ich habe noch gesucht die Klassenkörpertheorie weiter zu vereinfachen. Die grösste Schwierigkeit ist jetzt die Berechnung des Führers im Fall des Primzahlgrad: mit Hilfe meines Theorems über Verzweigungsgruppen, ist es dann leicht Ihre allgemeine Theoreme zu beweisen. Es würde zum Beispiel wünschenwert durch einen direkten Beweis, ohne Rechnungen, zu zeigen dass $\mathfrak{l}^{v+1}$ das kleinste Potenz von $\mathfrak{l}$ ist, derart dass jede Zahl die kongruent 1 nach dieses Potenz ist, ein $\mathfrak{l}$–adisches Norm ist: das ist nämlich das wichtigste Punkt der Berechnung des Führers. Aber es ist mir noch nicht gelungen in diesem Beweis die Rechnungen Ihres Berichtes zu vermeiden.

Ich habe auch gesucht ob es möglich ist das Artin'sche Reciprocitätsgesetz in der Rekursion des Existenzsatz einzuführen. Es muss ohne Schwierigkeit möglich sein, aber es ist nicht vorteilhaft, denn bisher haben wir für dieses Gesetz im Fall des Primzahlgrad (mit den Einheitswurzeln im Grundkörper), keinen Beweis der einfacher ist als derjenige von Artin im allgemeinen Fall.

[1] Die Arbeit ist im Crelleschen Journal erschienen. [Her33a]
[2] Siehe Fußnote 5 im Brief vom 29.06.1931*.

Ich habe gesehen die Arbeit von Fueter in dieser Indischen Zeitschrift, von der Sie mir gesprochen hatten: sie enthält, ausser einige falschen Behauptungen, nichts neues, und sie gibt keine neue Idee für die Beweise: es hat mir ganz uninteressant geschienen.[3]

Mit vorzüglicher Hochachtung,

Ihr sehr ergebener,

J. Herbrand

[3] Es handelt sich um die Arbeit [Fue27].

Kapitel 3

Auszüge aus anderen Briefen und Dokumenten

3.1 08.02.1931, Noether an Hasse

Göttingen, 8. 2. 31

Lieber Herr Hasse!

......

Dann möchte ich auch vorschlagen, auch meinen Rockefeller-Stipendiaten für den nächsten Sommer – der jetzt bei von Neumann in Berlin ist – aufzufordern: Dr. J. Herbrand, Berlin-Charlottenburg, Mommsenstr. 47, bei Ehrmann. Als Rockefellerstipendiat bekommt er die Reise bezahlt; Sie haben also keine Kosten. Er kam nach Halle, und hat am meisten von allen von meinen Sachen verstanden.[1] Er hat bis jetzt außer Logik nur Zahlentheorie gearbeitet (die er aus Ihrem „Bericht" und Ihrer Normenresttheorie gelernt hat); ich dachte an ihn nur als Zuhörer. Eventuell könnte er aber über seine durch die Einheitengruppen vermittelten ganzzahligen Darstellungen der Galoisgruppe vortragen; das ist wahrscheinlich nahe mit meinen hyperkomplexen Sachen zusammenhängend (Comptes Rendus Januar). Wir hatten in Halle alle einen ausgezeichneten Eindruck von ihm.

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

[1] Emmy Noether hatte kurz vorher einen Gastvortrag an der Universität Halle gehalten, zu dem also, wie wir erfahren, auch Herbrand aus Berlin gekommen war.

3.2 25.05.1931, Wedderburn an Hasse

P.O.Box 53,
Princeton, N.J., U.S.A.
May 25, 1931

Dear Professor Hasse,

I was very glad to have you recommend Dr. Herbrand to me, and I wrote immediately to Paris to say that we should be pleased to have him come here.

I am looking forward to seeing your paper in the Transactions. I have just seen your article in the Mathematische Annalen but have not had time to read it yet.

Yours very sincerely

J.H.M.Wedderburn

I was very much gratified by the receipt of your Post Card from Marburg-Lahn. I hope to have the pleasure of meeting you and your colleagues at Zürich next year.

J.H.M.W.

3.3 16.06.1931, Artin an Hasse

Hamburg, den 16. Juni 1931

Lieber Herr Hasse!

... Seit ich wieder zurück bin, habe ich mich sehr oft mit Herbrand unterhalten. Das ist ein Mensch der unglaublich viel weiss und kann. Er hat uns hier einen Vortrag gehalten, über Grundlagen, wir waren alle begeistert. Schade dass er schon wieder abgereist ist.[1]

Begeistert bin ich über die neuen ungeheuren Vereinfachungen der Klassenkörpertheorie die von Herbrand und Chevalley stammen. Man braucht jetzt so gut wie gar keine schlimmen Rechnungen mehr, auch keine trinomischen Gleichungen wie F.K. Schmidt. Da ich an einigen kleinen Punkten auch beteiligt bin, möchte ich Ihnen ganz kurz darüber schreiben.

......

Und nun die herzlichsten Grüsse auch an Ihre Frau und auch von der meinen,

Ihr Artin

[1] Herbrand war nach Göttingen zu Emmy Noether abgereist.

3.4 04.08.1931, Weil an Hasse

Paris, 4.VIII. 31.

Sehr geehrter Herr Professor!

Ich muss Ihnen leider eine sehr betrübende Nachricht mitteilen, die des Todes Jacques Herbrands, der vor wenigen Tagen bei einer Bergbesteigung im Dauphiné tödlich verunglückt ist. Ich brauche Ihnen nicht zu sagen, welchen Verlust dieser Tod für die Wissenschaft und besonders für die Zahlentheorie bedeutet. Noch kürzlich vor seinem Tode hatte er eine neue Idee gehabt, die eine weitere bedeutende Vereinfachung der Klassenkörpertheorie bringen sollte; doch wird das noch erhalten, da er genug davon erzählt hatte, damit es rekonstruiert werde. Sie wissen aber, dass er gewiss noch nicht sein bestes geleistet hatte, und alles, was man sich von ihm versprechen konnte, ist jetzt vorbei.

Herr Chevalley ist mit der Publikation von Herbrands Nachlass beauftragt, und Sie möchten an ihn schreiben, wenn Sie im Besitze von Manuskripten sind, oder von solchen Briefen, die man für eine Publikation benutzen könnte. Chevalley selbst wollte Ihnen übrigens auch direkt schreiben, traute sich aber nicht zu, einen Brief auf deutsch zu schreiben.

Mit den besten Grüssen

Ihr ganz ergebener

A Weil

3.5 24.08.1931, Artin an Hasse

Hamburg den 24. August 1931.

Lieber Herr Hasse!

Wir waren auf einige Tage in der Sommerfrische im Harz und da habe ich zwei Arbeiten niedergeschrieben die ich Ihnen für das Henselheft anbiete. Es ist zwar nichts besonderes und wenn Sie meinen dass Sie es nicht recht brauchen können, so schicken Sie sie mir halt wieder zurück.

. . . . . .

Die andere Arbeit beweist auf einfacherem Wege den Herbrandschen Satz über Einheiten relativ galois'scher Zahlkörper. Da er die Grundlage für die neuen Klassenkörperbeweise ist, war ein einfacher Beweis zu wünschen. Natürlich hatte ich in der Sommerfrische keine Schreibmaschine so dass die Arbeiten handschriftlich sind. Ich habe mich aber bemüht so leserlich wie möglich zu schreiben.

Ich habe die Klassenkörperbeweise jetzt endlich aufgeschrieben und werde sie Ihnen hoffentlich bald zuschicken können. Es hat doch länger gedauert als ich annehmen konnte.

Sie werden wahrscheinlich schon von dem schrecklichen Unglück gehört haben, das Herbrand getroffen hat. Er ist in den Alpen tödlich verunglückt. Das ist wirklich ein schwerer Schlag der die Arithmetik getroffen hat. Vierzehn Tage vor seinem Tode war Herbrand noch unser Gast und ich erwartete mir große Dinge von ihm . . .

Mit den besten Grüssen, auch an Ihre Frau

Ihr Artin

Kapitel 4

Herbrand Sen. u. Chevalley an Hasse

4.1 28.09.1931, Herbrand Sen. an Hasse

Le 28 Septembre 1931 .

Monsieur le Professeur ,

Monsieur CHEVALLEY absent de Paris et n'ayant pas conservé votre adresse, me prie de vous envoyer les épreuves du mémoire de mon fils. Vous les trouverez ci–incluses.

Evidemment, Monsieur CHEVALLEY n'a pu vérifier les formules puisqu'il n'avait pas le texte.

Bien entendu, l'imprimeur m'enverra sa facture en même temps que les tirages à part.

Veuillez agréer, Monsieur le Professeur, avec tous mes remerciements , l'expression de mes respectueux sentiments.

(Unterschrift)

4.2 13.10.1931, Herbrand Sen. an Hasse, mit Anlage

Paris, le 13 Octobre 1931.

Monsieur le Professeur Docteur
HELMUT–HASSE
Weissenburgstrasse 22
MARBURG–LAHN
(ALLEMAGNE)

Monsieur le Professeur,

J'ai bien reçu votre aimable lettre, avec les épreuves; j'ai transmis celles–ci immédiatement à Monsieur CHEVALLEY. Celui–ci vient de m'annoncer qu'il les a égarées.

Monsieur Chevalley terminait son service militaire, il a corrigé les épreuves à la caserne, cela a coïncidé avec sa démobilisation, Vendredi et Samedi derniers, et dans le désordre qui accompagne toujours les opérations de ce genre, l'épreuve a été perdue. J'en suis fort contrarié.

Vous avez fait preuve, ainsi que Monsieur le Professeur Bernays, d'un tel dévouement à la mémoire de mon fils, que je ne sais comment vous prier d'excuser cet incident.

Heureusement, Monsieur Chevalley avait une seconde épreuve; il l'a corrigée, mais pas assez clairement, à mon avis, pour que le typographe puisse faire un travail définitif. Aussi, si vous l'estimez utile, n'hésitez pas à demander une autre épreuve, sur laquelle on pourra donner le bon à tirer et celui–ci vous sera envoyé par retour du courrier.

Je suis à la disposition de l'éditeur pour le règlement des frais supplémentaires qui en résulteront.

J'ai lu, avec émotion, la note que vous avez bien voulu rédiger. Elle aussi, naturellement, a été égarée; mais, pour le cas où vous n'auriez pas conservé la copie, je vous remets la traduction que j'en ai faite.

Remarquez que le manuscrit de mon fils vous est parvenu le 27 Juillet, c'est–à–dire le jour même de sa mort.

En vous remerciant encore une fois, je vous présente Monsieur le Professeur, l'expression de mes sentiments respectueusement dévoués.

(Unterschrift)

J. HERBRAND, IO, rue Viollet–le–Duc. PARIS. (9°).

4.3 14.10.1931, Herbrand Sen. an Hasse

Adresser la Correspondance:
53, Faubourg Montmatre. PARIS–9^e

Paris, le 14 Octobre 1931

Monsieur le Professeur Docteur
HELMUT–HASSE
Weissenburgstrasse 22
MARBURG–LAHN
(ALLEMAGNE)

Monsieur le Professeur,

J'ai oublié de vous dire, hier, que j'avais heureusement conservé le manuscrit.

Si vous m'écrivez fin de cette semaine ou la semaine prochaine, veuillez avoir l'obligeance d'adresser la lettre à mon bureau: 53, rue du Faubourg Montmatre, car je dois m'absenter. Mon bureau fera le nécessaire tant auprès de Monsieur Chevalley, qui doit également quitter Paris pour deux ou trois jours, qu'auprès de moi–même, pour l'expédition; de telle sorte qu'il n'y aura pas de retard dans le retour des épreuves.

Je vous prie d'agréer, Monsieur le Professeur, l'expression de mes sentiments respectueux.

(Unterschrift)

J. HERBRAND, IO, rue Viollet–le–Duc–PARIS–(9°).

4.4 26.10.1931, Herbrand Sen. an Hasse

Le 26 Octobre 1931 .

Monsieur le Professeur ,

Je vous envoie l'épreuve corrigée , je l'ai revue très soigneusement et je crois que vous pouvez donner le bon à tirer .

Je m'excuse encore du travail supplémentaire auque vous vous êtes astreint . Je vous suis très reconnaissant de la peine que vous avez prise pour mon fils , pour votre fidélité à son souvenir.

C'est un geste dont je vous sais gré.

Veuillez agréer , Monsieur le Professeur , mes respectueuses salutations .

(Unterschrift)

P. S. – Les cent exemplaires de l'éditeur me suffiront .

4.5 25.09.1931, Chevalley an Hasse

25 Septembre 1931

Cher Monsieur et Maître –

Je vous renvoie ci-contre les épreuves corrigées du mémoire d'Herbrand.

Pourrez-vous s'il vous plaît commander cent tirages à part au nom de Monsieur Herbrand, 10 R. Viollet–le–Duc Paris IX

Je ne sais encore si la bourse Rockefeller m'est accordée. De toutes manières, j'espère pouvoir venir en Allemagne l'année prochaine; et probablement pendant le 2$^{\underline{\text{d}}}$ semestre à Marburg; n'y voyez-vous pas d'inconvénients ?

Veuillez croire, cher Monsieur, à mes sentiments les plus respectueux

Cl. Chevalley

4.6 13.10.1931, Chevalley an Hasse

Villa Ambroise Paré
19, AVENUE D'ORLÉANS
Paris 14^{e}

Gobelins 64-50

13 Octobre 1931

Cher Monsieur et Maître

Je vous envoie ci-contre le 2d jeu d'épreuves de l'article d'Herbrand pour le Journal de Crelle. En effet, au cours des opérations de ma libération du service militaire les épreuves corrigées que vous aviez renvoyées à Monsieur Herbrand se sont perdues. Je suis absolûment désolé du contre-temps et des ennuis que cela entraîne, et vous en fais toutes mes excuses.

Les points douteux que vous m'avez signalés dans l'autre épreuve ont été, je crois, éclaircis dans celle-ci. Les points qui interviennent dans les formules doivent subsister (ils correspondent aux notations employées dans D. I.). J'ai introduit aux autres endroits que vous aviez marqués d'un point d'interrogation les corrections nécessaires. Par contre je n'ai pas introduit les corrections purement typographiques que vous aviez faites, car je ne me les rappelais pas assez exactement. Le correction indiquée par Monsieur Bernays pour la Note I me semble toute indiquée. Aussi ai-je rayé la portion de phrase qu'il indique. Enfin Monsieur Bernays avait ajouté dans le paragraphe 4 une portion de phrase, dont je ne me souviens plus exactement; peut-être pourrez-vous la retrouver dans les épreuves vues par Monsieur Bernays.

Je crois que Monsieur Herbrand vous écrit de son côté, en vous indiquant les dates nécessaires à la note biographique.

Veuillez recevoir encore toutes mes excuses et croire à mes sentiments les plus respectueux.

4.7 31.12.1931, Chevalley an Hasse

19, AVENUE D'ORLÉANS, PARIS (XIV^E)

LA MASSOTERIE
CHANÇAY (INDRE-&-LOIRE)

31 Décembre 1931

Cher Monsieur et Maître

......

André Weil a eu l'idée de demander aux mathématiciens qui ont connu Herbrand s'ils voudraient collaborer à un livre qui serait écrit en mémoire de lui et composé de divers mémoires se rapportant aux disciplines qui l'ont surtout intéressé. Puis-je vous demander si vous voudrez vous associer à ce projet et donner un mémoire pour ce livre?

Je ne suis en France que pour les vacances de Noël. Autrement j'habite à Hamburg, Pension Hallerecke, 83 Hallerstrasse.[1]

Veuillez recevoir, cher Monsieur, l'expression de mes sentiments les plus respectueux.

C. Chevalley

[1] Im Wintersemester 1931/32 hielt sich Chevalley in Hamburg bei Artin auf.

4.8 17.01.1932, Chevalley an Hasse

Hamburg 17/1/32
83 Hallerstrasse

Cher Monsieur et Maître,

Je vous remercie de votre lettre que j'ai trouvée en revenant à Hambourg.

......

Je vous remercie de bien vouloir donner un mémoire pour le livre qui sera dédié a Herbrand. Cela ne presse d'ailleurs pas du tout: je ne pense pas qu'il puisse être question de faire paraître le livre avant plus d'un an.

......

Veuillez croire, cher Monsieur, à mes sentiments les plus respectueux.

4.9 07.10.1932, Chevalley an Hasse

19 Avenue d'Orléans
Paris (XIV) — Le 7 Octobre 1932

Cher Monsieur et Maître,

Je vous envoie des précisions sur le projet, à propos duquel je vous avais déjà écrit, de faire un livre en mémoire de Jacques Herbrand, composé de mémoires de mathématiciens qu'il a rencontrés.

Les mémoires paraîtront en librairie en Juillet prochain, par fascicules séparés, et une partie du tirage sera ensuite réunie en volume par les soins de M. Herbrand. Chaque auteur recevra en outre de ses tirages à part, un exemplaire du volume complet.

Nous demandons, André Weil et moi, à recevoir les manuscrits, le plus tôt possible, en tous cas pas après le 1 Mars.

Je vous serais très reconnaissant de me faire savoir si vous voulez bien nous assurer de votre collaboration, et, si possible, dans le cas affirmatif, de nous donner quelques indications sur le sujet et sur la longueur approximative du manuscrit que vous nous enverriez (indications toutes provisoires d'ailleurs). De plus, peut-être pourriez-vous nous faire quelques suggestions de collaborations possibles, notamment à propos du congrès qui s'est tenu l'année dernière à Marburg et auquel Herbrand assistait: peut-être y a-t-il rencontré des mathématiciens que nous n'avons pas inscrits sur notre liste et que ni Weil ni moi ne connaissons personnellement. Pouvons-nous vous demander de vous charger d'écrire vous-même à ces mathématiciens ? Nous vous en serions très reconnaissants.

Veuillez croire, cher Monsieur, à mes sentiments les plus respectueux,

C. Chevalley

4.10 28.10.1932, Chevalley an Hasse

Pension de famille
12 Place Denfert–Rochereau
Paris (XIV)

Le 28 Octobre 1932

(Nouvelle adresse !)

Cher Monsieur et Maître,

Je vous remercie de votre réponse à propos du livre en mémoire d'Herbrand.

André Weil et moi serons très heureux si vous pouvez nous donner le mémoire en question. Cela va d'autant mieux que je compte moi-même donner un mémoire se rapportant tout-à-fait au même ordre d'idées, qui sera une suite à celui que vous connaissez déjà, dans laquelle je détermine la structure des ordres maxima d'une algèbre simple sur un corps de nombres algébriques, cette algèbre étant considérée comme algèbre de matrices. J'espère donc aussi que Mlle Noether pourra donner le mémoire sur la même question, comme vous le suggérez. Elle m'avait antérieurement parlé de donner son ancien travail (jamais publié) sur la différentiation des idéaux, mais je pense que l'un n'empêche pas l'autre, et je vais lui écrire pour lui demander si elle pourrait nous donner les deux.

Je vous remercie de m'avoir envoyé la liste des participants au Schiefkörperkongress; ne vous donnez pas, je vous prie, la peine de leur écrire: Weil et moi le ferons.

Veuillez croire, cher Monsieur, à mes sentiments les plus respectueux,

C. Chevalley

P. S. J'ai lu le manuscrit de votre mémoire, mais n'en ai actuellement pas de copie.

Kapitel 5

Dubreil, Souvenirs

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques, tome 4 (1983)*, p. 61-73.*

SOUVENIRS D'UN BOURSIER ROCKEFELLER 1929-1931

PAR PAUL DUBREIL[1]

1. Préambule.

C'est quelque peu osé de ma part de croire que les souvenirs des deux années que j'ai passées à l'étranger, d'octobre 1929 à juillet 1931, peuvent avoir quelque intérêt aujourd'hui. Mais peut-être certaines des impressions que j'ai éprouvées à cette époque ont-elles pu l'être aussi par ceux de mes camarades français qui ont bénéficié des mêmes possibilités. J'espère donc un peu que mes vieux souvenirs ont une portée générale. Peut-être constaterez-vous, par exemple, que la vie mathématique que nous connaissons aujourd'hui en France ressemble plus à celle qui existait en Allemagne vers 1930 qu'à celle que nous avions chez nous à cette époque !

Je pense aussi qu'il ne vous déplaira pas d'avoir un témoignage direct, parfois agrémenté de petites anecdotes, sur les grands mathématiciens que j'ai eu la chance de rencontrer et même de fréquenter régulièrement : leur accueil si bienveillant et même si amical m'a permis de m'initier plus facilement à leurs méthodes, d'entrevoir la marche de leurs idées, et, plus d'une fois, de

[1]Conférence donnée le 24 mars 1982 au Séminaire d'Histoire des mathématiques.

découvrir l'Homme derrière le Savant. Je souhaite manifester aujourd'hui, par cet exposé, la reconnaissance que je leur dois ainsi que ma profonde gratitude envers la fondation Rockefeller.

Permettez-moi encore un avertissement : ma mémoire n'est pas infaillible, surtout après plus d'un demi-siècle ! Malgré mes efforts, certains flous ont subsisté, des recoupements m'ont permis de déceler quelques erreurs et de les corriger. Il est possible qu'il en reste d'autres : ayez la bonté de les excuser.

2. Hambourg.

Arrivé à Hambourg un matin d'octobre 1929 par un train, "rapide" qui avait quitté Paris la veille à midi, j'eus le temps, avant la rentrée, de m'installer et de visiter la ville. Son originalité est d'être construite autour d'un vaste lac intérieur, l'Alster, qui communique avec l'Elbe par plusieurs canaux. Les nombreux et immenses bassins du port sont aménagés dans la rive opposée à la ville. L'université est en plein centre : c'est là qu'Emil ARTIN faisait ses cours, deux fois par semaine, de 11 h à midi et de midi 15 à 13 h . A proximité de l'université, dans la grande avenue "Rothenbaumchaussee", se trouvait l'Institut de Mathématiques, installé dans le vaste rez-de-chaussée d'un immeuble particulier. Chaucun des trois professeurs, ARTIN, BLASCHKE, HECKE, y avait son bureau ; une ou deux salles étaient destinées aux séminaires et il y avait encore une bonne bibliothèque dans laquelle les chercheurs pouvaient travailler confortablement.

Chaque professeur était doublé par un "Dozent" : SPERNER pour ARTIN, KÄHLER pour BLASCHKE et PETERSEN pour HECKE.

ARTIN, bien qu'encore tout jeune (31 ans), mais célèbre pour avoir établi la loi de réciprocité générale (Abh. math. Sem. Hamburg, 1927), avait attiré deux autres boursier Rockefeller : un algèbriste tchèque, KOŘINEK, qui avait travaillé auparavant à Paris et parlait bien français, et HUREWICZ, plus topologiste qu'algébriste, dont je ne sais plus s'il venait de Pologne ou des Etats-Unis.

Après son cours, ARTIN venait à l'Institut pour recevoir des étudiants. Nous – c'est-à-dire sa jeune femme, d'origine russe, qui avait été son élève, HUREWICZ, KOŘINEK, SPERNER et moi – l'y suivions, l'attendions en bavardant et, vers deux heures, nous nous rendions avec lui dans un restaurant voisin le "CURIO HAUS" où nous déjeunions ... à une table attitrée ; le plus souvent KÄHLER et PETERSEN se joignaient à nous. Nous y parlions très librement, de mathématiques et de mathématiciens bien sûr, mais aussi de voyages, de littérature, de musique et même de cinéma : car c'était le début – on pourrait dire les balbutiements ! – du cinéma parlant.

Aux premiers beaux jours, en février-mars, ARTIN nous proposa, par deux fois, de faire après le déjeuner une promenade à Blankenese, agréable station située au bord de l'Elbe, en aval de Hambourg et aussi sur la rive droite. Je me souviens que, marchant en avant, KOŘINEK et moi, et parlant fraînçais, nous fûmes rattrapés par ARTIN et qu'il prit part longuement à cette conversation. A l'âge de dix ans, après la mort de son père, il avait quitté Vienne, sa ville natale, pour venir passer un an chez son tuteur qui habitait Le Raincy. Il était allé à l'école et il lui restait beaucoup d'aisance dans le maniement du français et une très bonne prononciation.

Dès sa première leçon, j'avais été heureusement surpris par la facilité avec laquelle je comprenais son allemand : le débit était régulier, la parole nette, l'accentuation agréable. Ma difficulté était mon manque d'entraînement pour écrire l'allemand : la meilleure solution fut de traduire en français à mesure, cela me permettait d'utiliser les abréviations dont j'avais l'habitude.

Le sujet de ce cours était la théorie de idéaux dans un anneau commutatif. Mais bien qu'ayant travaillé à Paris les principaux mémoires d'Emmy NOETHER, KRULL et van der WAERDEN, j'eus, avec ARTIN, la bonne surprise d'une présentation très différente. Il avait commencé en effet par l'étude des domaines d'intégrité intégralement clos, avec condition de chaîne ascendente, et l'outil fondamental était la "quasi-égalité" des idéaux fractionnaires, à laquelle on donne maintenant le nom d' "équivalence d'ARTIN". Le quotient du demi-groupe multiplicatif des idéaux fractionnaires par cette équivalence est un groupe. Si de plus tout idéal premier non nul est maximal, l'équivalence d'ARTIN est l'égalité et on retrouve immédiatement la théorie de DEDEKIND. C'était une élégante mise en forme de résultats obtenus peu avant par van der WAERDEN (Math. Ann., t.101). PRÜFER, indépendamment, avait aussi repris cette question, en utilisant une fermeture au lieu d'une relation d'équivalence.

J'ai trouvé plus tard mon inspiration dans ce cours d'ARTIN pour l'étude des homomorphismes envoyant un demi-groupe sur un groupe, et des congruences correspondantes (Mémoires Acad. Sci., 1940). De son côté, Marie-Louise DUBREIL-JACOTIN devait montrer que cette théorie d'ARTIN s'étend au cas beaucoup plus général des demi-groupes demi-réticulés ou "gerbiers" (Leçons sur les treillis, Paris 1953, p. 128 et *sqq.* ; exposé simplifié dans ma communication au "Convegno" de Padoue, 1956). Le retour de ce cas général au cas particulier des idéaux d'un anneau se fait immédiatement, car l'ensemble des idéaux est précisément un gerbier.

Le Séminaire d'ARTIN se tenait à l'Institut de Mathématiques. Je me souviens de conférences sur la théorie des groupes. L'une d'elles fut faite par une étudiante, terriblement consciencieuse, qui, après avoir tout écrit, avait appris son texte par coeur et le débitait à toute vitesse. Elle eut droit à un éreintement impitoyable et, que "la paresse intelligente est une des qualités maîtresses du mathématicien". En liaison avec ces exposés sur la théorie des groupes abstraits, j'avais entrepris la lecture du livre de SPEISER : *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung.* La représentation linéaire y était largement traitée, mais ce fut aussi le thème de plusieurs exposés au Séminaire de HECKE, ce qui m'a conduit tout naturellement, quelques mois plus tard, à en faire le sujet de ma seconde thèse, avec l'approbation de VESSIOT.

Je voudrais mentionner aussi un exposé fait par SPERNER, au Séminaire d'ARTIN, sous le titre : "Un théorème combinatoire de MACAULAY". MACAULAY, qui, avec HILBERT et LASKER, sans parler de DEDEKIND, a été un précurseur en théorie de idéaux, avait établi d'une façon compliquée une double inégalité exprimant une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $\varphi(\ell)$ d'un entier ℓ soit le nombre maximum de formes linéairement indépendantes de degré ℓ appartenant à un idéal homogène de l'anneau $k[X_0, X_1, \ldots, X_n]$, k étant un corps et les X_i des indeterminées. SPERNER avait obtenu une démonstration plus simple ; il la publia aux *Abhandlungen* de Hambourg en 1930. ARTIN en loua chaleureusement l'ingéniosité, non seulement au Séminaire, mais peu après à un déjeuner au *Curio Haus.*

ARTIN avait aussi une grande estime pour un élève plus jeune qui n'était autre que Max ZORN. "A chaque instant", nous disait ARTIN, "il vient me poser une question judicieuse ou m'apporter une remarque intéressante". Un mécène avait fondé, à Hambourg, un prix destiné à récompenser et encourager un jeune mathématicien de valeur : l'hiver 1929-30, ce prix fut décerné à Zorn. Il fut remis solenellement au "Ratskeller" (caveau de l'Hôtel de Ville) en présence des professeurs, des assistants ... et des boursiers Rockefeller, et cette cérémonie fut suivie d'un dîner agréable et de longues conversations. C'est en 1935 que ZORN devait faire connaître son théorème sur les ensembles inductifs qui allège considérablement toutes les considérations d'induction transfinie (Bull. Amer. Math. Soc., t. 41, p. 667).

En février, Hambourg reçut la visite d'Emmy NOETHER que la Société de Philosophie avait invitée à donner une conférence. Le matin, elle avait assisté au cours d'ARTIN, puis elle était venue déjeuner au *Curio Haus* : j'avais pu ainsi faire un peu connaissance avec elle. Sa conférence eut lieu le soir dans le cadre imposant de l' "Aula", le grand amphitéâtre de l'université, devant un auditoire composé de philosophes et de mathématiciens. J'ai retrouvé mes impressions immédiates dans une lettre addressée à Marie-Louise JACOTIN (nous entretenions alors une correspondance régulière, car nous allions nous marier au mois de juin suivant) : ma déception était totale ! J'avais vu une femme petite, corpulente, au teint coloré, sans aucune élégance vestimentaire. Visiblement fort intelligente, elle parlait beaucoup, très vite, d'une façon saccadée. Elle était tombée tête baissée dans le piège qu'était cette conférence pour philosophes et mathématiciens : incompréhensible pour les premiers, elle enfonçait pour les autres des portes ouvertes. Et tout cela dans un grand désordre : définition d'un corps par le système d'axiomes habituels, classes d'équivalence, isomorphismes, théorie des idéaux avec *Teilerkettensatz* (axiome des chaînes de diviseurs appelé maintenant condition de chaîne ascendente), retour aux corps pour dire quelques mots des corps réels, sans doute en hommage à ARTIN. Par la suite, la connaissant mieux, j'ai pensé qu'elle avait voulu énoncer, à propos de cas particuliers, deux principes de pensée qui lui étaient chers et dont son oeuvre montre brillamment l'efficacité : la *Begriffsbildung* (construction de concepts), et la formulation de systèmes d'axiomes de plus en plus forts donnant, dans une même théorie, des résultants de plus en plus précis.

La fin de ce semester à Hambourg fut un feu d'artifice mathématique grâce aux visites de BRANDT (formes quadratiques), RADEMEISTER (tolopogie et géométrie), THOMSEN (géométrie) et du danois HJELMSLEV (fondements de la géométrie). Les conférences étaient suivies de *Nachsitzungen* (prolongations) sous forme de déjeuner au *Curio Haus*, de dîner chez ARTIN ou au *Ratskeller*.

Ma dernière après-midi à Hambourg m'a laissé un souvenir profond ... bien qu'un peu spécial. J'avais voulu, bien entendu, prendre congé d'ARTIN et il m'avait reçu dans son bureau. En le remerciant de son accueil bienveillant et exprimant ma reconnaissance pour tout ce qu'il m'avait apporté en connaissances et en idées, j'ai provoqué cette réponse inattendue : "Oh ! je vous ai si peu aidé dans votre travail personnel !" – "Mais, Herr Professor, je devais faire ma thèse tout seul !" Il m'a demandé alors de lui parler en détails de ce travail qui concernait la détermination de la "multiplicité de NOETHER" (il s'agit ici du géomètre Max NOETHER, père d'Emmy) ; la méthode relevait pour les trois quarts de la théorie des idéaux, pour le reste de considérations analytico-géométriques à la Puiseux (*cf.* Journal de Math. pures et appl., t. 9, 1930, p. 231). J'ai donc planché près d'une heure, pour une sorte de présoutenance ... inopinée !

3. Groningen.

Au semestre d'été, commençant fin avril, je devais travailler avec Emmy NOETHER. Elle enseignait normalement à Göttingen, mais, ce semestre-là, en raison d'un échange avec SIEGEL, elle était à Francfort-sur-le-Main. Les vacances intermédiaires m'ont conduit à Groningen (aux Pays-Bas, près de la frontière allemande) pour rencontrer van der WAERDEN, tout jeune professeur. Cette ville, qu'Emmy NOETHER qualifiait de *Bauerdorf* (village de paysans) offrait en elle-même peu d'intérêt et son calme naturel était accentué par les vacances universitaires.

Je me souviens d'une visite sympathique à van der CORPUT qui était un des meilleurs arithméticiens. Quant à van der WAERDEN, il achevait alors la redaction de *Moderne Algebra* : il eut la gentillesse de me communiquer les chapitres sur la théorie générale des idéaux et sur les idéaux de polynômes. Avec un grand dévouement, car les délais qui lui avait fixés SPRINGER étaient draconiens, il m'accorda plusieurs conversations mathématiques, orientées vers la géométrie algébrique "abstraite" et aussi vers les systèmes hypercomplexes (algèbres associatives), objet de la fin de son livre et domaine travaillé intensément en Allemagne à cette époque. ARTIN, dans ses dernières leçons, avait abordé ce sujet qui revenait d'ailleurs souvent dans les conversations au *Curio Haus*. Mais mes connaissances étaient encore bien floues : van der WAERDEN ne pouvait manquer de s'en apercevoir et je crus sentir chez lui un peu d'ironie amusée quand il me dit, à la fin d'une promenade mathématique qui m'avait totalement épuisé : "C'est fou ce que vous avez appris chez ARTIN !"

4. Francfort-sur-le-Main.

A mon arrivée à Francfort, Emmy NOETHER me réservait une surprise :

- "A propos", me dit-elle, "vous parlez au Séminaire la semaine

prochaine."
J'ai dû paraître interloqué ; elle précisa :
"Oui, de vos résultats sur la multiplicité de Noether."
- "Et, en allemand ?"
"Oui, oui, bien sûr !"

Je n'avais qu'à me mettre au travail ... un peu réconforté par le souvenir de l'exposé improvisé, devant ARTIN, à mon départ de Hambourg.

A Francfort comme à Hambourg, les cours avaient lieu, pour la plupart, à l'universitée, mais les séminaires se tenaient à l'Institut de Mathématiques, installé dans un immeuble. Le jour de mon exposé, j'avais fait la connaissance de HELLINGER dont je suivais le cours sur les fonctions doublement périodiques. Je m'étais aussi présenté à DEHN, petit homme très vif, pétillant d'intelligence et fort accueillant. J'avais sympathisé avec un *Dozent*, Wilhelm MAGNUS, qui travaillait en théorie des groupes, et avec Ruth MOUFANG qui suivait, elle aussi, le cours d'Emmy NOETHER et devait devenir une excellente algébriste. Je ne me sentais donc pas trop dépaysé et soutenu par une sorte de préjugé sympathique qui semblait flotter dans l'air ! A la fin de l'exposé, j'entendis Emmy NOETHER souligner que j'avais "traité un problème du père avec les méthodes de la fille", puis DEHN vint me dire en riant : "*Diese Unterresultante, das ist der Witz* !" (ce sous-résultant, c'est l'astuce !). Il y avait là comme un jeu de mots intraduisible en français. Il s'agit, dans cette question, de l'intersection de deux courbes algébriques planes $f(X,Y) = 0$, $g(X,Y) = 0$; l'idéal (f,g) engendré par les premiers membres joue un rôle fondamental. Le résultant $R(X)$ de f et g, qui donne la "multiplicité de BEZOUT", appartient à cet idéal, mais il n'est pas en général le générateur $S(X)$ de l'idéal principal $(f,g) \cap \mathbb{C}[X]$; ce générateur $S(X)$, diviseur de $R(X)$, est appelé sous-résultant de f et g et il donne la multiplicité de NOETHER ... à condition d'opérer en "variables transformées" suivant une idée de HUR*WITZ* (*cf.* Journal de Math. pures et appl., t. 9, 1930, p. 231).

Après cet exposé, comme le temps était superbe, il fut décidé de faire une excursion dans le Taunus et Emmy NOETHER accepta de se joindre à nous. Une brassée de lilas lui fut cueillie acrobatiquement par un des étudiants, qui la lui offrit avec un petit compliment ... légèrement humoristique.

Un peu plus tard, DEHN m'aborda, à l'Institut de Mathématiques, en me disant à brûle-pourpoint : "Alors, vous non plus, vous ne vous intéressez pas à l'histoire des mathématiques ?" Je savais que c'était une de ses spécialités et qu'il dirigeait un Séminaire consacré aux mathématiques de la haute antiquité ... . Un peu confus, je lui répondis que je me sentais d'abord obligé d'apprendre plus de mathématiques, mais que, sans doute, plus tard ... . Je tiens parole aujourd'hui ... et voici même que je m'intéresse à l'histoire de l'histoire des mathématiques !

Je ne voudrais pas manquer de signaler qu'après la mort de DEHN (en 1952, aux Etats-Unis), Ruth MOUFANG et MAGNUS ont publié sur lui une excellente notice (Math. Ann., t. 127, p. 215). Un passage retient particulièrement l'attention : c'est un extrait d'un discours officiel fait par DEHN, en 1928, sur "le profil spirituel du mathématicien". D'après MOUFANG et MAGNUS, c'est un véritable autoportrait : "Le mathématicien a parfois l'attitude passionnée du poète ou du conquérant, la rigueur de pensée d'un homme d'état conscient de sa responsabilité ou, plus simplement, d'un chef de famille aux prises avec les soucis, l'indulgence et la résignation d'un vieux sage ; il est à la fois révolutionnaire et conservateur, totalement sceptique et animé de l'optimisme d'un croyant."

A Francfort aussi, le Séminaire de mathématiques fut extrêmement intéressant. Je me souviens d'une conférence de théorie des nombres de MORDELL, d'une conférence de topologie, très vivante, d'ALEXANDROFF (Emmy NOETHER avait fait, l'hiver précédent, un séjour à Moscou), d'une conférence de KRULL qui, à l'époque, s'intéressait aux anneaux ne vérifiant pas la condition noethérienne de chaîne ascendente.

Mon mariage avec Marie-Louise JACOTIN eut lieu à Paris, fin juin et nous revînmes à Francfort jusqu'à la fin du semestre, c'est-à-dire jusqu'aux derniers jours de juillet. Ma femme assistait non seulement aux séances du Séminaire mais aussi au cours d'Emmy NOETHER : la jeune mathématicienne eut vite fait de discerner l'extraordinaire personnalité de son ainée à laquelle elle devait consacrer, plus tard, une partie de son article "Figures de mathématiciennes" dans "Les grads courants de la pensée mathématique", publiés par François LE LIONNAIS, en 1948.

Le cous d'Emmy NOETHER n'était pas facile à suivre : le débit était rapide, l'exposé désordonné. J'avais beaucoup de peine à prendre mes notes. Cependant, Emmy NOETHER revenait fréquemment sur les idées importantes, en particulier sur la notion de "module de représentation" dont elle tirait billamment parti. J'ai eu un jour une difficulté à propos d'une affirmation qui ne me paraissait justifiée ni dans son cours, ni dans son mémoire : une démonstration s'obtenait sans peine par un calcul de matrices, mais j'étais devenu assez "noethérien" pour ne pas m'en satisfaire. A la fin de la leçon suivante, je suis allé poser la question à Emmy NOETHER qui repoussa énergiquement les matrices et, après trois secondes de réflexion, me montra combien la chose était claire si l'on jonglait adroitement avec les modules !

Comme l'a si bien écrit van der WAERDEN dans la notice qu'il a consacrée à Emmy NOETHER (morte prématurément aux Etats-Unis en 1935) : "Elle ne pouvait penser qu'en concepts ("*Begriffe*"), pas en formules : et c'était là sa force ! ... Elle n'exposait presque jamais des théories achevées, mais en général celles qui étaient en train de se faire ... ." Et il ajoute : "Elle était pour nous (ses élèves) une amie fidèle, mais en même temps un juge sévère et impartial ... ." (Math. Ann., t. 111).

Après la soutenance de ma thèse, à Paris, à la fin d'Octobre, nous sommes partis pour Rome car j'avais obtenu une prolongation de ma bourse Rockefeller pour travailler avec ENRIQUES pendant le semester d'hiver 1930-31.

5. Rome.

A cette époque, la géométrie algébrique était brillamment représentée, à Rome, par CASTELNUOVO, ENRIQUES et SEVERI. CASTELNUOVO, le plus âgé, était déjà à la retraite et mes relations avec lui se sont limitées à une visite de courtoisie. Chose regrettable, les relations entre mon maître officiel, ENRIQUES, et SEVERI étaient tendues. Cependant, je fus très bien accueilli par SEVERI en allant me présenter à lui et en lui remettant un exemplaire de ma thèse. Je fus impressionné par l'aspect physique de ce gran toscan (né à Arezzo) et je le fus plus encore par le niveau de sa conversation, en français, au plan humain aussi bien que dans le domaine mathématique. Comme je le quittais, il me dit : "J'irai vous voir" et me demanda de lui laisser mon adresse.

Nous avions élu domicile dans le quartier du Pincio, à l'*Albergo Vittoria*, petit hôtel agréable situé à l'entrée de la *via Sardegna* ... qui était celle où habitaient, dans un même immeuble, ENRIQUES et LEVI-CIVITA.

Le nom de LEVI-CIVITA, bien entendu, nous était familier avant notre séjour à Rome. Nous l'avions entendu prononcer souvent par Elie CARTAN dans ses cours de géométrie ou par Henri VILLAT en mécanique des fluides. Ma femme se félicitait d'avoir la possibilité de travailler à Rome avec lui. Agrégée en juillet 1929, elle s'était placée aussitôt sous la direction de VILLAT qui s'occupait surtout de sillages. Il lui avait transmis, en décembre, une offre du norvégien Viktor BJERKNES, savant remarquable lui aussi puiqu'on lui doit, en météorologie, la découverte des "fronts" et l'explication de la formation des cyclones. Il rédigeait, en allemand, un grand traité intitulé "Hydrodynamique physique et météorologie" se composant d'une partie théorique et d'applications à la météorologie. Cet ouvrage devait paraître aussi en français et BJERKNES avait demandé à VILLAT quelqu'un qui puisse faire la traduction française de la partie théorique. Marie-Louise JACOTIN était donc partie pour Oslo tout au début de 1930. Mais, à son arrivée, BJERKNES, qui avait eu du nouvelles idées, recommençait sa rédaction ; à la fin de mars, quelques dizaines de pages seulement avaient été traduites en français et il était clair que l'achèvement du texte prendrait encore beaucoup de temps. BJERKNES en était conscient et ma future épouse obtint assez facilement de rentrer en France pour reprendre contact avec VILLAT ... et pour se marier ! Cependant, par son travail avec BJERKNES et son équipe (dont le mécène était Carnegie), elle avait mesuré l'intérêt des problèmes d'ondes.

Or, LEVI-CIVITA avait publié en 1925 un mémoire retentissant dans lequel il établissait rigoureusement (c'est-à-dire sans faire d'approximations) l'existence d'une onde irrotationnelle dans un liquide incompressible de profondeur infinie, avec surface libre. Ayant étudié ce travail, ma femme arrivait à Rome avec une remarque assez curieuse : une des conditions introduites par LEVI-CIVITA, "l'absence de transport de masse dans les couches profondes", n'était pas remplie par l'onde de GERSTNER, appelée aussi houle cycloîdale, qui est également une solution exacte, mais non irrotationnelle. Elle en fit part à LEVI-CIVITA qui fut surpris, un peu sceptique, mais téléphona dès le lendemain pour dire, après vérification, que la chose était exacte. En rencontrant un peu plus tard, dans une rue de Rome, Mme LEVI-CIVITA, ancienne étudiante de son mari et personne d'un grand charme, nous avons appris que ce que nous pensions être un petit incident n'avait donné lieu qu'à des commentaires sympathiques et élogieux. En fait, cette remarque sur "les couches profondes" fut let point de départ de la thèse de ma femme, où, avec une hypothèse valable à la fois pour l'onde de GERSTNER et pour celle de LEVI-CIVITA, elle établit rigoureusement l'existence d'une infinité d'ondes comprant les deux précédentes (Journal de Math. pures et appl., t. 13, p. 217, 1934).

Les activités mathématiques, à Rome, se déroulaient dans un bâtiment proche de *San Pietro in Vincoli* (Saint-Pierre aux liens), basilique fondée en 442 après J.C., mais plusieurs fois remaniée; c'est là que se trouve le célèbre Moise de Michel-Ange. Pendant ses leçons, ENRIQUES se servait très peu du tableau : je l'ai même vu rester assis sur le bord d'une table pendant toute l'heure, sans retirer ses gants. Il parlait vite, avec aisance et distinction ... on ne pouvait guère songer à prendre des notes ! Son cours était consacré aux surfaces algébriques, étudiées au moyen des systèmes linéaires de courbes. Il utilisait constamment le magnifique répertoire d'exemples constitué par les géomètres italiens. Ses méthodes étaient intuitives et, en privé, il déclarait volontiers : "pour un mathématicien, se rendre esclave de la rigueur, c'est chausser des semelles de plomb". Sa culture était immense et il avait réfléchi à une foule de questions. C'est ainsi que plus tard, m'intéressant aux définitions *directes* des ensembles finis, c'est-à-dire indépendantes de l'ensemble (infini) des entiers naturels, j'ai pu constater qu'ENRIQUES, en 1923, avait énoncé celle-ci : "un ensemble est fini s'il peut être doublement bien ordonné" (indépendamment de STÄCKEL qui avait formulé cette définition en 1907).

ENRIQUES se sentait de profondes affinités avec les Pythagoriciens et souvent, après son cours, il nous proposait une *passeggiata* (promenade) : c'est guidés par lui que nous avons visité le Palatin, les thermes de Caracalla, la voie appienne et les Catacombes, les bords du Tibre et le *ponte Fabricio* (construit en 62 avant J.C.) et bien d'autres sites ou monuments. Tantôt il commentait son cours, tantôt il parlait de philosophie, ou de littérature italienne ou française. Je me souviens d'une courte discussion qui tourna à ma grande confusion : ENRIQUES ayant prononcé le nom de François Coppée, j'avais fait une réserve : "Comment !" me dit ENRIQUES scandalisé, "Eh bien ! écoutez cela." Et il me récita sans un hésitation et avec une admirable justesse d'intonation, un poème entier, probablement le célèbre sonnet "Pour toujours" :

> "Pour toujours !" me dis-tu, le front sur mon épaule.
> Cependant, nous serons séparés, c'est le sort.
> L'un de nous, le premier, sera pris par la mort
> Et s'en ira dormir sous l'if ou sous le saule.
> . . . .

Président d'une association qui devait être la section romaine de l'Alliance française, il organisa cet hiver là une conférence d'André Maurois et offrit en son honneur une somptueuse réception dans l'appartement de la *via Sardegna*.

Je me souviens aussi d'un dîner plus intime donné par le ménage LEVI-CIVITA en l'honneur de LEFSCHETZ et de sa femme. Venant des Etats-Unis par la "ligne du sud", LEFSCHETZ arrivait en Europe pour y passer son année sabbatique. Il était de formation française, puisqu'ancien élève de notre Ecole Centrale. D'abord ingénieur chimiste, il avait perdu les deux mains dans un accident et s'était brillamment "reconverti" en mathématiques. A ceux qui l'approchaient, il donnait une extraordinaire leçon de courage et aussi – et surtout – d'amour de la vie. Son séjour à Rome se prolongea quelque temps et il y fit deux ou trois conférences sur ses travaux de topologie et de géométrie algébrique.

Un grand maître des mathématiques italiennes, Vito VOLTERRA, venait de prendre sa retraite. Après s'être illustré par ses travaux sur les équations intégrales et l'analyse fonctionelle, il s'intéressait aux applications des mathématiques à la biologie : croissance, lutte pour la vie, hérédité. Très imposant, mais extrêmement accueillant comme sa souriante épouse, il eut la gentillesse de nous recevoir à déjeuner, en compagnie d'Eugène BLANC, mon camarade de promotion, alors professeur au lycée Chateaubriand, et aussi, je crois, de deux jeunes mathématiciens allemands, BUSEMANN et FENCHEL, qui passaient comme nous l'hiver à Rome. VOLTERRA habitait un bel appartement près du Panthéon (construit sous Auguste, détruit par un incendie et reconstruit par Hadrien au début du II^e^ siècle). VOLTERRA était un collectionneur passioné de livres anciens de mathématiques : il nous fit admirer les richesses de sa bibliothèque.

Un jour, en fin d'après-midi, la réception de l'hôtel *Vittoria* me fit savoir que le professeur SEVERI me demandait : SEVERI respectait sa promesse ! Il me tint une longue conversation dans laquelle il fut question uniquement de géométrie algébrique. Il voulait attirer mon attention sur deux problèmes qui lui paraissaient pouvoir être abordés par les méthodes d'Emmy NOETHER et de van der WAERDEN. D'abord, l'extension du théorème de NOETHER à l'intersection dans l'espace projectif complexe à trois dimensions, d'une surface et d'une courbe algébrique. Puis, "réduction" d'une courbe algébrique C_0, non intersection complète, par le procédé suivant : on prend la ou une des surfaces de degré minimum S_0 passant par C_0, puis la ou une des surfaces S_0' passant par C_0 et de degré minimum parmi celles qui ne contiennent pas S_0. Les deux surfaces S_0, S_0' se recoupent suivant une courbe C_1, sur laquelle on recommence l'opération, etc. ... .

ENRIQUES, lui non plus, ne cachait son admiration pour Emmy NOETHER et ses méthodes. Cependant, c'est par les voies de la géométrie italienne qu'il m'avait suggéré d'étudier une extension du théorème de NOETHER à l'intersection complète de trois surfaces ayant en commun une courbe et se recoupant suivant un système de points. Cette étude ne m'a conduit, malgré mes efforts, qu'à des résultats très partiels et j'ai fini par mettre en doute (à tort ou à raison) l'exactitude de la conjecture d'ENRIQUES. Au contraire, l'orientation proposée par SEVERI s'est révélée très féconde. En la combinant avec les inégalités de MACAULAY-SPERNER et, bien entendu, avec la théorie noethérienne des idéaux, j'ai obtenu un peu plus tard des résultats sur l'intersection, dans un espace de dimension n quelconque, d'une hypersurface avec une variété de dimension $d \geqq 1$ (*cf.* Quelques propriétés des variétés algébriques, Actualités sc. et ind., n^o 162, Paris, Hermann, 1935 et : Quelques propriétés des systèmes de points dans le plan et des courbes gauches algébriques, Bull. Soc. Math. France, 1934, p. 1-26).

6. Göttingen.

Ma bourse Rockefeller prenait fin le 31 mars, et, avec elle, notre séjour à Rome. Mais, au début de février, ma femme avait reçu de BJERKNES une lettre lui annonçant que son manuscrit avait beaucoup avancé et lui demandant si elle pourrait en reprendre la traduction. La lettre était écrite en français et je me souviens, mot pour mot, de la phrase essentielle : "Je vous propose de nous rencontrer au milieu de la ligne droite joignant Oslo à Rome, c'est-à-dire à Göttingen, où le mari pourra retrouver sa maîtresse, M$^{\text{elle}}$ NOETHER." Cette proposition fut acceptée dans le rire et l'enthousiasme. Le travail personnel de ma femme, cependant, risquait d'être sacrifié et il fut convenu entre nous que je l'aiderais dans cette traduction. Une fois à Göttingen, nous eûmes vite fait de mettre au point notre méthode de travail : je parcourais le texte allemand pour déceler les éventuelles difficultés qui, d'ailleurs, étaient rares. Puis ma femme s'asseyait devant la machine à écrire et je lui dictais le texte français : sa frappe et ma traduction étaient merveilleusement synchrones ! Ma femme relisait, transcrivait les équations et portait le texte à BJERKNES qui le contrôlait avec elle.

Il nous restait le temps de suivre les séminaires d'Emmy NOETHER et de l'hydrodynamicien PRANDTL, et de profiter des magnifiques ressources de Göttingen : une excellente bibliothèque à l'université, une autre au tout neuf Institut de mathématiques de la *Bunsenstrasse*, avec en outre une collection unique de tirés à part. La section locale de la Société mathématique se réunissait régulièrement, deux fois par mois je crois, pour une conférence suivie, le plus souvent, d'une *Nachsitzung* (une prolongation) sous forme d'un dîner à l'Hôtel *Zur Krone*. C'est là que nous avons été présentés à HILBERT. LANDAU était aux Etats-Unis, mais nous rencontrions souvent COURANT, petit homme vif et cordial, le logicien BERNAYS, et aussi NEUGEBAUER, jeune historien des mathématiques, qui venait de fonder le *Zentralblatt für Mathematik*. Le département était dirigé par Hermann WEYL, alors dans la force de l'âge, rayonnant d'intelligence et de chaleur humaine. Sa femme et lui formaient un couple merveilleux. A deux reprises, ils reçurent les jeunes mathématiciens, allemands et étrangers, pour un *Abendbrot*, solide collation de fin de journée, avant et après laquelle on dansait.

Un des conférenciers de la Société de mathématiques fut LEFSCHETZ : poursuivant son tour d'Europe, il arrivait de Paris ... et ne cachait pas sa déception d'y avoir trouvé peu d'audience et peu d'accueil. Il s'est consolé en visitant la Bretagne. Göttingen eut aussi la visite de CARATHEODORY qui enseignait l'analyse à Münich et dirigeait les recherches de mon camarade de promotion de POSSEL pour lequel il avait une grande estime. CARATHEODORY était par ailleurs un remarquable polyglotte : il connaissait – à l'époque – une vingtaine de langues et il avait mis au point une méthode pour en étudier une nouvelle avec un minimum de temps et d'effort : apprendre deux mille mots, les principes de la conjugaison et les règles de syntaxe les plus fondamentales !

Parmi les jeunes mathématiciens allemands non algébristes présents à Göttingen, je me souviens particulièrement d'un analyste, Hans LEWY. Il était à peu près le seul à s'inquiéter sérieusement de la poussée du nazisme. J'avais été frappé, personnellement, de voir défiler dans les rues de Göttingen de véritables détachements de "chemises brunes" alors qu'à Hambourg et à Francfort, l'année précédente, leur présence était à peine perceptible !

C'est à Göttingen que j'ai fait la connaissance d'AHLFORS, analyste finlandais, qui fut par la suite professeur à Harvard ; je crois qu'il était là comme boursier Rockefeller. Parmi les fidèles du Séminaire d'Emmy NOETHER se trouvaient FITTING, HEILBRONN, MAHLER, ULM. Ce Séminaire eut aussi la visite de plusieurs étrangers : Benjamino SEGRE, André WEIL, qui revenait des Indes, et Jacques HERBRAND qui y fit deux brillants exposés. Il nous quitta au début de juillet pour aller faire de l'alpinisme en France, avec quelques camarades : c'est pendant l'une de ces courses en montagne que se produisit l'accident où il trouva la mort. Nous l'avons appris par une coupure de journal envoyée de France : nous en avons fait part à Emmy NOETHER et nous avons pu mesurer à la fois la sûreté de son jugement : *Ein so begabter Mensch* (un être tellement doué) et sa secrète mais profonde sensibilité : *Das kann man nicht denken* (c'est impensable) répétait-elle, profondément attristée.

A Göttingen aussi, il était de tradition, après la séance du séminaire, de faire de temps à autre une promenade à laquelle Emmy NOETHER participait. Nous allions dans de belles collines boisées, à l'est de la ville et nous nous arrêtions dans de petits restaurants champêtres pourvus d'attractions diverses. Avec simplicité et gentillesse, Emmy NOETHER se metttait au diapason ... et posait pour la photo, assise sur un tourniquet. Ce souvenir m'émeut profondément quand je le rapproche du jugement que j'ai porté sur elle, dans l'*Encyclopedia universalis* : "Vers 1930, bien des mathématiciens, des philosophes aussi (comme Jean CAVAILLES), ont été impressionés et définitivement influencés par les idées et les méthodes noethériennes. Emmy NOETHER compte, en bonne place (on pourrait même, avec le recul, dire en première place) parmi les grands esprits auxquels nous devons ce qu'on appelle "les mathématiques modernes". Elle a, en fait, introduit une nouvelle façon de penser en mathématiques."

Kapitel 6

Namenverzeichnis

Kapitel 7

Stichwortverzeichnis

Kapitel 8

Literaturverzeichnis

Literaturverzeichnis

[Art32] E. Artin. Über die Einheiten relativ galoisscher Zahlkörper. *J. Reine Angew. Math.*, 167:153–156, 1932. 14, 43

[Bae35] R. Baer. Automorphismen von Erweiterungsgruppen. (Exposés mathématiques, publiés à la mémoire de Jacques Herbrand, X.). *Actual. scient. et industr.*, 205:22 pp., 1935.

[BHN32] R. Brauer, H. Hasse, and E. Noether. Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren. *J. Reine Angew. Math.*, 167:399–404, 1932. 24

[Bra35] R. Brauer. Über die Darstellung von Gruppen in Galoisschen Feldern. (Exposés mathématiques, publiés à la mémoire de Jacques Herbrand, VII.). *Actual. scient. et industr.*, 195:15 pp., 1935.

[Bre34] M. Brelot. Étude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point. (Exposés mathématiques, publiés à la mémoire de Jacques Herbrand, III.). *Actual. scient. et industr.*, 139:55 pp., 1934.

[Car35] H. Cartan. Sur les groupes de transformations analytiques. (Exposés mathématiques IX.). *Actual. scient. et industr.*, 33:230–238, 1935.

[CH31] C. Chevalley and J. Herbrand. Nouvelle démonstration du théorème d'existence en théorie du corps de classes. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 192:814–815, 1931.

[Che31] C. Chevalley. Sur la théorie des restes normiques. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 191:426–428, 1931. 19, 24

[Che33a] C. Chevalley. La théorie du symbole de restes normiques. *J. Reine Angew. Math.*, 169:140–157, 1933. 23, 24

[Che33b] C. Chevalley. Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect. I 2:365–476, 1933. 23

[Che36a] C. Chevalley. Généralisation de la théorie du corps de classes pour les extensions infinies. *J. Math. pur. appl. (9)*, 15:359–371, 1936. 17

[Che36b] C. Chevalley. L'arithmétique dans les algèbres de matrices. (Exposés mathématiques, publiés à la mémoire de Jacques Herbrand, XIV.). *Actual. Sci. Ind.*, 323, 1936. 33 pp.

[Che40] C. Chevalley. La théorie du corps de classes. *Ann. Math. (2)*, 41:394–418, 1940. 17

[CL71] C. Chevalley and A. Lautmann. Biographical Note on Jacques Herbrand. In W. D. Goldfarb., editor, *Logical writings.*, pages 21–23. D. Reidel Publishing Company., 1971. 14

[Die34] J. Dieudonné. Sur quelques propriétés des polynômes. (Exposés mathématiques, publiés à la mémoire de Jacques Herbrand, II.). *Actual. Sci. Ind.*, page 24 pp., 1934.

[Die82] Jean Dieudonné. Jacques Herbrand et la théorie des nombres. In *Logic colloquium 1981, Proc. Herbrand Symp., Marseille 1981*, volume 107 of *Stud. Logic Found. Math.*, pages 3–7, 1982. 6, 14

[Dub35] P. Dubreil. Quelques propriétés des variétés algébriques se rattachant aux théories de l'algèbre moderne. (Exposés mathématiques, publiés à la mémoire de Jacques Herbrand. XII.). *Actual. scient. et industr.*, 210:61–73, 1935.

[Dub83] P. Dubreil. Souvenirs d'un boursier Rockefeller 1929-1931. *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques.*, 4:61–73, 1983. 13

[FR08] G. Frei and P. Roquette, editors. *Emil Artin and Helmut Hasse. Their correspondence 1923-1934. With contributions of Franz Lemmermeyer and an introduction in English.* Universitäts–Verlag, Göttingen, 2008. 497 pp. 9, 39

[Fue27] R. Fueter. *Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen.*, volume 2. Teubner, Berlin, 1927. 49

[Has26] H. Hasse. Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. I: Klassenkörpertheorie. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 35:1–55, 1926. 8, 18, 27, 44

[Has27] H. Hasse. Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. Teil Ia: Beweise zu I. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 36:233–311, 1927. 8, 27, 28, 34

[Has30a] H. Hasse. Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. II: Reziprozitätsgesetz. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 6(Ergänzungsband), 1930. IV + 204 pp. 8, 22, 40

[Has30b] H. Hasse. Die Normenresttheorie relativ–Abelscher Zahlkörper als Klassenkörpertheorie im Kleinen. *J. Reine Angew. Math.*, 162:145–154, 1930. 18, 23

[Has31a] H. Hasse. Beweis eines Satzes und Widerlegung einer Vermutung über das allgemeine Normenrestsymbol. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.–Phys. Kl. I*, pages 64–69, 1931. 23

[Has31b] H. Hasse. Theorie der zyklischen Algebren über einem algebraischen Zahlkörper. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.–Phys. Kl. I*, pages 70–79, 1931. 23

[Has32a] H. Hasse. Strukturtheorie der halbeinfachen Algebren über algebraischen Zahlkörpern. In *Verhandlungen Kongreß Zürich 1932.*, volume 2, pages 18–19. IMU, 1932. 23

[Has32b] H. Hasse. Theory of cyclic algebras over an algebraic number field. *Trans. Am. Math. Soc.*, 34:171–214, 1932. 23

[Has33] H. Hasse. Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper. Insbesondere Begründung der Theorie des Normenrestsymbols und Herleitung des Reziprozitätsgesetzes mit nichtkommutativen Hilfsmitteln. *Math. Ann.*, 107:731–760, 1933. 19

[Has34a] H. Hasse. Normenresttheorie galoisscher Zahlkörper mit Anwendungen auf Führer und Diskriminante abelscher Zahlkörper. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect. I vol. 2, Part 10:477–498, 1934. 36

[Has34b] H. Hasse. Über gewisse Ideale in einer einfachen Algebra. (Exposés mathématiques, publiés à la mémoire de Jacques Herbrand, I.). *Actual. Sci. Ind.*, 1934(109):12–16, 1934. 14

[Her30] J. Herbrand. Nouvelle démonstration et généralisation d'un théorème de Minkowski. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 191:1282, 1930.

[Her31a] J. Herbrand. Sur la théorie des corps de nombres de degré infini. *C. R. Acad. Sci.*, 193:504–506, 1931. 7, 12, 36

[Her31b] J. Herbrand. Sur la théorie des groupes de décomposition, d'inertie et de ramification. *Journ. de Math. (9)*, 10:481–491, 1931.

[Her31c] J. Herbrand. Sur les unités d'un corps algébrique. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 192:24–27, 188, 1931. 37, 43

[Her32a] J. Herbrand. Sur les classes des corps circulaires. *Journ. de Math. (9)*, 11:417–441, 1932.

[Her32b] J. Herbrand. Sur les théorèmes du genre principal et des idéaux principaux. *Abhandl. Math. Sem. Hamburg*, 9:84–92, 1932. 28, 29

[Her32c] J. Herbrand. Théorie arithmétique des corps de nombres de degré infini. I. Extensions algébriques finies de corps infinis. *Math. Ann.*, 106:473–501, 1932. 7, 12, 17, 36

[Her33a] J. Herbrand. Sur la non-contradiction de l'arithmétique. *J. Reine Angew. Math.*, 166:1–8, 1933. 6, 48

[Her33b] J. Herbrand. Théorie arithmétique des corps de nombres de degré infini. II. Extensions algébriques de degré infini. *Math. Ann.*, 108:699–717, 1933. 7, 12, 17, 36

[Her35] J. Herbrand. *Le développement moderne de la théorie des corps algébriques; corps de classes et lois de réciprocité.* Mem. Sci. Math. 75. Gauthier–Villars, Paris, 1935. 72 pp. 13, 23, 46

[Her71] J. Herbrand. *Logical writings. Ed. by W. D. Goldfarb. A translation of Écrits logiques.* D. Reidel Publishing Company., Dordrecht-Holland, 1971. VII, 312 pp. 14

[Iya29] S. Iyanaga. Über den Führer eines relativ zyklischen Zahlkörpers. *Proc. Acad. Tokyo.*, 5:108–110, 1929. 36

[Iya34] S. Iyanaga. Zur Theorie der Geschlechtermoduln. *J. Reine Angew. Math.*, 171:12–18, 1934. 36

[Jac99] A. Jackson. Interview with Henri Cartan. *Notices Amer. Math. Soc.*, 46:782–788, 1999. 6

[Jeh79] W. Jehne. On knots in algebraic number theory. *J. Reine Angew. Math.*, 311-312:215–254, 1979. 24

[Jeh82] W. Jehne. Der Hassesche Normensatz und seine Entwicklung. *Mitt. Math. Ges. Hamburg*, 11:143–153, 1982. 24

[LR06] F. Lemmermeyer and P. Roquette, editors. *Helmut Hasse and Emmy Noether. Their correspondence 1925-1935. With an introduction in English.* Universitäts–Verlag, Göttingen, 2006. 303 pp. 9

[Noe34] E. Noether. Zerfallende verschränkte Produkte und ihre Maximalordnungen. (Exposés mathématiques, publiés à la mémoire de Jacques Herbrand, IV.). *Actual. Sci. Ind.*, 1934(148):15 p., 1934.

[Sch30] F. K. Schmidt. Zur Klassenkörpertheorie im Kleinen. *J. Reine Angew. Math.*, 162:155–168, 1930. 23

[Sch36] A. Scholz. Totale Normenreste, die keine Normen sind, als Erzeuger nicht abelscher Körpererweiterungen.I. *J. Reine Angew. Math.*, 172:100–107, 1936. 24

[Sch40] A. Scholz. Totale Normenreste, die keine Normen sind, als Erzeuger nicht abelscher Körpererweiterungen.II. *J. Reine Angew. Math.*, 182:217–234, 1940. 24

[Ste30] E. Steinitz. *Algebraische Theorie der Körper. Neu herausgegeben, mit Erläuterungen und einem Anhang: Abriß der Galoisschen Theorie versehenen von R. Baer und H. Hasse.* de Gruyter–Verlag, Berlin, 1930. 177 pp. 12

[Tak20] T. Takagi. Über eine Theorie des relativ abelschen Zahlkörpers. *J. College of Science, Imp. Univ. of Tokyo.*, 41:1–133, 1920. In Collected Papers, 13., pp. 73–167. 16

[Wei35] A. Weil. A'rithmétique et géométrie sur les variétés algébriques. (Exposés mathématiques, publiés à la mémoire de Jacques Herbrand, XI.). *Actual. scient. et industr.*, 206:16 pp., 1935.