VORWORT

Die algebraische Zahlentheorie hat sich aus den ersten Ansätzen bei Gauß unter den Händen der großen Meister des vergangenen und dieses Jahrhunderts zu einem gewaltigen Lehrgebäude entwickelt, das heute überreich an allgemeinen Sätzen, beherrschenden methodischen Gesichtspunkten und tiefen strukturellen Einsichten im wesentlichen abgeschlossen dasteht. Die erste Phase dieser Entwicklung hat Hilbert [2] in seinem berühmten Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper[1]) zusammenfassend dargestellt. Dieser Bericht bringt in seinen ersten beiden Teilen die allgemeinen Grundlagen der Theorie und geht dann in weiteren drei Teilen auf drei spezielle Typen algebraischer Zahlkörper des näheren ein, nämlich auf die quadratischen Zahlkörper, die Kreiskörper und die Kummerschen Zahlkörper. Vom heutigen Standpunkt aus gesehen führen diese letzten drei Teile des Hilbertschen Zahlberichts Spezialfälle der allgemeinen Theorie der relativ-abelschen Zahlkörper durch. Sie leiten die zweite Phase der Entwicklung ein, zu der Hilbert selbst mit seiner kühnen Konzeption des Klassenkörperbegriffs und der Hauptsätze der Klassenkörpertheorie den Anstoß gab. Diese zweite Phase, die Theorie der relativ-abelschen Zahlkörper, in der die Klassenkörpertheorie in voller Allgemeinheit entwickelt und auf die Herleitung des allgemeinsten Reziprozitätsgesetzes angewandt wird, habe ich [1] im Anschluß an Hilberts Zahlbericht in einem dreiteiligen Bericht[2]) zusammenfassend dargestellt.

Bei dieser ganzen Entwicklung, die von allgemeinen theoretischen, strukturellen, methodischen und systematischen Gesichtspunkten geleitet wurde, ist nun aber das jedem echten Zahlentheoretiker eigene Bedürfnis nach expliziter Beherrschung des behandelten Gegenstandes bis zur Durchführung numerischer Beispiele stark in den Hintergrund getreten. Fragt man heute einen Zahlentheoretiker, für welche Typen algebraischer Zahlkörper er in der Lage ist, die Gesetzlichkeiten der allgemeinen Theorie durch explizite Aufstellung der allgemeinen Strukturinvarianten für den betreffenden Körpertypus zu erläutern oder auch als Vorbereitung dazu nur etwa eine Ganzheitsbasis, die Diskriminante, ein Grundeinheitensystem und die Klassenzahl nach einem systematischen strukturinvarianten Verfahren zu gewinnen, so wird, wenn er ehrlich ist, die Antwort im allgemeinen

[1]) Im folgenden kurz als „Zahlbericht" zitiert.

[2]) Im folgenden kurz als „Klassenkörperbericht" zitiert.

lauten: nur für die quadratischen Zahlkörper. Nur in diesen Körpern fühlt sich heute jeder Zahlentheoretiker und wohl auch mancher andere Mathematiker so zu Hause, daß er in ihnen mit den Begriffen der allgemeinen Theorie nach Belieben schalten und walten kann, während in höheren Körpertypen selbst bei völliger und souveräner Beherrschung der allgemeinen Theorie die Bewegungsfreiheit zum mindesten stark eingeschränkt ist. Zwar mangelt es nicht an Ansätzen zu einer entsprechenden Beherrschung auch anderer als quadratischer Zahlkörper und an numerischen Beispielen, die zur Erläuterung allgemeiner Gesetzlichkeiten hier und dort angefügt sind. Jedoch fehlt es den meisten solchen Ansätzen an Einheitlichkeit, an Systematik und vor allem an dem Gefühl dafür, daß man den zu behandelnden Körpertypus nicht durch zufällige Bestimmungsstücke – wie etwa die Koeffizienten einer erzeugenden Gleichung, sei diese willkürlich gewählt oder durch irgendwelche Reduktionsbedingungen normiert –, sondern durch Strukturinvarianten, wie Diskriminante, zugeordnete Klassengruppe, Führer, Charaktere, beschreiben sollte, und in den numerischen Beispielen herrschen ad hoc geschaffene Kunstgriffe und mehr oder weniger tastendes Erraten gegenüber systematischen Berechnungsverfahren vor. So kann man etwa für einen vorgelegten Körpertypus, sagen wir die absolut-zyklischen Zahlkörper, das konstruktive Verfahren der allgemeinen Theorie zur Gewinnung einer Ganzheitsbasis ablaufen lassen, jedoch erhält man auf diese Weise im allgemeinen nicht eine ausgezeichnete, aus strukturinvarianten Bestimmungsstücken dieses Körpertypus gebildete Ganzheitsbasis. Mit einer *complete list of all cases*, wie sie für solche und ähnliche Fälle in zahlreichen nordamerikanischen Arbeiten als Endziel registriert wird, ist das Bedürfnis des tiefer strebenden Zahlentheoretikers durchaus nicht befriedigt. Diesen uns oft reichlich flach erscheinenden *complete solutions* mangelt es meistens an der Eingliederung des betrachteten Gegenstandes in eine allgemeine Theorie und an dem sinnvollen Beherrschtsein des Spezialfalles von den in dieser Theorie maßgebenden Strukturinvarianten. Man wird an den Typus gewisser Arbeiten aus den beschreibenden Naturwissenschaften oder aus der Vorgeschichte erinnert, die zwar getreulichst alles Material sammeln und registrieren, aber versäumen, in diese Sammlung Ordnung und System zu bringen, sie nach allgemeinen Gesichtspunkten zu deuten und das Wesentliche vom Unwesentlichen, das Gesetzliche vom Zufälligen abzuheben.

Was die vorstehend mehrfach berührte Durchführung numerischer Beispiele betrifft, so möchte ich hier dem Mißverständnis vorbeugen, daß ich solchen Beispielen gegenüber allgemeinen Sätzen eine unberechtigte Bedeutung beimesse. Manche zahlentheoretischen Lehrbücher, Arbeiten oder Vorträge sind mit numerischen Beispielen geradezu gespickt, und es wird gar an ihnen die allgemeine Untersuchung fortgeführt. Die Erfahrung lehrt, daß der Leser oder Hörer, wenn er nicht übertrieben gewissenhaft ist, diese Beispiele einfach übergeht und dem allgemeinen Faden der Untersuchung nachstrebt. Er wird sich lieber selbst Beispiele suchen und diese durchführen, und das mit Recht. Denn der Sinn eines Zahlenbeispiels liegt doch keinesfalls in der formvollendet mitgeteilten Rechnung und ihrem Ergebnis, sondern in der Aktivität, die zu seiner Durchführung erforderlich ist. Das Studium einer allgemeinen Theorie entwickelt ein Potential von Können, von geistiger Kraft und von Macht über die behandelte Materie. Die Durchführung eines Beispiels ist der Prüfstein dafür, daß man sich die Theorie innerlich zu eigen gemacht hat und sie souverän beherrscht, ist die Probe auf die gewonnene Kraft und Macht. Die Ausübung dieses Könnens, das Spielenlassen dieser Kraft, die Anwendung dieser Macht löst bei dem, der das Beispiel selber rechnet, ein Vollgefühl von Freude und Befriedigung aus, nicht aber auch bei dem, der es fertig vorgesetzt bekommt. Die Frage, inwieweit Entsprechendes ganz allgemein für jede Art mathematischer Betätigung, also auch für das Entwickeln mathematischer Theorien gilt, will ich hier nur aufwerfen; es ließe sich viel dazu sagen. Mit vollem Recht tritt in der Physik neben die Vorlesung über Experimentalphysik das physikalische Praktikum, in dem das rezeptiv Erlernte in eigener Aktivität befestigt werden soll. Eine ganz entsprechende Rolle hat in der Zahlentheorie die Durchführung numerischer Beispiele. Darüber hinaus sind sie in der Hand des forschenden Mathematikers genau das, was für den Physiker das Experiment ist, nämlich eines der Hauptmittel zur Auffindung neuer Gesetzlichkeiten. Hiernach ist klar, aus welchen Gründen und aus welchen nicht ich Wert auf die explizite Beherrschung der allgemeinen Theorie bis zur Durchführung numerischer Beispiele lege, aber in meiner Arbeit selbst solche nur dort bringe, wo es aus sachlichen Gründen geboten erscheint.

Der Sinn dafür, daß die explizite Beherrschung des Gegenstandes bis in alle Einzelheiten mit der allgemeinen Fortentwicklung der Theorie Schritt halten sollte, war bei Gauß und später vor allem noch bei Kummer in ganz ausgeprägter Weise vorhanden. Gerade bei Kummer findet sich eine Fülle von in dieser Richtung liegenden ergänzenden Untersuchungen zu seiner allgemeinen Theorie der idealen Zahlen. Unter dem beherrschenden Einfluß, den Hilbert auf die weitere Entwicklung der algebraischen Zahlentheorie ausgeübt hat, ist jedoch dieser Sinn mehr und mehr verlorengegangen. Es ist typisch für Hilberts ganz auf das Allgemeine und Begriffliche, auf Existenz und Struktur gerichtete Einstellung, daß er in seinem Zahlbericht alle mit der expliziten Beherrschung des Gegenstandes sich befassenden Untersuchungen und Ergebnisse von Kummer und anderen durch kurze Hinweise oder Andeutungen abtut, ohne sich mit ihnen im einzelnen zu beschäftigen, wie er ja auch die mehr rechnerischen, konstruktiven und daher der expliziten Durchführung leicht zugänglichen Beweismethoden Kummers systematisch und folgerichtig durch mehr begriffliche, numerisch schwerer zugängliche und kaum kontrollierbare Schlußweisen ersetzt hat. Auch Dedekind mit seiner stark begrifflichen, schon tief ins Axiomatische vorstoßenden Methodik hat an dieser Entwicklung entscheidenden Anteil, während auf der anderen Seite die mehr konstruktiven Methoden von Kronecker und Hensel die Kummersche Tradition weiterführen, sich aber gegenüber dem beherrschenden Einfluß Hilberts nur schwer durchsetzen, bis dann allerdings in letzter Zeit entscheidende Erfolge gerade dieser Methodik den Boden für die Rückkehr zu einem organischen Gleichgewicht beider Richtungen bereitet haben. Es soll selbstverständlich nicht das große Verdienst verkannt oder geschmälert werden, das sich Hilbert gerade durch sein unbeirrbares, konsequentes Festhalten an der geschilderten Einstellung um die Aufwärtsentwicklung der Theorie der algebraischen Zahlen zu eindrucksvoller Allgemeinheit, begrifflicher Klarheit und formvollendeter Einfachheit erworben hat. Seine großen Erfolge und all das, was nach ihm Kommende in seinem Geiste und mit seinen Methoden zur Vollendung des von ihm begonnenen Bauwerks beitragen konnten, sprechen für sich. Nur ist mir im Laufe meiner eigenen Teilnahme an der Endphase dieser Entwicklung immer deutlicher und eindringlicher bewußt geworden, daß bei aller blendenden Schönheit und imponierenden Größe doch noch etwas Wesentliches fehlt, damit man sich in dem errichteten Bau auch so recht zu Hause fühlen kann. Man muß seine einzelnen Stockwerke, seine einzelnen Räume in ihrer besonderen Eigenart und in ihrer Beziehung zum Ganzen genauestens kennenlernen, und man muß lernen, sich in ihnen frei zu bewegen. Dazu erscheint es mir, vom Bilde zum Gegenstand zurückkehrend, geboten, die der Hilbertschen entgegengesetzte Einstellung auf das Explizite und auf das Detail bis zum Numerischen wieder mehr zu ihrem natürlichen Recht kommen zu lassen. Von diesem Gesichtspunkt geleitet, hatte ich schon im zweiten Teil meines Klassenkörperberichts, der sich mit dem allgemeinsten Reziprozitätsgesetz befaßt, den expliziten Formeln zu diesem Gesetz, anknüpfend an vorhilbertsche Untersuchungen, einen verhältnismäßig breiten Raum gegeben. Mit der vorliegenden größeren Arbeit greife ich diesen Gesichtspunkt an einem anderen Gegenstand erneut auf.

Ich habe mir zum Ziel gesetzt, wenn möglich die Klasse der absolut-abelschen Zahlkörper, zum mindesten aber die Klasse der absolut-zyklischen Zahlkörper in systematischer und strukturinvarianter Weise so weitgehend zu erschließen, daß man sich in ihnen ebenso frei bewegen kann wie in den quadratischen Zahlkörpern. Als Prüfstein für die Erreichung dieses Zieles mag gelten, daß es auf Grund der zu entwickelnden Methoden, Formeln und Ergebnisse gelingt, für diese Körper nach einem schematischen Verfahren ebensolche Tafeln zu berechnen, wie sie Sommer [1] für die quadratischen Zahlkörper seinem bekannten Lehrbuch beigegeben hat. Derartige Tafeln würden für jeden Zahlentheoretiker, der sich für die schon gewonnenen allgemeinen Gesetzlichkeiten aus der algebraischen Zahlentheorie und für etwaige weitere solche Gesetzlichkeiten numerische Beispiele bilden will, sei es um sich die Theorie innerlich nahezubringen, sei es um auf experimentellem Wege neuen Gesetzen und Zusammenhängen auf die Spur zu kommen, ein äußerst wertvolles Handinstrument bilden, so wie es die Sommerschen Tafeln schon heute sind. Bisher liegen in dieser Richtung nur die nach Kummers Angaben berechneten Tafeln komplexer Primzahlen von Reuschle [1] vor, die aber trotz der Fülle des in ihnen zusammengetragenen Zahlenmaterials unbefriedigend sind, weil sie gerade die wesentlichen Dinge, nämlich Grundeinheiten, Klassenzahl und Klassengruppe, nicht enthalten.

Die vorliegende Arbeit soll als ersten Beitrag zu der genannten umfassenden Zielsetzung die Grundlagen für die systematische Berechnung der Klassenzahl absolut-abelscher Zahlkörper entwickeln. Darüber hinaus ist sie als eine Ergänzung des Hilbertschen Zahlberichts und meines Klassenkörperberichts gedacht. Neben den Gesichtspunkt der Ausnutzung der allgemeinen Klassenzahlformel zur wirklichen Berechnung der Klassenzahl wird demgemäß der Gesichtspunkt treten, über die von Kummer und anderen gewonnenen Ergebnisse für die Klassenzahl der Kreiskörper und einiger anderer Körpertypen zu berichten, diese Ergebnisse auf beliebige absolut-abelsche Zahlkörper zu verallgemeinern und sie vom Standpunkt der allgemeinen Klassenkörpertheorie aus zu beleuchten.

Neben den eigentlichen Ergebnissen über die Klassenzahl absolut-abelscher Zahlkörper enthält die Arbeit eine Fülle von auch an sich reizvollem algebraischem und zahlentheoretischem Detail, teils in die Beweise eingearbeitet, teils besonders hervorgehoben, so eine eigenartige Verallgemeinerung der bekannten Zerlegung der Gruppendeterminante einer abelschen Gruppe in Linearfaktoren, Sätze über das Verzweigungsverhalten eines absolut-abelschen Zahlkörpers über seinem größten reellen Teilkörper sowie ein neuartiges Seitenstück zum Gaußschen Lemma über quadratische Reste. Entgegen mancher Äußerung von anderer Seite bin ich immer der Auffassung gewesen, daß die klassische Zahlentheorie mit ihrer auf die Wirklichkeit der natürlichen Zahlen gerichteten Zielsetzung und Methodik heute durchaus noch einer lebendigen und fruchtbaren Weiterentwicklung auf dem ihr ureigenen Boden fähig ist, auch ohne daß man in abstrakten algebraischen Gefilden oder in Topologie, Mengenlehre, Axiomatik neue Nahrung für den arithmetischen Betätigungsdrang zu suchen braucht. Wie man sich in der Musik nach der in heroischen und dämonischen Werken und in kühnsten Phantasien schwelgenden romantischen und nachromantischen Epoche heute bei aller Freude an diesem Schaffen doch auch wieder stärker auf den Urquell reiner und schlichter Musikalität der alten Meister besinnt, so scheint mir auch in der Zahlentheorie, die ja wie kaum eine andere mathematische Disziplin von dem Gesetz der Harmonie beherrscht wird, eine Rückbesinnung auf das geboten, was den großen Meistern, die sie begründet haben, als ihr wahres Gesicht vorgeschwebt hat. Die vorliegende Arbeit mag ein lebendiges Zeugnis für diese meine Auffassung sein und weiteren Untersuchungen auf dem betretenen Felde den Weg weisen.

Göttingen, im August 1945.

Zu großem Dank verpflichtet bin ich Frl. G. Beyer, Herrn H. W. Leopoldt und Herrn C. Meyer für viele wertvolle Hinweise bei der Durchsicht des Manuskripts und der Korrekturen, Herrn R. Schwarzenberger für seine Hilfe bei der Durchführung einiger besonders komplizierter Rechnungen zu den Tabellen, und dem Verlag für sein bereitwilliges Eingehen auf meine mannigfachen Wünsche bei der Drucklegung.

Hamburg, im November 1951.