Briefwechsel

H. Hasse – C. Chevalley

`Version von Samstag, 3. Juli 2004`

`Letztmalig geändert am 3. Juli 2004`

`Durchgesehen, korrigiert und ergänzt`

`von Günther Frei am 4. Oktober 2005`

Hasse an Chevalley 16.11.34 – 19.10.48
Chevalley an Hasse 25.9.31 – 17.7.38
Manuskripte von Chevalley (1932)

Für PDFLaTeX/hyperref und LaTeX2ε/hyperref sowie für Übersetzung mit `latex --src-specials` geeignet.

Inhaltsverzeichnis

Der Text wurde durchgesehen, korrigiert und ergänzt von Günther Frei im Septeber 2005. Orthographische Fehler wie auch mathematische Schreibfehler von Chevalley und Hasse wurden ohne Kennzeichnung korrigiert, ebenso die Akzentfehler, wobei die moderne französische Orthographie zu Grunde gelegt wurde. Ergänzungen wurden in eckige Klammern [ ] gesetzt. Hingegen wurde der mathematische Teil der Briefe noch nicht mit den Originalarbeiten von Chevalley und Hasse verglichen. Das muss gelegentlich noch ausgeführt werden.

Kapitel 1

Korrespondenz Hasse–Chevalley

1.1 25.09.1931, Chevalley an Hasse

25 Septembre 1931

Cher Monsieur et Maître –

Je vous renvoie ci-contre les épreuves corrigées du mémoire d'Herbrand.

Pourrez-vous s'il vous plaît commander cent tirages à part au nom de Monsieur Herbrand, 10 R. Viollet–le–Duc Paris IX

Je ne sais encore si la bourse Rockefeller m'est accordée. De toutes manières, j'espère pouvoir venir en Allemagne l'année prochaine ; et probablement pendant le 2$^{\underline{\text{d}}}$ semestre à Marburg ; n'y voyez-vous pas d'inconvénients ?

Veuillez croire, cher Monsieur, à mes sentiments les plus respectueux

Cl. Chevalley

1.2 13.10.1931, Chevalley an Hasse

Villa Ambroise Paré
19, AVENUE D'ORLÉANS
Paris 14e

Gobelins 64-50

13 Octobre 1931

Cher Monsieur et Maître

Je vous envoie ci-contre le 2d jeu d'épreuves de l'article d'Herbrand pour le Journal de Crelle. En effet, au cours des opérations de ma libération du service militaire les épreuves corrigées que vous aviez renvoyées à Monsieur Herbrand se sont perdues. Je suis absolûment désolé du contre-temps et des ennuis que cela entraîne, et vous en fais toutes mes excuses.

Les points douteux que vous m'avez signalés dans l'autre épreuve ont été, je crois, éclaircis dans celle-ci. Les points qui interviennent dans les formules doivent subsister (ils correspondent aux notations employées dans D. I.). J'ai introduit aux autres endroits que vous aviez marqués d'un point d'interrogation les corrections nécessaires. Par contre je n'ai pas introduit les corrections purement typographiques que vous aviez faites, car je ne me les rappelais pas assez exactement. Le correction indiquée par Monsieur Bernays pour la Note I me semble toute indiquée. Aussi ai-je rayé la portion de phrase qu'il indique. Enfin Monsieur Bernays avait ajouté dans le paragraphe 4 une portion de phrase, dont je ne me souviens plus exactement ; peut-être pourrez-vous la retrouver dans les épreuves vues par Monsieur Bernays.

Je crois que Monsieur Herbrand vous écrit de son côté, en vous indiquant les dates nécessaires à la note biographique.

Veuillez recevoir encore toutes mes excuses et croire à mes sentiments les plus respectueux.

1.3 31.12.1931, Chevalley an Hasse

19, AVENUE D'ORLÉANS, PARIS (XIV^E)

LA MASSOTERIE
CHANÇAY (INDRE-&-LOIRE)

31 Décembre 1931

Cher Monsieur et Maître

J'apprends par une lettre de Mademoiselle Noether que vous avez l'intention de vous occuper de la question des rapports entre les classes d'idéaux dans l'ordre maximum d'un système hypercomplexe et dans un ordre maximum commutatif qui y est contenu. A ce propos, et sur les conseils de Monsieur Artin j'ai examiné la question des idéaux à droite de l'ordre maximum dont l'ordre à gauche contient l'ordre commutatif. Je ne suis arrivé qu'à des résultats négatifs. Je voulais démontrer que les idéaux en question sont de la forme $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal de l'anneau commutatif et $\mathfrak{A}$ un idéal bilatère. Mais ce théorème est faux en général. On peut facilement donner des exemples en construisant le "Verschränkte Produkt" d'un corps $\mathfrak{p}$-adique relativement cyclique par rapport à un sous-corps par son groupe. Pour un centre $\mathfrak{p}$-adique, le théorème est vrai dans les cas suivants : quand l'idéal premier de l'anneau commutatif n'est par ramifié par rapport au centre ; quand le degré relatif par rapport au centre du corps d'inertie est premier à l'ordre de l'algèbre considérée ; dans tous les autres cas il est faux.

André Weil a eu l'idée de demander aux mathématiciens qui ont connu Herbrand s'ils voudraient collaborer à un livre qui serait écrit en mémoire de lui et composé de divers mémoires se rapportant aux disciplines qui l'ont surtout intéressé. Puis-je vous demander si vous voudrez vous associer à ce projet et donner un mémoire pour ce livre ?

Je ne suis en France que pour les vacances de Noël. Autrement j'habite à Hamburg, Pension Hallerecke, 83 Hallerstrasse.

Veuillez recevoir, cher Monsieur, l'expression de mes sentiments les plus respectueux.

C. Chevalley

1.4 17.01.1932, Chevalley an Hasse

Hamburg 17/1/32
83 Hallerstrasse

Cher Monsieur et Maître,

Je vous remercie de votre lettre que j'ai trouvée en revenant à Hambourg.

Je m'excuse du mot "ordre" que j'ai employé à tort : je voulais dire l'index de l'algèbre en question, c'est à dire l'ordre du corps gauche sur lequel elle est algèbre complète de matrices.

Naturellement, je me sers dans ma démonstration de votre théorie des algèbres $\mathfrak{p}$-adiques. Mais je ne fais pas de la même manière que vous. Voici, en gros, ma démonstration :

1). *Notations.* Comme je reste constamment dans un même corps $\mathfrak{p}$-adique, je supprime l'indice p; prenant les mêmes notations que dans votre lettre, désignons de plus par z l'ordre maximum du central Z, par P un nombre de k tel que $P\mathfrak{o}$ soit l'idéal premier de $\mathfrak{o}$, par $\mathfrak{p}$ l'idéal bilatère de $\mathfrak{O}$.

2). Je cherche un idéal A tel que $\mathfrak{o}A = A$ et *minimum* par rapport à cette propriété. Un tel idéal divise $\mathfrak{p}$, car sinon on pourrait le remplacer par $(A, \mathfrak{p})$ qui dans le cas $\mathfrak{p}$-adique est toujours $\neq \mathfrak{O}$. Considérons $\mathfrak{O}/A$ comme un $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}$-module droit $\mathfrak{M}$. De $\mathfrak{o}\mathfrak{O} = \mathfrak{O}$, $\mathfrak{o}A = A$ il résulte que $\mathfrak{M}$ est $\mathfrak{o}$-module gauche. Considérons $P\mathfrak{M}$; c'est un $\mathfrak{o}$-module gauche et aussi un $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}$-module droit. Il y'a donc un idéal à droite A' tel que $\mathfrak{O}/A' = \mathfrak{M}/P\mathfrak{M}$. On a $\mathfrak{o}A' = A'$, donc ou bien $A' = A$, c'est à dire $P\mathfrak{M} = \mathfrak{o}$ ou bien $A' = \mathfrak{O}$, c'est à dire $P\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$. Cette dernière hypothèse est absurde, car il résulterait $P^k\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$, $p\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ alors que $p\mathfrak{M} = \mathfrak{O}$ puisque $p\mathfrak{O}$ est multiple de $\mathfrak{p}$. Donc $P\mathfrak{M} = \mathfrak{O}$, c'est à dire : A divise PI et $\mathfrak{M}$ est $\mathfrak{o}/P\mathfrak{o}$–module gauche.

Considérons $\mathfrak{o}/P\mathfrak{o}$ et $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}$ comme des systèmes hypercomplexes par rapport à z/p, qui est un corps à p^f éléments. d désignant le degré relatif de $P\mathfrak{o}$ par rapport à Z, $\mathfrak{o}/P\mathfrak{o}$ est un corps à p^{df} éléments. ρ désignant l'index de K, et en posant $n = \rho n_1$, $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}$ est l'anneau des matrices de degré n_1 à coefficients dans un corps à $p^{f\rho}$ éléments. $\mathfrak{M}$ est isomorphe à un idéal à gauche de $\mathfrak{o}/P\mathfrak{o} \times \mathfrak{O}/\mathfrak{p}$, qui est somme directe de (d,ρ) algèbres simples dont chacune est anneau complet de matrices de degré n_1 sur un corps à $p^{\frac{fd\rho}{(d,\rho)}}$ éléments. Par suite un idéal simple à gauche de ce product direct contient $p^{\frac{fd\rho n_1}{(d,\rho)}} = p^{\frac{fdn}{(d,\rho)}}$ éléments, et on a

$$N(A) = p^{x\frac{fdn}{(d,\rho)}} \qquad x = \text{ entier.}$$

D'autre part $N(\mathfrak{p}) = p^{f\rho n_1^2} = p^{fnn_1}$, d'où $N(p\mathfrak{O}) = p^{fnn_1\rho}$ et $N(P\mathfrak{O}) = p^{fdn}$

1^r Cas $(d,\rho)=1$. On a

$$N(A) = p^{xfdn}$$

et $A|P\mathfrak{O}$. D'où $x=1$, $A = P\mathfrak{O}$.

2^d Cas $d = n$. On a

$$N(A) = p^{xfnn_1}$$

et $A|\mathfrak{p}$. D'où $x=1$, $A=\mathfrak{p}$.

On conclut facilement de là au cas d'un idéal A quelconque (non minimum) :

Que le théorème soit faux dans les autres cas, je le démontre d'une manière beaucoup plus compliquée et cela n'a je crois pas grand intérêt.

Voici en tout cas un contre-exemple simple :
Z = corps des nombres 2–adiques rationnels
$\mathfrak{K}$ = corps gauche $\mathsf{Z}(\sqrt{5},\rho)$ avec

$$\rho^2 = 2 \qquad \rho\sqrt{5} = -\sqrt{5}\rho$$

K = algèbre des matrices de degré 2 à coefficients dans $\mathfrak{K}$.
$\mathfrak{O}$ = matrices à coefficients entiers de k.
k = corps engendré par $\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. k est isomorphe à $\mathsf{Z}(\sqrt{5},\sqrt{2})$.
Les nombres 1, $\frac{+\sqrt{5}}{2}$, $P = \sqrt{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $P\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ forment une base des entiers de k. L'idéal premier de $\mathfrak{o}$ est $P\mathfrak{o}$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vartheta \end{pmatrix} \mathfrak{O}.$$

On a $\mathfrak{o}A = A$: en effet

$$\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vartheta \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \vartheta \\ \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

Or on a $N(A) = 2^4$, $N(\mathfrak{p}) = N(P\mathfrak{O}) = 2^8$. Il est donc impossible que $A = P^\alpha \mathfrak{O}\mathfrak{p}^\beta$.

Je vous remercie de bien vouloir donner un mémoire pour le livre qui sera dédié a Herbrand. Cela ne presse d'ailleurs pas du tout : je ne pense pas qu'il puisse être question de faire paraître le livre avant plus d'un an.

Au sujet des progrès de la théorie du corps de classes, je ne connais pas encore de projet d'exposition d'ensemble de toutes les simplifications. La démonstration du théorème d'éxistence paraîtra dans un mémoire des "Hamburger Abhandlungen" et dans ma thèse. Mais les dernières découvertes de Monsieur Artin ne sont pas encore je crois rédigées en vue de parution. D'ailleurs Monsieur Artin m'a dit qu'il pensait vous rencontrer à la fin de cette semaine à Göttingen et vous parler de la chose.

Veuillez croire, cher Monsieur, à mes sentiments les plus respectueux.

1.5 22.03.1931(32?), Chevalley an Hasse

C. Chevalley
Chançay
Indre et Loire

Le 22 Mars 1931

Cher Monsieur et Maître

Je trouve en revenant en France votre carte. Je n'avais pas vu l'article en question au moment de sa parution. C'est un monument d'ignorance et de mauvaise foi. Je l'ai montré à Monsieur Hadamard qui en a été indigné et qui a bien ri de se voir avec M. Picard, etc., citer comme auteur à propos de la théorie des corps de nombres algébriques, sur laquelle il n'a, comme il me l'a dit lui-même, pas écrit une ligne. M. Montessus de Ballore est un vieux professeur à la Faculté libre de Lille (donc n'occupant aucun poste officiel) qui, d'après ce que m'a dit Monsieur Hadamard ne semble pas devoir être pris trop au sérieux. Monsieur Hadamard m'a dit qu'il ne pensait pas que l'article vaille la peine que vous y répondiez ; il enverra peut-être lui-même un mot de rectification, après avoir examiné la question de plus près. Je vous tiendrai au courant.

En raison du fait que Monsieur Artin traitera au second semestre de la théorie des systèmes hypercomplexes et que vous traiterez de la théorie du corps de classes, sur laquelle j'ai déjà entendu un cours cet hiver, je voudrais vous demander si vous verriez inconvénient à ce que je partage le second semestre entre Marburg et Hamburg. J'aurais grand honneur et plaisir à passer auprès de vous un semestre entier, et comme j'espère revenir l'année prochaine en Allemagne, ce projet pourrait n'être, si vous le permettez, que différé de six mois.

Je vous remercie pour les tirages à part que vous avez bien voulu m'envoyer. Je compte d'ailleurs m'en servir pour deux exposés que je vais faire au séminaire de Monsieur Hadamard, l'un sur les progrès récents de la théorie des systèmes hypercomplexes, l'autre sur les résultats de M. Siegel.

Veuillez agréer, cher Monsieur et Maître, l'expression de mes sentiments les plus respectueux

C. Chevalley

1.6 12.04.1932, Chevalley an Hasse

12 Avril 1932

Cher Monsieur et Maître.

Je vous ai envoyé hier un exemplaire de la nouvelle rédaction de ma thèse, contenant les démonstrations des résultats de ma note. Les conditions de "Nichtrest" dont vous parlez se trouvent, si j'ai compris, incluses dans le lemme analogue à celui de la loi de réciprocité. Mais je ne comprends pas bien ce que vous voulez dire en disant que je pourrais tout faire avec l'existence d'une infinité d'idéaux premiers du premier degré. D'ailleurs, si vous avez donné un fondement à la théorie du corps de classes au moyen des systèmes hypercomplexes, la question des démonstrations arithmétiques est résolue. C'est pourquoi j'attends avec une grande impatience de lire la note dont vous m'avez parlé aux Math[ematische] Ann[alen].

Serez-vous à Marburg à la fin d'Avril : j'ai l'intention de venir vous saluer en retournant à Hamburg. Nous pourrons en même temps parler de ces questions.

Veuillez agréer, cher Monsieur, l'expression de mes sentiments les plus respectueux.

C. Chevalley

1.7 18.04.1932, Chevalley an Hasse

Villa Ambroise Paré
19, AVENUE D'ORLÉANS
Paris 14^e

Gobelins 64-50

18 Avril

Cher Monsieur et Maître

Je ne comprends pas comment il se fait que votre manuscrit ne me soit pas parvenu. L'adresse "Chançay" est toujours suffisante, et mon père y est resté et n'a rien reçu. J'espère que le papier vous est revenu.

Comme vous avez pu le voir, les moyens analytiques dont j'ai besoin ne sont pas plus simples que dans l'ancienne théorie ; seul, leur champ d'application est plus restreint. J'espérais pouvoir trouver une démonstration tout-à-fait élémentaire dans le cas corps circulaires, mais n'ai pu y arriver.

Je pense arriver Jeudi après-midi à Marburg, et me réjouis d'avance d'y pouvoir faire votre connaissance.

Veuillez croire, cher Monsieur, à mes sentiments les plus respectueux.

Cl. Chevalley

1.8 12.05.1932, Chevalley an Hasse

C. Chevalley
83 Hallerstrasse.

Le 12 Mai 1932

Cher Monsieur et Maître,

Je vous remercie de vos aimables lettres et notamment des suggestions que contient la première.

J'ai eu la même idée que vous en ce qui concerne les systèmes de facteurs. On peut même démontrer un peu plus, à savoir la proposition suivante : Soit sur un corps de base k un sur-corps galoisien Z composé de deux sur-corps galoisiens étrangers Z_1, Z_2, de sorte que le groupe de Z est produit direct des groupes de Z/Z_1 et de Z/Z_2. Désignons par $1, \sigma, \ldots$ les opérations du premier groupe, par $1, \tau, \ldots$ celles du second. Soit (a) un système de facteurs de Z. On peut toujours poser $u_{\sigma\tau} = u_\sigma u_\tau$ (notations évidentes) de sorte que $a_{\sigma,\tau} = 1$. Si A est l'algèbre définie par ce système de facteurs, et si $n = (Z : Z_1)$ l'algèbre A^n est semblable [à] (a', Z_2), où $a'_{\sigma,\sigma'} = N_{ZZ_2}(a_{\sigma,\sigma'})$. La démonstration n'est qu'une question de calcul un peu compliqué.

Pour ce qui est du théorème de ma thèse, on peut le généraliser en disant : Si K_1, K_2 sont deux sur-corps relativement cycliques de degré n de k (corps de nombres p–adiques) si β est un nombre de k tel que $\left(\frac{\beta, K_1}{p}\right) = \sigma_1$, $\left(\frac{\beta, K_2}{p}\right) = \sigma_2$, β est norme relative par rapport à k d'un nombre du sous-corps de K_1K_2 appartenant au groupe $(\sigma_1\sigma_2)$. Ce théorème se démontre simplement au moyen des nombres hypercomplexes, au moins en admettant que σ_1, σ_2 sont des substitutions primitives. Je vous envoie la démonstration, qui est bâtie sur un principe que je crois assez nouveau.

Pour ce qui est de la démonstration de M. Artin pour le théorème de Wedderburn, je pense que j'avais fait confusion : elle repose sur la décomposition de l'ensemble des éléments $\neq 0$ du corps gauche K en classes d'éléments conjugués : si q est le nombre des éléments du central, le nombre des éléments du normalisateur d'un élément quelconque, qui (par adjonction de 0 donne un corps) est de la forme q^d. Par suite si q^n est le nombre des éléments de K, on a $q^n - 1 = q - 1 + \sum \frac{q^n-1}{q^d-1}$ les d étant des diviseurs de n différents de n. Si $\varphi(x) = 0$ est l'équation irréductible à laquelle satisfont les racines primitives q^n-èmes de l'unité, $\varphi(q)$ doit donc diviser $q-1$, ce qui est impossible car $\varphi(q) = \prod(q-\zeta)$ et chacun des facteurs est de module plus grand que $q-1$.

Je rédige actuellement les résultats sur le symbole de restes normiques d'une manière complète. Si cela vous interessait pour le Journal de Crelle, j'aurais le plus grand plaisir à les y publier.

Veuillez recevoir, cher Monsieur, mes sentiments les plus dévoués.

C. Chevalley

1.9 23.05.1932, Chevalley an Hasse

83 Hallerstrasse
Hamburg

Le 23 Mai

Cher Monsieur et Maître,

Je ne comprends pas bien votre objection au théorème sur le produit direct de deux corps galoisiens. Reprenant vos notations, considérons un système de facteurs quelconques (a) de Z. On a dans l'algèbre définie par ce système de facteurs des éléments u_X relatifs aux diverses opérations du groupe de Galois de Z. Or chacune de ces opérations peut se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme ST, et on a

$$u_S u_T = u_{ST} a_{S,T}$$

Nous pouvons définir la même algèbre en remplaçant les unités u_X par les unités u'_X définies de la manière suivante :

$$u'_S = u_S \quad u'_T = u_T \quad u'_{ST} = u_{ST} a_{S,T} = u'_S u'_T$$

Ces nouvelles unités définissent un système de facteurs pour lequel $a'_{S,T} = 1$. Bien entendu on n'a pas $a'_{T,S} = 1$. Quant à la formule relative au calcul de $a^{S-1}_{T,T'}$, je crois que vous avez interverti les T et les S. En effet, dans l'hypothèse $a_{S,T} = 1$, le calcul que vous indiquez donne

$$\begin{aligned} u_S^{-1} u_T u_{T'} u_S &= u_S^{-1} u_T u_S u_S^{-1} u_{T'} u_S = u_T a_{T,S} u_{T'} a_{T',S} \\ &= u_T u_{T'} a^{T'}_{T,S} a_{T',S} \end{aligned}$$

d'où on déduit la formule

$$a^{S-1}_{T,T'} = \frac{a^{T'}_{T,S} a_{T',S}}{a_{TT',S}}$$

J'ai cherché aussi à résoudre le problème dont vous parlez à propos du théorème de translation, mais sans succès. Il faudrait en somme construire quelque chose comme la norme d'une algèbre par rapport à un sous-corps de son centre.

La démonstration que vous m'envoyez pour le théorème généralisant le théorème normique de ma thèse est très simple, et très élégante. Je ne vous avais envoyé l'autre qu'à titre de curiosité, car de toutes manières le théorème découle de la théorie générale du symbole de restes normiques, qui exige des moyens plus puissant que le théorème en question.

Je ne savais pas que la démonstration du théorème de Wedderburn eut déjà été publiée. Je croyais d'ailleurs vous avoir dit à Marburg que celle que je vous ai depuis envoyée est d'un élève de M. Artin.

Je n'ai pas besoin du manuscrit de ma thèse d'une manière pressante. Je vous remercie de prendre mon travail pour le Journal de Crelle, et vous prie de transmettre aussi mes remerciements à M. Hensel. Je vous enverrai le manuscrit d'ici très peu.

Veuillez croire, cher Monsieur, à mes sentiments les plus respectueux.

C. Chevalley

1.10 31.05.1932, Chevalley an Hasse

83 Hallerstrasse. Le 31 Mai
Hamburg.

Cher Monsieur et MaÎtre,

Je vous remercie infiniment de la peine que vous avez prise pour mon travail, et m'excuse de n'avoir pas cité de manière suffisante les travaux antérieurs. N'en accusez, je vous prie, que mon inexpérience dans l'art de rédiger un mémoire.

Le manuscrit que je vous ai envoyé résulte du remaniement d'une rédaction bien antérieure, et je n'en ai pas de copie. Je pense que je peux tout de même retrouver, dans la plupart des cas, les passages dont vous me parlez.

Pour l'indication (4), p. 2, je pense qu'elle est tout simplement à supprimer.

Dans l'introduction, je vous propose d'ajouter après "... aux règles de calcul bien connues du symbole de restes normiques," la phrase suivante : "Cette définition coïncide, à la façon de parler près, avec celle donnée par M. Hasse dans H. 5, dans le cas des extensions cycliques, ces définitions ayant d'ailleurs été trouvées indépendamment l'une de l'autre."

Pour ce qui est de la démonstration du théorème 0 [9 ?], je peux modifier les premières phrases du paragraphe 1, en disant : "La particularité la plus remarquable des algèbres simples dont le centre est un corps de nombres p-adiques k est de contenir tous les sur-corps de k de degré relatif égal au degré de l'algèbre. Nous donnons ici de ce théorème la démonstration de M. Hasse (Voir H. 6, Th. 3) ([En ?] H. 6 est à changer dans la liste de référence en l'indication du mémoire Brauer–Hasse–Noether), et nous en tirons, comme le fait M. Hasse dans H. 5, la conséquence que les sur-corps relativement cycliques d'un corps k sont corps de classes par rapport à k. Mlle Noether avait d'ailleurs depuis longtemps remarqué le lien entre la théorie développée dans H. 2 et la théorie du corps de classes local."

Au paragraphe III, je peux ajouter une note de pied, se référant au titre du paragraphe, et ainsi conçue : "La définition du symbole de restes normiques donnée dans ce paragraphe coïncide, comme nous l'avons dit dans l'introduction, avec celle donnée par M. Hasse dans H. 5. On trouvera également dans ce mémoire des démonstrations des théorèmes 1,2,3."

Pour ce qui est du lemme 5, j'ai trouvé la démonstration du cas général directement à partir de celle que je vous avais d'abord communiquée relative au cas de deux facteurs cycliques, et avant de connaître votre démonstration relative au cas d'un facteur cyclique. Votre démonstration est peut-être en effet plus claire, mais je ne pense pas qu'il soit nécessaire de modifier la rédaction sur ce point, la mienne étant à un autre point de vue naturelle, quand on a, comme je l'avais, l'idée préconçue d'introduire des normes.

Pour le théorème 11, j'ignorais l'existence de cette note de Deuring. Je peux ajouter une note de pied se rapportant à l'énoncé du théorème et ainsi rédigée : "La démonstration de ce théorème est entièrement analogue à celle donnée par M. Deuring du théorème suivant : k étant un corps parfait, a et b deux nombres de ce corps, si t est la plus petite puissance de a qui est norme relative d'un élément de $k(\sqrt[n]{b})$, ce nombre est aussi la plus petite puissance de b qui est norme relative d'un nombre de $k(\sqrt[n]{a})$."

Pour ce qui est de l'ordre des substitutions s, t (p. 26), je peux ajouter une note de pied : "Cela résulte du choix de B_0".

Dans la démonstration du lemme 4, je peux ajouter, après "s_K est égal à $\left(\frac{W^K}{(p_K)}\right)$" l'explication suivante : en effet on sait que

$$\left(\frac{W^K}{(p_K)}\right) = \left(\frac{W}{N_{Kk}(p_K)}\right) = \left(\frac{W}{(p^\varphi)}\right)$$

où φ est le degré relatif de (p_K) par rapport à k. φ est encore égal au degré de $[W, K]$ par rapport à k, donc encore à $(W^K : K)$, et par suite $s_K = s^\varphi$."

M. Köthe m'a envoyé une copie de sa note sur les extensions des algèbres simples, où se trouve un théorème à peu près équivalent à mon théorème 4. Je ne me souviens plus si j'ai cité son nom à ce propos. Sinon, je pourrais ajouter une note de pied se rapportant à l'énoncé du théorème et disant : "On trouvera une démonstration d'un théorème à peu près équivalent au précédent dans le mémoire de M. Köthe : Erweiterung des Zentrums einfacher Algebren, Math[ematische] Ann[alen] ".

Je vous serais reconnaissant de me dire si les modifications ainsi apportées vous semblent satisfaisantes, ou si vous voyez encore d'autres améliorations à faire. Cela vous ennuierait-il d'apporter vous-même les corrections en question ? ou préférez-vous me renvoyer le manuscrit ? Je suis confus de la peine que je vous donne inutilement, et vous prie de m'excuser, et de recevoir l'expression de mes sentiments les plus respectueux,

C. Chevalley

1.11 14.06.1932, Chevalley an Hasse

83 Hallerstrasse
Hamburg.

Le 14 Juin 1932

Cher Monsieur et Maître,

Je vous remercie de la citation que vous faites dans votre mémoire pour les Math. Annalen.

Pour ce qui est de ma thèse, je ne puis que vous donner son titre, qui est : "La théorie du corps de classes". Je ne suis pas en effet encore sûr qu'elle sera publiée par le Journal de Liouville : une première rédaction, qui était beaucoup plus courte, avait été acceptée ; mais je ne sais pas encore si la nouvelle rédaction pourra y être imprimée : il est possible qu'en raison de sa longueur on me demande de payer un supplément de frais, qui peut être très élevé.

Je viendrai très volontiers parler à Marburg le 29 Juillet, comme M. Hensel et vous m'y avez si aimablement invité.

Veuillez recevoir, cher Monsieur, l'expression de mes sentiments les plus respectueux,

C. Chevalley

1.12 07.10.1932, Chevalley an Hasse

19 Avenue d'Orléans
Paris (XIV)

Le 7 Octobre 1932

Cher Monsieur et Maître,

Je vous envoie des précisions sur le projet, à propos duquel je vous avais déjà écrit, de faire un livre en mémoire de Jacques Herbrand, composé de mémoires de mathématiciens qu'il a rencontrés.

Les mémoires paraîtront en librairie en Juillet prochain, par fascicules séparés, et une partie du tirage sera ensuite réunie en volume par les soins de M. Herbrand. Chaque auteur recevra en outre de ses tirages à part, un exemplaire du volume complet.

Nous demandons, André Weil et moi, à recevoir les manuscrits, le plus tôt possible, en tous cas pas après le 1 Mars.

Je vous serais très reconnaissant de me faire savoir si vous voulez bien nous assurer de votre collaboration, et, si possible, dans le cas affirmatif, de nous donner quelques indications sur le sujet et sur la longueur approximative du manuscrit que vous nous enverriez (indications toutes provisoires d'ailleurs). De plus, peut-être pourriez-vous nous faire quelques suggestions de collaborations possibles, notamment à propos du congrès qui s'est tenu l'année dernière à Marburg et auquel Herbrand assistait : peut-être y a-t-il rencontré des mathématiciens que nous n'avons pas inscrits sur notre liste et que ni Weil ni moi ne connaissons personnellement. Pouvons-nous vous demander de vous charger d'écrire vous-même à ces mathématiciens ? Nous vous en serions très reconnaissants.

Veuillez croire, cher Monsieur, à mes sentiments les plus respectueux,

C. Chevalley

1.13 28.10.1932, Chevalley an Hasse

Pension de famille
12 Place Denfert–Rochereau
Paris (XIV)

Le 28 Octobre 1932

(Nouvelle adresse !)

Cher Monsieur et Maître,

Je vous remercie de votre réponse à propos du livre en mémoire d'Herbrand.

André Weil et moi serons très heureux si vous pouvez nous donner le mémoire en question. Cela va d'autant mieux que je compte moi-même donner un mémoire se rapportant tout-à-fait au même ordre d'idées, qui sera une suite à celui que vous connaissez déjà, dans laquelle je détermine la structure des ordres maxima d'une algèbre simple sur un corps de nombres algébriques, cette algèbre étant considérée comme algèbre de matrices. J'espère donc aussi que Mlle Noether pourra donner le mémoire sur la même question, comme vous le suggérez. Elle m'avait antérieurement parlé de donner son ancien travail (jamais publié) sur la différentiation des idéaux, mais je pense que l'un n'empêche pas l'autre, et je vais lui écrire pour lui demander si elle pourrait nous donner les deux.

Je vous remercie de m'avoir envoyé la liste des participants au Schiefkörperkongress ; ne vous donnez pas, je vous prie, la peine de leur écrire : Weil et moi le ferons.

Veuillez croire, cher Monsieur, à mes sentiments les plus respectueux,

C. Chevalley

P. S. J'ai lu le manuscrit de votre mémoire, mais n'en ai actuellement pas de copie.

1.14 20.04.1933, Chevalley an Hasse

MONPARNASSE

La Coupole, le 20 Avril 1933

RESTAURANT
THÉS, SOUPERS DANSANTS

Cher Monsieur et Maître,

Je compte arriver à Marburg le Lundi 24 Avril, et descendrai à l' "Europäischer Hof", mieux informé, grâce à vous, cette année que l'année dernière à pareille époque!

J'ai perfectionné les résultats du mémoire sur l'Arithmétique hypercomplexe que je vous avais communiqué, en employant une méthode différente : si $\mathfrak{S}$ est algèbre complète de matrices dans un corps gauche $\mathfrak{K}$, si $\mathfrak{O}$ est un ordre maximum de $\mathfrak{S}$ contenant l'ordre maximum $\mathfrak{o}$ de $\mathfrak{K}$ les idéaux à gauche de $\mathfrak{O}$ peuvent être considérés comme des $\mathfrak{o}$–modules de formes linéaires. Les idéaux d'une même classe (au sens de Brandt) donnent des modules opérateur isomorphes et réciproquement. Ceci permet de ramener la théorie des classes d'idéaux de $\mathfrak{O}$ à celle des $\mathfrak{o}$-modules, et je retrouve de cette manière les résultats de mon mémoire antérieur.

Si $\mathfrak{K}$ est commutatif, le cas est beaucoup plus simple car on peut appliquer la théorie de Steinitz des modules de formes linéaires. On trouve alors les résultats suivants.

Le nombre des classes au sens de Brandt de $\mathfrak{O}$ est égal au nombre des classes d'idéaux de $\mathfrak{K}$.

Le nombre des classes au sens de Artin est egal à l'indice $(\mathfrak{H} : \mathfrak{H}^n)$ où $\mathfrak{H}$ représente les classes de $\mathfrak{K}$.

Enfin soit K un corps commutatif maximum de $\mathfrak{S}$; supposant que $\mathfrak{O}$ soit l'anneau des matrices à coefficients dans $\mathfrak{o}$. La condition n[écessaire] et s[uffisante] pour que les entiers de K soient contenus dans l'ordre à droite d'un idéal à gauche $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{O}$ est que le $\mathfrak{o}$-module associé à $\mathfrak{A}$ soit op[érateur] isomorphe à un idéal de K, considéré comme $\mathfrak{o}$-module.

Dans l'espoir de parler prochainement de ces sujets avec vous, je vous prie de recevoir l'expression de mes sentiments les plus dévoués

Cl. Chevalley

1.15 06.11.1934, Chevalley an Hasse

C. Chevalley
8 Rue du Général Niox
Paris (16^e)

Le 6 Novembre 1934.

Cher Monsieur et Maître,

Je viens de lire avec grand interêt vos deux derniers mémoires du Journ. de Crelle, relatifs à la théorie des corps de caractéristique p. Je m'occupe actuellement de démontrer le théorème d'existence des corps de classes pour ces corps, dans le cas le plus difficile des extensions de degré p. J'espère pouvoir vous communiquer prochainement la démonstration. En attendant, je voudrais vous faire part d'une remarque que j'ai faite à propos des différentielles, remarque qui correspond peut-être à quelque chose de connu, mais qui, dans le cas contraire, présente peut-être quelque intérêt. La voici : K étant un corps de caractéristique p, formé d'une extension algébrique finie d'un corps $k(x)$ obtenu par adjonction d'une transcendante à un corps parfait k, si $K/k(x)$ n'est pas séparable, x est puissance p-ième d'un élément de K. Posons $K_1 = k(x)$. L'extension K/K_1 se décompose en une extension séparable K_2/K_1 et en une extension $K = K_2(\sqrt[p^k]{y})$, y étant un élément de K_2 qui n'est pas puissance p-ième dans K_2. Posons $\overline{K} = K_2(\sqrt[p]{y})$: il suffira de montrer que x est puissance p-ième dans K_2. y satisfait dans K_1 à une équation irréductible de degré n :

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

Soit $K_2 = K_1(y, z)$ et soit m le degré de l'équation irréductible à laquelle satisfait z dans $K_1(y)$. On a donc $(\overline{K} : K_1) = pnm$.

Soit $Z = K_1(\sqrt[p]{x})$. On voit facilement que tout élément de K_1 est puissance p-ième dans Z^*; en particulier il existe dans Z des éléments $\overline{a}_i$ tels que $a_i = \overline{a}_i^p$. Il en résulte que l'on a

$$(\sqrt[p]{y})^{np} + \overline{a}_1^p(\sqrt[p]{y})^{(n-1)p} + \cdots + \overline{a}_n^p \;=\; \left[(\sqrt[p]{y})^n + \overline{a}_1(\sqrt[p]{y})^{n-1} + \cdots + \overline{a}_n\right]^p \;=\; 0$$

et que par suite $\sqrt[p]{y}$ satisfait dans Z à une équation de degré n. Donc $\big(Z(\sqrt[p]{y}) : K_1\big) \leq pn$. Mais $Z(\sqrt[p]{y})$ contient $K_1(y)$, et par suite z satisfait dans ce corps à une équation de degré m. On a donc

$$\big(Z(z, \sqrt[p]{y}) : K_1\big) \leq pnm$$

Mais $Z(z, \sqrt[p]{y})$ contient K_2 et $\sqrt[p]{y}$, donc contient $\overline{K}$. La comparaison des degrés montre alors que ce corps est identique à $\overline{K}$, ce qui démontre la proposition.

Il en résulte, en vertu du résultat que vous donnez dans votre mémoire, que : *les éléments de K dont la différentielle est 0 sont les puissances p-ièmes exactes dans K.* (car il en est évidemment ainsi des constantes puisque k est parfait).

En dehors de cela, je vous signale qu'il est possible, à partir de la formule de la somme des invariants d'une algèbre sur un corps de nombres algébriques ordinaire, de faire d'une manière purement arithmétique toute la théorie du corps de classes, en remplaçant l'emploi des moyens transcendants que vous indiquez dans votre mémoire (Über die Struktur ...) par des moyens arithmétiques fondés sur les calculs de la démonstration du théorème d'existence. Je suis en train de rédiger une note sur ce point que j'espère publier en collaboration avec M. Nehrkorn qui a relevé et corrigé une erreur que j'avais commise dans une première démonstration que M. Iyanaga lui avait racontée oralement. A ce propos, il serait fort intéressant de savoir si on ne pourrait pas, pour la démonstration de la formule de la somme, remplacer le corps de décomposition circulaire cyclique par un corps circulaire abélien, car on arriverait ainsi à ramener la théorie à la démonstration de l'inexistence d'algèbres à division sur le corps de toutes les racines de l'unité, (ou au moins des racines d'ordre premier à un nombre donné ; cette dernière restriction pourrait sans doute être levée sans trop de peine). Mais la question me paraît, autant que j'aie pu voir, fort difficile, et la possibilité de la traiter arithmétiquement me paraît pour le moment encore douteuse.

$*$. parce que k est parfait

T. S. V. P.

Veuillez, je vous prie, transmettre mes hommages à Madame Hasse, et croire à mes sentiments les plus dévoués,

Cl. Chevalley

1.16 16.11.1934, Hasse an Chevalley

Prof. Dr. H. H a s s e

Göttingen, den 16. November 1934.
– – – – – – – –
Bunsenstr. 3–5

Herrn
Dr. Cl. Chevalley
8 Rue du Général Niox
P a r i s (16°)
– – – – – – – – – – –

Lieber Herr Chevalley!

Herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief* vom 6. November. Bitte denken Sie nicht, dass ich Sie mit den Separata vergessen hätte, ich bin nur bisher nicht an die Versendung eines grösseren Stapels gekommen und möchte nun auch warten, bis eine weitere Arbeit von Davenport und mir, die in ca. 4 Wochen in Crelle erscheint, dazugekommen ist.

Ihre Mitteilung, dass in Körpern der Charakteristik p die Elemente mit Differential 0 p-te Potenzen sind, war mir nicht neu, ich kannte sie aus einer mündlichen Bemerkung von F. K. Schmidt und habe sie auch in meiner Note in den Berliner Akademie-Berichten 1934 Nr. 17 in Satz 1 aufgenommen.

Gerade als Ihr Brief kam, gab mir Herr Witt eine sehr schöne Arbeit über das Existenztheorem des Klassenkörpers bei algebraischen Funktionenkörpern, in der insbesondere auch der Fall des Grades p (Charakteristik) sehr einfach behandelt wird. Dies scheint sich ja mit Ihren neuen Untersuchungen zu berühren.

Sehr interessieren wird mich die Untersuchung, von der Sie sagen, dass Sie sie mit Herrn Nehrkorn gemacht haben. Die Frage, die Sie im Anschluss daran aufwerfen, erzählten Sie mir ja schon einmal mündlich, ich kann leider darauf keine Antwort geben. Ich komme überhaupt immer mehr zu der Überzeugung, dass die analytischen Hilfsmittel etwas sehr Wesentliches und auch Notwendiges in der Klassenkörpertheorie sind.

Nun möchte ich mich noch mit einer Bitte an Sie wenden. Wäre es Ihnen wohl möglich, im Laufe dieses Winters einmal für ein paar Tage Gast unseres Institutes hier in Göttingen zu sein und uns einen Vortrag aus Ihrem Arbeitsgebiet zu halten? Wir würden uns mit der Zeit ganz nach Ihren Wünschen richten können. Wir haben eine Menge von interessierten jungen Mathematikern hier, die sich alle freuen würden Sie kennen zu lernen und mit Ihnen über Mathematik und anderes sprechen zu können. Sie würden mir einen grossen Gefallen mit einer zusagenden Antwort tun. Ich selbst bin leider in der letzten Zeit sehr wenig zu mathematischen Untersuchungen gekommen, die Übernahme des Instituts hier und alles, was damit verbunden war, hat meine Aufmerksamkeit zu stark abgelenkt. Jetzt fange ich an, wieder etwas über einige Fragen nachzudenken, z. B. über das alte Problem der Klassenkörpertheorie galoisscher Körper, auch die Funktionalgleichung der L–Reihen in Funktionenkörpern möchte ich gern haben. Davenport hat mir gerade den Beweis für einen Spezialfall (Charaktere zu p primen Grades nach einem Polynom des rationalen Grundkörpers) mitgeteilt. Ausserdem hat mir Davenport eine sehr interessante spezielle Funktionalgleichung mitgeteilt, in der L–Funktion der Argumente s und $\frac{s}{2}+\frac{1}{4}$ miteinander verknüpft werden. Hoffentlich können wir bald über all diese Dinge mündlich miteinander sprechen.

Mit herzlichen Grüssen, unbekannterweise auch an Ihre Frau Gemahlin

stets Ihr
H. Hasse

1.17 17.11.1934, Chevalley an Hasse

8 Rue du Général Niox
Paris (16)

Le 17 Nov. 1934

Cher Monsieur et Maître,

Je vous remercie vivement de votre aimable lettre* et de votre invitation à aller cet hiver à Göttingen, que j'accepte avec plaisir. Cependant, je vous demanderai si cela ne vous dérange pas que je ne fixe pas la date tout de suite ; car il est possible que je sois amené à aller à Berlin pour des raisons extra-mathématiques, et je vais essayer de faire concorder si possible les deux voyages.

La méthode pour passer de la formule de la somme des invariants à la théorie du corps de classes est la suivante : dès qu'on sait que (dans ma terminologie) le groupe de Artin contient le groupe de Takagi, on peut démontrer par des démonstrations gruppentheoretisch du type classique le théorème suivant : **1)** si K est corps de classes sur K' et K' corps de classes sur k, K est corps de classes sur k. **2)** si K est corps de classes sur k, K' est aussi corps de classes sur k (K, K' : extensions abéliennes de k telles que $k \subset K' \subset K$). D'autre part, il suffit de montrer, pour que K soit corps de classes sur k, que le groupe de Takagi associé à K dans k est d'indice au plus égal à $(K : k)$. Or, la démonstration du théorème d'existence montre en somme que, sur un corps k qui contient les racines n-ièmes de l'unité, on peut construire des sur-corps K très généraux pour lesquels l'indice de groupe de Takagi est égal à $(K : k)$. Il suffit ensuite d'appliquer le théorème du début en procédant par récurrence sur $(K : k)$. Je n'ai malheureusement rédigé qu'à un seul exemplaire la démonstration complète, et le papier est en ce moment entre les mains de M. Nehrkorn, qui l'enverra probablement directement aux M[athematische] A[nnalen]. Si cependant la chose vous intéressait, je pourrais facilement lui demander de vous l'envoyer d'abord.

Quant à la démonstration du théorème d'existence pour les corps de caractéristique p, ma méthode consiste à compter explicitement les sur-corps n'ayant qu'un certain nombre de points de ramification donnés, et à comparer avec l'indice du groupe de Takagi correspondant. Pour pouvoir faire ce décompte, je suppose qu'il y a un grand nombre de points de ramification, pour pouvoir appliquer le théorème de Riemann–Roch sous sa forme simple, de sorte que, comme dans la démonstration classique, on arrive seulement à déterminer un corps qui contient le corps de classes sur un groupe donné. On finit ensuite exactement comme dans la théorie du corps de classes ordinaire. Je serais curieux de savoir si M. Witt emploie la même méthode. Je me permets de vous envoyer le brouillon de la démonstration, tout en m'excusant de son aspect peu sympathique. La rédaction complète exigerait sensiblement plus d'espace et de temps.

Je vous signale en outre que j'ai constaté sur un exemple numérique que le nombre des classes d'idéaux d'une algèbre de matrices sur un corps gauche, qui est au plus égal au nombre des classes du corps gauche, peut lui être effectivement inférieur, ce qui me paraît assez curieux, mais pas très clair.

Veuillez croire, cher Monsieur, à mes sentiments les plus dévoués,

C. Chevalley

1.18 23.11.1934, Hasse an Chevalley

H/Tr. 23. November 34

Herrn
Dr. C. Chevalley
P a r i s (16)
– – – – – – – – – – – –
8 Rue du Général Niox

Lieber Herr Chevalley!

Herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief* vom 17. November. Ich begrüsse es, dass Sie meiner Einladung nach Göttingen Folge leisten wollen. Gern will ich mich mit dem Datum nach Ihren sonstigen Plänen richten. Wenn Sie längere Zeit für Ihren hiesigen Aufenthalt zur Verfügung haben, würden wir uns natürlich auch über eine grössere Vortragsserie freuen. Wir könnten Ihnen dann eine angemessene Pauschal–Vergütung für Ihre Reise und die Vorträge geben.

Sehr gern würde ich mir das Manuskript Ihrer Arbeit mit Nehrkorn vor der Einreichung an die Mathematischen Annalen ansehen.

Ihren Beweis des Existenzsatzes bei Charakteristik p habe ich Herrn Witt zur Ansicht gegeben, er will Ihnen eine Skizze seines Beweises bald zuschicken. Sein Beweis braucht nicht soviel wie der Ihre den Gruppenindexkalkül.

Ihre Mitteilung über das Beispiel, wo die Idealklassenzahl einer normalen, einfachen Algebra wirklich kleiner ist, als die Idealklassenzahl ihres zugehörigen Zielkörpers erstaunt mich allerdings auch sehr.

Wir haben hier eine von Herrn Witt geleitete Arbeitsgemeinschaft über Klassenkörpertheorie und Algebren, in der es sehr flott zugeht. Heute wurde auf der Grundlage der Dissertation von Käthe Hey der Existenzsatz von Algebren mit vorgegebenen Invarianten der Summe 0 bewiesen und daraus die Summenrelation hergeleitet, also in umgekehrter Reihenfolge als bei mir in den Annalen 107, dabei wird alles viel einfacher und durchsichtiger. Man sieht zudem, dass die Algebren zu einem algebraischen Zahlkörper als Grundkörper das Analogon der Integrale dritter Gattung zu einem algebraischen Funktionenkörper sind.

Bitte lassen Sie mich bald wissen, wenn Sie Ihren Reiseplan festlegen können and be so kind as to drop formalities at the beginning and end of your letters, for it's only wasting time.

Mit herzlichen Grüssen
Ihr
H. Hasse

1.19 20.06.1935, Chevalley an Hasse

C. Chevalley
8 Rue du Général Niox
PARIS (16)

Le 20 Juin 1935.

Cher Monsieur,

Pendant la rédaction du chapitre "Théorie du corps de classes" pour l'Encyclopédie allemande, il m'est venu quelques idées sur l'exposition de la théorie, dont je vous envoie un résumé :

1) Pour la théorie du corps de classes local, on peut introduire, à côté du symbole de restes normiques, un nouveau symbole construit de la maniére suivante : soient k un corps local, α un nombre de k et χ un caractère continu du groupe de Galois g de l'extension abélienne maxima (infinie) de k. À α et à χ on peut associer une algèbre de la manière suivante : soit Z une extension abélienne quelconque de k (finie) contenant le corps K_χ appartenant au sous-groupe de g formé des éléments pour lesquels χ prend la valeur 1 ; soit $\varphi(\sigma)$ une fonction d'un élément σ du groupe de Galois de Z/k telle que l'on ait, pour chaque σ, $e^{2i\pi\varphi(\sigma)} = \chi(\sigma)$. Les nombres

$$a_{\sigma,\sigma'} = \alpha^{\varphi(\sigma)+\varphi(\sigma')-\varphi(\sigma\sigma')}$$

forment un système de facteurs du groupe de Z/k ; on voit facilement que la classe d'algèbres de centre k définie par ce système de facteurs ne dépend que de α et de χ. Si ρ est l'invariant de cette classe, nous poserons $(\alpha, \chi) = e^{2i\pi\rho}$. Il résulte tout de suite des définitions que ce nombre est, pour α fixe, un caractère du groupe X des caractères de g, et que, pour χ fixe, c'est un caractère du groupe multiplicatif k^* des éléments $\neq 0$ de k. D'autre part, on sait par la théorie de la dualité des groupes abéliens de Pontrjagin que g est aussi groupe des caractères de X. Il en résulte que, pour chaque α il existe un élément s de g tel que l'on ait, pour chaque χ, $\chi(s) = (\alpha, \chi)$.

Si Z est une extension relativement abélienne quelconque de k, le symbole de restes normiques de α pour Z n'est autre que la substitution du groupe de Z/k induite par s. Dans ces conditions, toutes les propriétés connues du symbole de restes normiques deviennent évidentes. D'autre part, l'application $\alpha \to s$ est une application homomorphe de k^* dans g. L'image de k^* est un sous-groupe partout dense dans g, ce qui correspond au fait que pour toute extension relativement abélienne de k, il y a un nombre de k qui n'est pas norme d'un nombre de cette extension. On démontre également que l'application en question est isomorphe, ce qui correspond au fait que pour tout nombre α de k, différent de 0 et de 1, il y a une extension abélienne dont il n'est pas norme. La démonstration se fait en adjoignant des racines de l'unité d'ordre convenable : c'est au fond la démonstration du théorème d'existence de la théorie du corps de classes local. La correspondance entre les sous-groupes de k d'indice fini et leurs corps de classes est la suivante : si H est sous-groupe d'indice fini de k^*, il lui correspond par l'isomorphie $\alpha \to s$ un sous-groupe de g et le corps de classes pour H est formé des éléments invariants par les opérations de ce sous-groupe (et par leurs éléments limites).

2) On a des considérations analogues en théorie du corps de classes sur les corps finis. Soit k un corps fini de nombres algébriques. Considérons les divers diviseurs premiers p de k et les corps locaux correspondants k_p. Appelons *éléments idéaux* (e. i.) de k les systèmes comportant un élément ${}^pa$ (le p-composant) dans chaque k_p, ces composants étant choisis de manière à ce que seuls un nombre fini de composants ne soient pas des unités. Ces éléments forment évidemment un groupe k^*. Soit d'autre part g le groupe de Galois de l'extension abélienne maxima de k. A tout élément idéal a et à tout caractère χ de g on peut associer le nombre

$$(a, \chi) = \prod_p ({}^pa, \chi)$$

En raisonnant comme plus haut, on obtient une application homomorphe $a \to s$ de k^* dans g. Le groupe image de k^* dans cette application est partout dense dans g, ce qui se démontre en s'appuyant sur le fait qu'il est impossible que tous les idéaux premiers de k se décomposent complètement dans une extension cyclique de k. Mais ici, l'application n'est plus isomorphe : en effet, la relation de la somme des invariants apprend que l'on a $(\alpha, \chi) = 1$ pour tout nombre α de k et pour tout caractère χ. Si on désigne d'une manière générale par A le groupe des éléments qui sont appliqués sur 1, le groupe k^*/A est isomorphe à un sous-groupe dense sur le groupe de Galois g. Au moyen de cette application, on peut faire correspondre bi-univoquement aux extensions abéliennes (finies ou infinies) Z de K les sous-groupes H de k^* qui contiennent A et tels que H/A soit fermé au sens de la topologie définie dans k^*/A par l'application isomorphe dans le groupe topologique g, topologie que l'on peut encore définir directement à partir de k^*. En particulier, aux extensions abéliennes finies correspondent des sous-groupes H d'indice fini de k^* et k^*/H est isomorphe au groupe de Galois de Z/k. Le groupe H ainsi associé à une extension abélienne finie Z contient en particulier le groupe des e. i. dont les composants relatifs à tous les diviseurs p non ramifiés dans Z sont des unités. On en déduit facilement que k^*/H est isomorphe au groupe quotient du groupe des idéaux premiers au conducteur f de Z/k par un sous-groupe d'indice fini de ce groupe, qui n'est autre que le groupe pour lequel Z est corps de classes. Le groupe H contenant le groupe A, et par suite les nombres de k, il en résulte que le groupe d'idéaux en question contient le strahl (mod. f). Le symbole de Artin se définit tout à fait comme le symbole de restes normiques tout à l'heure ; de plus sa définition s'étend aux e. i. quelconques, premiers ou non au conducteur. Quant au théorème d'existence de la théorie du corps de classes, il signifie au fond que le groupe A est le plus petit sous-groupe fermé qui contienne le groupe des nombres de k. Il se démontre encore en passant par le cas où k contient des racines de l'unité, et on démontre en même temps que le groupe H est engendré par les nombres et les normes relatives d'éléments idéaux de Z, en suivant à peu près la méthode de mon mémoire en cours d'impression aux M[athematische] A[nnalen].

J'espère que ce résumé un peu bref ne vous a pas paru trop sibyllin. Je me demande si je dois tenir compte de ce nouvel aspect des choses dans la rédaction de l'Encyclopédie. D'un côté, ce serait peut-être susceptible d'éclairer un certain nombre de questions et peut-être de simplifier certaines démonstrations. D'autre part, ce n'est peut-être pas encore complètement au point, et cela exigerait que je remanie beaucoup la partie que j'ai déjà rédigée (la moitié environ). Cela m'obligerait donc à ne remettre le manuscrit qu'un peu plus tard que je n'avais prévu (Octobre ou Novembre).

Dans ces conditions, je vous serais très reconnaissant de me donner un conseil sur ce que je dois faire en la circonstance.

Croyez, je vous prie, à mes sentiments les meilleurs,

C. Chevalley

1.20 28.06.1935, Hasse an Chevalley

Professor Dr. Hasse
Göttingen,
Bunsenstr. 3–5

Den 28. Juni 35

Herrn C. Chevalley
Paris
8 Rue du General Niox

Lieber Herr Chevalley!

Es freut mich sehr, dass die Arbeit an den Enzyklopädieartikeln Ihnen so schöne neue Ideen gebracht hat. Ich verstehe sehr gut, was Sie damit wollen und erreicht haben. Die Art, wie Sie jetzt die Klassenkörpertheorie aufziehen, entspricht vollkommen einem lange von mir gehegten Wunsch, nämlich die Zusammensetzung der lokalen Klassenkörpercharakterisierungen zu der Charakterisierung im Grossen so zu machen, dass man aus dem fertigen Resultat die lokalen Bestandteile wieder herauslesen kann. Hierzu ist eben die Takagische Gruppe ungeeignet, weil der Zusammenhang zwischen Artinsymbol und Normensymbol zu kompliziert ist. Das liegt nicht am Artinschen Symbol, sondern schon am Begriff des Dedekindschen Ideals, den Sie durch Ihre idealen Elemente gerade in der richtigen Weise abgeändert haben. Dass Sie dabei zugleich sämmtliche abelschen Erweiterungen in einen Topf werfen, und durch Heranziehung der sehr durchsichtigen Theorie für unendliche Erweiterungen gleichzeitig übersehen, erhöht nur die Prägnanz Ihrer neuen Begründung. Ich fände es sehr schade, wenn diese schönen Gedankengänge *nicht* in den Enzyklopädieartikel Aufnahme fänden.
Aus Ihren knappen Ausführungen kann ich mir noch kein ganz genaues Bild machen, wie sich der Aufbau der Gesamttheorie nach diesen neuen Gesichtspunkten darstellt. Sie selbst scheinen ja auch Zweifel zu haben, ob man die Theorie von vornherein in dieser neuen Weise behandeln soll. Ich möchte

es Ihrer Entscheidung überlassen, ob Sie es wirklich tun wollen oder nicht. Im ersteren Falle machen Sie sich bitte keine Gedanken, wenn dadurch die Fertigstellung etwas hinausgezögert wird. Im letzteren Fall würde ich unter allen Umständen gern sehen, wenn Sie am Schluss einen Abriss dieser neuen Auffassungs- und Begründungsart anfügten.
Es wird Sie interessieren, dass ich im Anschluss an die frühere Arbeit von Herrn Grunwald, die leider nicht so weit fortgetrieben wurde, wie ich es mir damals dachte, gerade in den letzten Wochen auch von mir aus Ueberlegungen angestellt habe, die sich wohl sachlich mit den Ihren eng berühren, ohne allerdings den von Ihnen vollzogenen Schritt zu den unendlichen abelschen Erweiterungen zu machen. Ich habe mir die folgende Charakterisierung der Klassenkörper im Grossen überlegt:
Jeder über k abelsche Körper K bestimmt durch das System seiner Normensymbole $\left(\frac{\alpha,k}{p}\right) = X_p(\ )$ ($\neq 0$ variabel in k) ein System von Funktionen mit den beiden Eigenschaften

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \prod_p X_p(\ ) & = & 1 \\ (2) & \prod_p f_p & = & f \text{ endlich} \\ & (p\text{-Führer}) & & \end{array}$$

Ist umgekehrt ein solches Funktionensystem gegeben, dessen Werte eine abstrakte Gruppe G erfüllen, so existiert dann ein und nur ein abelscher Körper K mit der Gruppe G derart, dass die Normensymbole $\left(\frac{\alpha,k}{p}\right) = X_p(\alpha)$ werden, bei einer geeigneten Deutung von G als Gruppe von K. Den Beweis habe ich mir in grossen Zügen überdacht. Einzelausführung hat ein Schüler von mir übernommen. Der Existenzsatz geht rein arithmetisch durch einfache Abzählung. Insbesondere wird durch ihn auch der Grunwaldsche Existenzsatz rein arithmetisch bewiesen. Analysis steckt nur in dem Umkehrsatz, nämlich der Tatsache, dass das Produkt aller Normensymbole 1 ist. Eben fällt mir noch ein, dass vielleicht doch noch im Existenzsatz einmal Analysis gebraucht werden muss, nämlich um die Einheitswurzeln aus dem Grundkörper herauszuwerfen.
Vielleicht sehen Sie sich doch hinsichtlich der unendlichen algebraischen Erweiterungen einmal die Grunwaldsche Arbeit in den Annalen 106 und meine eigene in Crelle 155 an. In der letzteren bin ich nämlich bei diesen unendlichen Körperfolgen sogar auf eine vernünftige L–Funktion gestossen; das Studium dieser L–Funktion scheint mir im Zusammenhang mit den Klassenzahlproblemen zu stehen (Deuring, Heilbronn, Siegel). Ich würde mich freuen, wenn Sie aus diesen Dingen etwas machen könnten!

Mit herzlichen Grüssen stets

Ihr

H. Hasse

1.21 15.10.1935, Chevalley an Hasse

4 rue du Général Malleterre
PARIS 16è

Le 15 Octobre 1935 [1]

Cher Monsieur,

Je me réjouis de pouvoir vous annoncer aujourd'hui que je suis enfin parvenu à obtenir une démonstration purement arithmétique des théorèmes de la théorie du corps de classes.

Le principe de la méthode est le suivant : après avoir démontré l'inégalité arithmétique classique $h \geq n$, je démontre l'inégalité "ex-transcendante" $h \leq n$ dans le cas des extensions cycliques de degré premier p d'un corps k contenant les racines p-ièmes de l'unité (cela suffit pour faire toute la théorie du corps de classes, comme on peut le voir par diverses méthodes). Pour faire la démonstration, j'utilise mieux la démonstration de Herbrand et moi du théorème d'existence : prenons un module m divisible par les modules de p-hyperprimarité, des idéaux premiers infinis ou diviseurs de p dans k, et par ceux d'idéaux premiers en nombre suffisant pour que leurs classes absolues engendrent le groupe des classes d'idéaux de k. Soit H le groupe $(\alpha)a^p$, $\alpha \equiv 1 \pmod{m}$, a premier à m. Soit Z le corps composé de toutes les extensions cycliques de degré p de k dont les conducteurs divisent m.

La démonstration du théorème d'existence conduit, sans autre hypothèse, à l'égalité $(Z : k) = h$, où h est l'indice de H.

Prenons maintenant un certain nombre d'idéaux premiers $q_1, q_2, \ldots, q_r$ premiers à m. On peut démontrer que :

Si les classes (mod. H) des q_i sont liées par une relation non triviale, les $\left(\frac{Z/k}{q_i}\right)$ *sont aussi liés par une relation.*

1. Chevalley schreibt "1936" was wohl ein Schreibfehler ist

Soit en effet

$$n^* = q_1 q_2 \dots q_r$$

et soit Z' le sous-corps de Z appartenant au groupe engendré par les $\sigma_i = \left(\frac{Z/k}{q_i}\right)$. Soit Z'' le corps composé de toutes les extensions cycliques de degré p de k dans lesquelles les diviseurs premiers de m sont complètement décomposés et dont les conducteurs divisent n. Soient encore : H' le groupe engendré par H et les q_i, H'' le groupe engendré par les puissances p-ièmes d'idéaux premiers à n, le rayon (mod. n) et les diviseurs premiers de m ; h' et h'' les indices de H', H'' ; on a : les modules m et n étant complémentaires,

$$(Z' : k)(Z'' : k) = h'h''.$$

Soit enfin

$$q_1^{a_1} q_2^{a_2} \dots q_r^{a_r} = (\alpha_0) a^p \qquad \alpha_0 \equiv 1 \pmod{m}$$

la relation qui existe par hypothèse entre les q_i (mod. H). Si on procède par récurrence, on peut supposer sans restriction qu'il n'existe aucune relation (mod. H) entre $q_1, q_2, \dots, q_{r-1}$. Dans ces conditions, on voit tout de suite que $Z'' = k(\sqrt[p]{\alpha_0})$: Z'' est donc une extension cyclique de k, et par suite $h'' \geq (Z'' : k)$, d'où $(Z' : k) \geq h'$, et $(Z : Z') \leq (H' : H)$, ce qui démontre le théorème.

Désignons maintenant par K un sous-corps quelconque de Z, et par $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ des éléments du groupe de Galois de Z/k formant une base minima du groupe de Galois de Z/K ; on peut trouver des idéaux premiers q_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ tels que $\left(\frac{Z/k}{q_i}\right) = \sigma_i^{a_i}$, les a_i étant des nombres $\not\equiv 0$ (mod. p). Soit H_K le groupe engendré par H et par les q_i.

Il résulte du théorème que : a) l'indice de H_K est égal à $(K : k)$; b) que tous les idéaux premiers de H_K se décomposent complètement dans K. Or le groupe H_K est contenu dans le groupe de Takagi associé (mod. m) à K dans k ; donc, l'indice de ce dernier groupe est $\leq (K : k)$. Comme toute extension abélienne de type $(p, p, \dots, p)$ de k est contenue dans un corps construit comme Z au moyen d'un module m convenable, on voit que l'inégalité "$h \leq n$" est démontrée pour tous ces corps.

La démonstration, que j'ai écrite en langage d'idéaux, peut aussi être faite sans difficulté en langage d'éléments idéaux. Je l'ai trouvée deux ou trois jours après vous avoir envoyé le texte de mon article pour l'Encyclopédie ; y a-t-il lieu de le récrire sur ces nouvelles bases ? Je suis, à ce point de vue, tout à votre disposition.

Je vous signale également que l'emploi des éléments idéaux permet de rendre très courte la démonstration classique de l'inégalité "$h \geq n$", en lui appliquant exactement votre méthode (avec les unités au sens modifié), mais en la traduisant dans le nouveau langage. Je crois également, sans en être encore sûr, que la démonstration de la loi de réciprocité va pouvoir se faire avec des extensions circulaires abéliennes, mais non nécessairement cycliques. Je crois aussi que les résultats de vous et de Grunwald sur le symbole de restes normiques vont pouvoir se démontrer d'une manière très rapide au moyen des éléments idéaux. Enfin, le théorème d'existence des algèbres peut se démontrer lui aussi d'une manière arithmétique, sans faire appel au théorème de la progression arithmétique.

Croyez, je vous prie, à mes sentiments les plus dévoués,

C. Chevalley

1.22 21.10.1935, Hasse an Chevalley

21. Oktober 35

Herrn
Dr. Cl. Chevalley
4. Rue du General Malleterre
P a r i s (XVI)
– – – – – – – – – – – –

Lieber Herr Chevalley!

Von ganzem Herzen beglückwünsche ich Sie zu Ihrem neuen wunderschönen Resultat. Ich kann mir denken, wie froh und stolz Sie sind, dieses Ziel, um das Sie lange gerungen haben, nun wirklich erreicht zu haben. Sie haben damit die Zahlentheorie um eine ganz wesentliche Erkenntnis bereichert. Selbstverständlich bin ich dafür, dass diese neue Erkenntnis auch in Ihrem Enzyklopädie-Artikel gebührend Platz findet, und ich wäre Ihnen dankbar, wenn Sie sich die Mühe machen wollten, den Artikel daraufhin noch einmal umzuarbeiten. Ich erwarte das bisherige Manuskript in kurzer Zeit aus Leipzig zurück und werde es Ihnen dann wieder zusenden und Sie gleichzeitig über die Umfangsfrage unterrichten.

Auch was Sie sonst über methodische Vereinfachungen mit Hilfe der idealen Elemente schreiben, interessiert mich sehr. Ich würde mich freuen, wenn Sie alle diese Dinge einmal zusammenschreiben und zur Veröffentlichung in Crelles Journal übergeben könnten.

Nun komme ich noch mit einer anderen Frage, nämlich einer Bitte um Hilfe. Ein Schüler von Herrn Brandt in Halle hat mir für Crelles Journal ein Manuskript eingereicht, in dem folgender Satz bewiesen wird:

Sei A eine normale einfache Algebra vom Grade n über einem algebraischen Zahlkörper k. Dieser Körper k habe die Eigenschaft, dass der Körper der n-ten Einheitswurzeln über ihm zum absoluten Klassenkörper von k fremd ist. Ferner sei u das Produkt der unendlichen Verzweigungsstelle von A und für $n = 2$ sei $u = 1$ vorausgesetzt.

Dann ist ein Ideal von A dann und nur dann Hauptideal, wenn seine Norm in bezug auf k zum Strahl mod. u gehört, d. h. die Idealklassenzahl von A ist gleich der Strahlklassenzahl mod. u von k.

Der Beweis dieses Satzes, so wie er vorliegt, scheint mir ausserordentlich kompliziert, und zum mindesten in der Darstellung, aber sicher auch sachlich bedeutender Vereinfachung fähig. Würde es Ihnen nun möglich sein, sich dieser Sache anzunehmen und einige Richtlinien für solche Vereinfachung auszuarbeiten? Sie würden mir damit eine grosse Hilfe leisten, denn ich selbst bin gegenwärtig nicht nur durch die Enzyklopädie sondern auch durch viele andere Dinge so in Anspruch genommen, dass ich dafür einfach die Zeit nicht aufbringen kann.

Mit herzlichen Grüssen

stets I h r
H. Hasse

1.23 Juli 1937, Chevalley an Hasse

[Postkarte]

[Hasse ergänzt von Hand : *Juli 1937 Chevalley*]

Adresse : du 1^r Août au 1^r Septembre : chez M. Alexandre Marc, Le Plan par Bréau, Gard — du 1^r Septembre au 1^r Octobre : Chançay (Indre et Loire).

Cher Monsieur,

Je vous remercie pour l'envoi de la 2^d édition de votre petit livre sur l'algèbre, envoi que je suppose devoir vous être attribué. Puis-je vous demander à propos ce que signifient les mots "zur Prüfung" à propos de ce livre : veulent-ils dire que l'éditeur me demande de faire un Compte-rendu du livre ?

Un étudiant de Paris, M. Pisot, vient de faire une thèse sur la théorie des nombres (approximation diophantienne), qui me paraît contenir des résultats intéressants. Sur mes conseils, il a décidé de vous demander s'il serait possible de la publier dans le Journal de Crelle : je lui ai promis de vous écrire à ce sujet. Je joins un résumé de sa thèse. Le manuscrit lui-même occuperait environ 30 pages du Journal. Pensez-vous qu'il vous serait possible de l'accepter ? Et, si oui, quand pensez-vous que le travail pourrait être publié ?

Croyez, je vous prie, cher Monsieur, à mes sentiments les plus dévoués,

C. Chevalley

P. S. Ma femme va passer le mois d'Août en Allemagne, chez une de ses tantes, qui habite Halle (Madame Foulquier, Blumenthalstr. 1). Si par hasard vous passiez à Halle, elle serait très heureuse de vous voir ...

1.24 13.08.1937, Chevalley an Hasse

chez M. Alexandre Marc
Le Plan par Bréau
(Gard)

Le 13 Août 1937

Cher Monsieur,

Je pense que la difficulté dont vous me parlez doit être la même pour les thèses françaises que pour les thèses allemandes, car le dépôt obligatoire des exemplaires à la Faculté existe également.

Je pense donc qu'il faudra que je conseille à Pisot de chercher un autre périodique pour se faire imprimer – à moins que peut-être on ne puisse profiter de la circonstance suivante : le travail de Mlle Lutz sur les fonctions elliptiques p-adiques *n'est pas* sa thèse, mais correspond à un examen très inférieur au doctorat, le diplôme d'études supérieures, pour lequel les étudiants ne produisent le plus souvent aucun travail original, – et qui par suite n'intéresse pas les bibliothèques étrangères. De sorte que le volume 177 ne contient en réalité aucune thèse.

Je ne trouve dans votre français aucune erreur systématique. Les fautes sont plutôt dans des emplois de mots ou de tournures de phrases qu'il est impossible d'apprendre autrement que par l'usage. En moyenne, très peu de fautes caractérisées contre la grammaire ou la syntaxe, de sorte que c'est surtout en lisant beaucoup que vous ferez des progrès, en vous habituant aux constructions et tournures de phrases qui sont d'usage.

J'ai été surpris que Cityre (?) ne vous ait pas plu ; j'avais pensé que cette sorte d'humor vous amuserait : comme quoi la psychologie ne fournit encore que des données très incertaines.

Croyez, je vous prie, cher Monsieur, à mes sentiments les plus dévoués

C. Chevalley

1.25 06.09.1937, Chevalley an Hasse

Chançay, le 6 Septembre 1937

Cher Monsieur,

Je m'excuse d'abord de ne pas vous renvoyer votre avant-dernière lettre. Je l'ai probablement laissée par mégarde à Paris, où je suis passé très rapidement entre les deux parties de mes vacances.

Pour les questions que vous me posez sur la théorie du corps de classes, je dois d'abord vous avouer que j'ai beaucoup oublié depuis un an et demi que je ne m'en suis pas occupé. Cependant, je vais essayer de répondre aux questions que vous me posez.

1). Je crois en effet qu'il y'a avantage à introduire la théorie des extensions infinies dans la théorie locale. La marche générale est, je crois, la suivante : k étant un corps local, on introduit le groupe de Galois $\mathfrak{G}$ de l'extension abélienne maxima de k (groupe topologique). χ étant un caractère de ce groupe, et α un nombre $\neq 0$ de k, on définit, au moyen de la théorie des algèbres, un symbole (α, χ) qui est une racine de l'unité ; si K_χ est l'extension finie qui correspond à χ, (α, χ) est égal à $\chi\left(\left(\frac{\alpha, K_\chi|k}{\mathfrak{p}}\right)\right)$. On montre que (α,χ) est multiplicatif en α et en χ. Il faut montrer que : 1) $(\alpha,\chi) = 1$ pour tous les α entraîne $\chi = 1$ 2) $(\alpha,\chi) = 1$ pour tous les χ entraîne $\alpha = 1$. (Le 1^r cas est facile ; pour le 2^d, la démonstration, dont je ne me souviens pas exactement, est plus difficile : elle fait intervenir encore la théorie des algèbres). Ceci fait, on a tout de suite une correspondance bi-univoque entre $k^* : k - \{0\}$ et un sous-groupe partout dense de $\mathfrak{G}$, ce qui donne tous les théorèmes de la théorie du corps de classes local et du symbole de restes normiques.

2). Pour faire la théorie du corps de classes "im grossen", on définit d'abord le groupe de Takagi de K/k où K est cyclique sur k : c'est le groupe des idèles de k de la forme $\alpha N_{K/k}\mathfrak{A}$ ($\alpha =$nombre de k, $\mathfrak{A}$ =idèle de K). Il faut démontrer la 1$^{\text{re}}$ inégalité fondamentale $(\mathfrak{a} : \alpha N_{K/k}\mathfrak{A}) \equiv 0$ (mod. $(K : k)$). La démonstration est notablement plus rapide qu'avec les idéaux. Elle utilise essentiellement la forme généralisée que vous avez donnée au théorème de Herbrand sur les unités. D'une manière plus précise : on prend un module $\mathfrak{m}$ divisible par tous les diviseurs premiers de k infinis ou ramifiés dans K et tel que dans chaque classe (absolue) d'idéaux de k existe un idéal dont tous les facteurs premiers divisent $\mathfrak{m}$. On désigne par $\mathfrak{N}$, $(\mathfrak{n})$ les idèles de K (k) qui ne sont pas divisibles par d'autres diviseurs premiers que ceux de $\mathfrak{m}$. Grâce à cela, on a $\mathfrak{A} = A\mathfrak{N}$, $\mathfrak{a} = a\mathfrak{n}$ (A : nombres de K), $(\mathfrak{a} : \alpha N_{K/k}\mathfrak{A}) = (\mathfrak{n} : \nu N_{Z/k}\mathfrak{N})$ où $\nu = \alpha \cap \mathfrak{n}$. Après cela, il suffit de faire marcher la machine gruppentheoretisch.

Ensuite, il faut établir l'égalité utilisée dans la démonstration du théorème d'existence par Herbrand et moi (avec les modules complémentaires) ; on transpose la démonstration ordinaire en langage d'idèles. On peut d'ailleurs simplifier en choisissant convenablement l'un des modules complémentaires. On démontre ensuite le théorème de ma dernière note aux C. R., en employant le langage des idèles, ce qui est très rapide.

On n'a donc nulle part besoin du théorème de décomposition ni même de la définition des idéaux de Dedekind.

Ces indications sont assez sommaires, parce que je n'ai sur tout cela que des notes assez éparses et que je ne suis pas en ce moment dans l'atmosphère. Je compte d'ailleurs m'y remettre et écrire cet hiver un mémoire qui contiendra enfin complètement la démonstration purement arithmétique.

N'ayant pas votre avant dernière lettre, je ne peux répondre à vos questions grammaticales. J'espère aller prochainement pour deux jours à Paris et la retrouver à cette occasion ; je vous répondrai donc à ce moment.

Je ne connais pas "Ariane" de Anet. "Leviathan" est certainement un des meilleurs romans français contemporains ; le style est peut-être un peu lourd, probablement volontairement, pour exprimer le désespoir qui constitue l'atmosphère dans laquelle vivent en général les personnages de J. Green.

Croyez, je vous prie, à mes sentiments les plus dévoués

C. Chevalley

P. S. Emploi de l'imparfait : on l'emploie pour parler d'une action qui dure dans le passé, et jamais pour parler d'une action qu'on considère comme instantanée. Exemple : il faut dire “quand j’ai reçu” ; l’imparfait s’emploierait dans les cas suivants ou bien “*pendant que* je lisais votre lettre, un orage a éclaté” ; ou bien “je lisais votre lettre *pendant que* le tonnerre grondait”.

1.26 25.01.1938, Chevalley an Hasse

[Postkarte]

Faculté des Sciences
Mathématiques

Rennes, le 25 Janvier 1938

N. B. Je garde mon adresse
habituelle à Paris

Cher Monsieur,

Je vous remercie de votre aimable invitation à venir à Stuttgart cet été. J'accepterai volontiers si les dates le permettent : je suis en effet invité pour l'année prochaine à l' "Institute for Advanced Study" à Princeton, et je voudrais arriver à New York quelques jours avant le 1^r Octobre. Est-il dans ces conditions possible pour moi d'assister au Congrès ?

Quant au mémoire dont vous parlez, sur la théorie du corps de classes, il y'a longtemps que je désire l'écrire, et j'avais justement l'intention de vous le proposer pour le Journal de Crelle. Mais la question est : quand aurai-je le temps ? Je suis malheureusement très occupé par les conférences stupides (géométrie différentielle !) que je suis obligé de faire cette année, et de plus il y'a toujours ce traité d'analyse collectif qui exige un travail considérable.

Croyez, je vous prie, cher Monsieur, à mes sentiments les plus dévoués

C. Chevalley.

1.27 o.D., Chevalley an Hasse

[Postkarte]

Faculté des Sciences
Mathématiques

Rennes, ...

Cher Monsieur,

J'ai reçu votre lettre trop tard pour pouvoir en parler à M. Julia avant les vacances ; c'est pourquoi j'ai attendu jusqu'à maintenant pour vous répondre. L'avis de M. Julia est aussi que vous veniez en Mai 39, comme il vous le dira d'ailleurs prochainement par lettre.

Je n'ai pas encore reçu l'invitation officielle pour le Congrès de cet été. La date me convient fort bien. Surtout si vous placez ma conférence plutôt au début qu'à la fin du Congrès.

Je compte donc avoir bientôt le plaisir de vous revoir, et vous prie, en attendant, de croire à mes sentiments les plus dévoués

C. Chevalley

1.28 1938, Chevalley an Hasse

UNIVERSITÉ DE RENNES

FACULTÉ
DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES

Cher Monsieur et ami,

Si le Congrès de Stuttgart se tient pendant la première quinzaine de Septembre, je serai très heureux de pouvoir y participer, et je vous remercie de cette invitation.

Je regrette que votre travail vous retienne de venir faire une conférence à Paris cette année : je me serais fait un plaisir de vous y rencontrer.

En ce qui concerne mon manuscrit pour l'Encyclopédie, je pense que le mieux serait que M. Eichler m'envoie la traduction qu'il a faite, pour que je puisse faire les traductions en question. N'ayant pas son adresse, je vous serais reconnaissant de le lui demander de ma part.

Croyez, cher Monsieur, à mes sentiments les plus dévoués,

C. Chevalley.

1.29 07.04.1938, Hasse an Chevalley

Professor Dr. H. Hasse 7. April 1938.

Herr
Dr. C. C h e v a l l e y
4, Rue du General Malleterre
P a r i s (16).
– – – – – – – – – – –

Lieber Herr Chevalley !

Heute muss ich Ihnen einmal wieder deutsch schreiben, da die Zeit sehr drängt. Ich danke Ihnen herzlich für Ihren freundlichen Brief. Was zunächst Ihr Encyclopädisches Manuskript betrifft, so habe ich die Zusendung an Sie noch etwas verzögert, weil ich gerade in den kommenden Wochen das Manuskript zunächst mit Herrn Dr. Eichler genau lesen möchte, bisher habe ich es ja nur sehr oberflächlich angesehen. Es tut mir sehr leid, dass Sie für Ihre lobenswerte Pünktlichkeit mit der Ablieferung so schlecht belohnt werden. Die anderen Autoren sind bei weitem nicht so pünktlich gewesen. Wir beginnen eben mit dem Druck der allerersten Artikel. Da sich der Verlag mit dem Erscheinen ein wenig nach der Reihenfolge der Disposition richten will, wird es also noch einige Zeit dauern, bis Ihr Artikel herankommt. Wir werden Ihnen das Manuskript zusenden, sowie wir die genaue Durchsicht beendet haben, evtl. auch noch mit einigen Randbemerkungen dazu. Dr. Eichler ist übrigens jetzt Assistent in unserem Institut.

Der Kongress der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ist nunmehr festgesetzt. Er findet in der Zeit vom 11.–16. September statt. Also bis auf den unwesentlichen Schlusstag in der von Ihnen noch als möglich bezeichneten 'première quinzaine de Septembre'. Der Tagungsort ist nicht Stuttgart, sondern Baden–Baden oder Freiburg. Ich hoffe, dass die inoffizielle Einladung an Sie und auch an einige andere ausländische Gelehrte in Kürze herausgehen kann, und ich würde mich sehr freuen, wenn Sie es tatsächlich ermöglichen könnten, ihr Folge zu leisten.

Nun habe ich noch folgende Bitte. Ich habe bisher dem Dekan der Pariser Fakultät auf seine sehr freundliche offizielle Einladung noch nicht geantwortet, sondern nur zwei Briefe an Herrn Professor Julia geschrieben. Einen am 28. II., den er mir am 3. März beantwortete und einen am 7. März, auf den ich bisher keine Antwort erhielt. Ich wollte mit der Antwort an den Dekan warten, bis ich von Professor Julia noch einmal Antwort bekommen hätte. Ich habe Herrn Julia in diesem Brief gefragt, ob er es vorziehen würde, dass ich Anfang November nach Paris komme, oder ob er es nicht schöner fände, wenn die Vorträge auf den Mai 1939 verlegt würden, ganz besonders auch deshalb, weil Sie selbst im November nicht da sein würden. Ich wäre Ihnen nun dankbar, wenn Sie Herrn Julia fragten, ob er meinen Brief bekommen hat, und was er dazu denkt und mir bald Bescheid geben könnte. Dann möchte ich Ihrem Dekan endgültig antworten.

Leider bin ich mit meinem Buch noch immer nicht fertig geworden, wie ich gehofft hatte. Ehe das nicht von meiner Seele ist, kann und darf ich nicht an den sehr verlockenden Besuch in Paris denken.

Mit der Bitte um freundliche Empfehlung an Ihre verehrte Gattin und herzlichen Grüssen,

Ihr sehr ergebener
H. Hasse

1.30 09.06.1938, Hasse an Chevalley

Prof. Dr. Hasse. 9. Juni 1938.

Herrn
Dr. Cl. Chevalley
P a r i s XVI.
– – – – – – – – – – – –
Rue du Général Malleterre 4.

Lieber Herr Chevalley,

Ich möchte Ihnen zunächst auch noch einmal von mir aus sagen, mit welchem grossen Genuss ich neulich Ihren schönen Enzyklopädieartikel gelesen habe. Darin sind eigentlich alle die Wünsche erfüllt, die ich vor einem Jahre in verschiedenen Briefen an Sie aussprach. Es ist nur sehr schade, dass der zur Verfügung stehende Raum es nicht gestattet, die Beweise im einzelnen auszuführen, so dass man sich vieles selbst überlegen muss. Ich habe immer noch nicht die Hoffnung aufgegeben, dass Sie das noch einmal bei irgendeiner Gelegenheit tun werden, denn kein anderer ist dazu mehr berufen als Sie.
Unser Kongress ist nunmehr endgültig auf die Zeit vom 11.–16. September in Baden–Baden gelegt. Dass die vom Vorstand beschlossene Einladung an Sie noch immer nicht ergangen ist, hat seinen Grund darin, dass wir für diese und einige andere Einladungen noch immer auf die Genehmigung unseres Ministers warten. Ich hoffe bestimmt, dass diese in Kürze eintreffen wird.
Für Ihre Vermittlung meiner Nachricht an Julia danke ich Ihnen bestens. Die Verzögerung in der Korrespondenz hatte wohl nur den Grund darin, dass in Frankreich im April noch Ferien waren. Ich habe nunmehr mit dem Dekan der Faculté des Sciences Paris und Julia verabredet, dass ich im Mai 1939 nach Paris komme. Ich hoffe bestimmt, Sie dann dort zu treffen. Vorher aber werden wir uns wohl noch in Baden–Baden sehen.

Mit freundlichen Grüssen von Haus zu Haus

Ihr sehr ergebener
H. Hasse

1.31 17.07.1938, Chevalley an Hasse

4 rue du Général Malleterre
Paris (16°)

Le 17 Juillet 1938

Cher Monsieur,

En ce qui concerne le congrès de cet été, j'avais répondu à M. Müller avant d'avoir reçu le programme qu'il m'a aussi envoyé ; c'est pourquoi mes demandes n'étaient pas en accord avec ce programme.

Quoique je doive faire une période de réserve militaire jusqu'au 11 Septembre, il m'est très possible de parler le 12 ; il n'y a donc pas d'inconvénient grave à ce que mon exposé se fasse ce jour là. D'autre part, j'ai vu que le temps normal des exposés était de 15 minutes ; la communication que j'ai à faire n'étant pas du tout d'une importance exceptionnelle propre à justifier une exception à cette règle, je vous propose de donner 15 minutes à ma conférence comme aux autres (je ne sais pas si c'est vous qui réglez le détail des horaires ; sinon, voulez-vous, s'il vous plaît, écrire à M. Müller à ce propos ?).

Je me réjouis que la première partie de votre livre soit presque finie. Enfin, il existera un livre d'ensemble dans lequel on pourra facilement trouver les renseignements dont on a besoin et dont on pourra conseiller la lecture aux étudiants ! J'espère que vous n'attendrez pas d'avoir écrit la seconde partie pour publier la première.

Ce serait bien intéressant s'il était possible de faire traduire votre livre en français, si vous n'y voyez pas d'inconvénient. On trouverait assez facilement un traducteur ; ce serait sans doute plus difficile de trouver un éditeur, car les maisons françaises n'aiment en général pas beaucoup publier des traductions. Mais on peut toujours essayer.

Je ne sais pas bien moi-même ce qu'il faut penser de la valeur de ce que fait M. Krasner. Il est certain que ses travaux sont en général très mal rédigés ;

les idées sont complètement cachées sous une mer de calculs souvent inutiles. Par ailleurs, il me semble tout de même intéressant qu'il puisse arriver à une théorie du corps de classes pour les extensions non abéliennes des corps locaux. Je n'ai pas encore eu le courage de me plonger dans l'étude détaillée de ce qu'il fait à ce sujet ; peut-être peut-on en tirer une idée intéressante.

Saviez-vous que je suis maintenant l'un des rédacteurs des "Acta Arithmetica" ? Je voudrais en profiter pour y introduire des mémoires de caractère plus algébrique que les papiers qu'ils ont publiés jusqu'ici. Si vous-même ou l'un de vos élèves pouvait me donner un mémoire à y envoyer, j'en serais particulièrement heureux.

Je me réjouis de vous revoir prochainement, et vous prie, en attendant, de croire à mes sentiments les plus dévoués,

C. Chevalley

1.32 21.07.1938, Hasse an Chevalley

21. Juli 1938

Lieber Herr Chevalley,

Herzlichen Dank für Ihren Brief.

Ich habe Herrn Müller, Hannover, benachrichtigt, dass Sie sich nun doch bereit erklärt haben, schon am 12. September vorzutragen, und ihn gebeten, Ihren Vortrag auf diesen Tag am Nachmittag zu legen. Ich würde es aber doch sehr schön finden, wenn Sie nicht nur die *sehr* kurze Zeit von 15 Minuten sprächen, sondern lieber etwas länger, etwa 30 Minuten, und dafür das was Sie sagen wollen einem möglichst grossen Kreis innerlich nahebringen, nicht nur dem bereits mehr oder weniger Eingeweihten. Ich habe demnach Herrn Müller gebeten, zunächst einmal 30 Minuten für Sie freizuhalten. Nutzen Sie die Zeit nicht voll aus, so schadet das auch nichts. Sie wissen ja, wie es auf solchen Kongressen mit der Zeiteinteilung zugeht.

Ich habe ferner in Erfahrung gebracht, dass es möglich ist, einen Antrag beim Landesfinanzamt zu stellen, dass Ihnen die Fahrkarte Paris – Baden-Baden – Paris von einem deutschen Reisebüro aus zollamtlich verschlossen zugeschickt wird. Ich habe dies dann auch wirklich beantragt. Hoffen wir, dass es genehmigt wird. Die tatsächliche Zusendung könnte dann allerdings erst in den ersten Tagen des September erfolgen. Sie sind wohl so gut mir noch zu schreiben, an welche Adresse ich sie dann schicken soll.

Mit dem Druck meines Buches, Band I, wird noch in diesem Jahre begonnen werden.

Wegen einer französischen Übersetzung hat vorigen Dezember schon A. Weil gefragt. Mein Verleger hat sich damit einverstanden erklärt, allerdings unter der Bedingung, dass die Übersetzung frühestens anderthalb Jahre nach dem Erscheinen des Originals erscheint.

Was Sie über Krasner schreiben, beruhigt mich.

Leider kann ich Ihnen im Moment gar nichts für die Acta Arithmetica geben, da ich seit zwei Jahren wegen des leidigen Buches nichts anderes gemacht habe. Sie wissen ja auch, dass ich als Herausgeber einer Zeitschrift in erster Linie für diese arbeiten muss, besonders in einer Zeit wie heute, wo verhältnismässig wenig Angebot an guten Arbeiten für die Zeitschriften da ist. Gelegentlich will ich Ihnen aber gerne etwas schicken.

In grosser Eile mit herzlichen Grüssen

stets Ihr
H. Hasse

1.33 20.03.1939, Hasse an Chevalley

20. 3. 1939.

Herrn

Cl. Chevalley

P a r i s 16

– – – – – – – – – – –

Rue du Général Mallterre 4

Lieber Herr Chevalley!

Ich hoffe, dass dieser Brief Sie erreichen wird, ich möchte Ihnen darin mitteilen, dass meine Vorträge in Paris nun am 19., 23., 24., Mai festgelegt sind, und dass mein Aufenthalt dort für die Zeit vom 18. bis 29. Mai bemessen ist. Ich würde mich wirklich sehr freuen, wenn Sie zu dieser Zeit bereits von Ihrer Amerikareise zurückgekehrt wären. Sie sagten mir ja im vorigen Herbst, dass Sie in der 2. Hälfte des Monats Mai wieder in Paris sein würden.

Leider ist es so, dass einige für Zahlentheorie interessierte Mathematiker aus Frankreich zu der Zeit meiner Vorträge nicht da sein werden. Wie mir A. Weil schreibt, wird Pisot in Göttingen sein, Chabauty in Manchester und Sie in Cambridge.

Ich darf annehmen, dass Sie eine schöne, interessante Zeit in Amerika gehabt haben. Mein Studium im französischen habe ich in diesem Winter unter der Leitung von Herrn Savonnet fortgesetzt, der zu meiner Freude hier in Göttingen französischer Lektor geworden ist. Fliessend sprechen kann ich allerdings noch immer nicht, besonders nicht über Politik. Ich hoffe aber, dass die Mathematik sich leichter vortragen lässt.

Mit besten Grüssen! Ihr
H. Hasse

1.34 19.10.1948, Hasse an Chevalley

[Aus dem Nachlass Chevalley]

Dr. HELMUT HASSE
o. Prof. d. Mathematik a. d. Universität Berlin
Direktor des Forschungsinstituts für Mathematik
der Deutschen Akademie der Wissenschaften

(1) BERLIN–ZEHLENDORF, den 19. 10. 1948
ROTHERSTIEG 3

Lieber Herr Chevalley,

Wenn ich heute nach 10 jähriger Unterbrechung die Verbindung mit Ihnen wieder aufnehme, so geschieht das zunächst in wehmütiger Erinnerung an die schönen Zeiten, die uns zusammengeführt, und an die fruchtbaren Stunden die wir zusammen verbracht haben, dann aber in dem Gefühl einer Schuld, die ich auf mir lasten fühle, ohne doch eigentlich dafür verantwortlich zu sein. Noch immer liegt ja Ihr damals eingereichter schöner Artikel „Theorie der Abelschen Zahlkörper" ungedruckt bei mir. Es tut mir herzlich leid, dass Sie als einer der ersten, pünktlichen Ablieferer unter den Enzyklopädieverfassern so lange auf den Druck haben warten müssen. Aber der Verlag wollte zunächst die im Bande mehr vorne stehenden Artikel drucken.

Nun soll jetzt, nachdem die ungeheuren Schwierigkeiten der Nachkriegszeit langsam im Abklingen sind, mit der Fortsetzung des Drucks begonnen werden. Da möchte ich nun an Sie die grundsätzliche Frage richten, ob Sie damit einverstanden sind, dass Ihr Artikel erscheint, und wenn das der Fall ist, ob er in der alten Form erscheinen kann oder die inzwischen verstrichene Zeit eine Überarbeitung und Ergänzung notwendig macht.

Ich wäre Ihnen sehr dankbar, wenn Sie mich Ihre Stellungnahme zu diesen Fragen bald wissen liessen. Wenn Sie mich bei dieser Gelegenheit auch ein wenig über Ihr persönliches Ergehen in all den Jahren und über die Ergebnisse Ihrer Forschungen unterrichten würden, würde ich das mit grosser Freude begrüssen.

Mit freundlichen Grüssen bin ich Ihr

H. Hasse

Kapitel 2

Verschiedenes zu Hasse–Chevalley

2.1 Mai 1932, Manuskript: Zyklische Erweiterungen

LA DEUXIEME REGLE DE PASSAGE POUR LES EXTENSIONS CYCLIQUES.

Soit k un corps de nombres p-adiques. Nous appellerons corps gauche normé $\mathfrak{K}$ de rang n^2 de centre k le corps gauche défini par le Verschränkte Produkt (p, W, s) où W est le sur-corps [1] cyclique non-ramifié de degré relatif n et où s est l'inverse de la substitution de Frobenius $\left(\frac{W}{p}\right)$. Si K est un sur-corps relativement cyclique de degré n de k, corps de classes pour le groupe H, et si β est un nombre de k primitif [*] pour H, soit $\sigma = \left(\frac{\beta, K}{p}\right)$. Le corps gauche $\mathfrak{K}$ est encore égal au Verschränkte Produkt (β, K, σ).

Ceci posé soit K' un sous-corps de K, de degré d par rapport à k. L'ensemble des éléments de $\mathfrak{K}$ permutables avec tous les éléments de K' forme une algèbre de centre K'. Je dis que *cette algèbre est le corps gauche normé de centre* K'. Soit en effet p' un nombre de K' d'ordre d pour l'idéal premier de ce corps ; soient f le degré de l'idéal premier (p), ρ celui de (p') par rapport à k. Comme $\mathfrak{K}$ ne contient pas de diviseurs de 0, il en est de même de $\mathfrak{K}'$ qui est par suite un corps gauche (on sait d'une manière générale que c'est une algèbre simple). On a donc $\mathfrak{K}' = K'(\Omega, \Pi^*)$ où Ω est une racine primitive $(p^{f\rho\frac{n}{d}} - 1)$ de l'unité, [2] et où $\Pi^{*\frac{n}{d}} = p'$ et $\Pi^{*-1}\Omega\Pi = \Omega^{p^{f\rho r}}$. Soit $\mathfrak{p}$ l'idéal bilatère premier de $\mathfrak{K}$. Comme il existe une Bewertung de $\mathfrak{K}$, on peut parler de l'ordre d'un nombre de $\mathfrak{K}$ par rapport à $\mathfrak{p}$ et calculer sur cet ordre comme dans les corps commutatifs ordinaires. En particulier p' est d'ordre $n\frac{\rho}{d}$ et par suite Π^* est d'ordre $\frac{nf}{n/d} = \rho$. D'autre part $\mathfrak{K}$ contient une racine primitive $(p^{fn}-1)$-ème de l'unité ω et un nombre

1. Randbemerkung von Hasse : „p Primzahl *aus* k"

$*$. *primitif : la* 1^{ere} *puissance de* β *contenue dans* H *est* β^n

2. Randbemerkung von Hasse : „p *rat.* Primzahl"

Π tel que $\Pi^n = p$, $\Pi^{-1}\omega\Pi = \omega^{p^{-f}}$. On peut toujours supposer que Ω est une puissance de ω. On a donc $\Pi^{-1}\Omega\Pi = \Omega^{p^{-f}}$, et par suite $\Pi^{\rho r}\Pi^*$ est permutable avec Ω. Nous désignerons par $\mathfrak{K}_1$ le corps gauche formé de tous les éléments de $\mathfrak{K}$ permutables avec Ω. Il a pour central le corps $k(\Omega)$ et est de rang $\left(\frac{d}{\rho}\right)^2$ sur son central. Donc son idéal premier bilatère figure dans p avec l'exposant $\frac{d}{\rho}$ et par suite ses nombres sont divisibles par des puissances de $\mathfrak{p}$ d'exposants $\equiv 0 \pmod{\frac{n\rho}{d}}$. On a donc

$$\rho(r+1) \equiv 0 \quad \left(\text{mod. } \frac{n\rho}{d}\right) \qquad r \equiv -1 \quad \left(\text{mod. } \frac{n}{d}\right)$$

et par suite $\Pi^{*-1}\Omega\Pi^* = \Omega^{p^{-f\rho}}$, ce qui démontre bien que $\mathfrak{K}'$ est le corps gauche normé de central K'.

Soit alors β un nombre de k primitif pour le groupe H pour lequel K est corps de classes. Le nombre β, considéré comme un nombre de K', est encore primitif pour le groupe H' de K' pour lequel K est corps de classes. Posons $\left(\frac{\beta,K}{p}\right) = \sigma$. Donc $\mathfrak{K} = (\beta, K, \sigma)$, et $\mathfrak{K}$ contient un nombre u tel que pour tout élément x de K on ait $u^{-1}xu = x^\sigma$, avec $u^n = \beta$. Il en résulte tout de suite que $\mathfrak{K}' = (\beta, K, \sigma^d)$, et par suite que $\left(\frac{\beta,K}{p'}\right)_{K'} = \sigma^d$, et par suite

$$\left(\frac{\beta, K}{p'}\right)_{K'} = \left(\frac{N_{K'k}(\beta), K}{p}\right)$$

Comme tout nombre de K' est congru (mod. H') à une puissance de β, on a d'une manière générale

$$\boxed{\left(\frac{B, K}{p'}\right) = \left(\frac{N_{K'k}(B), K}{p}\right)}$$

Nous appellerons cette formule *seconde règle de passage.*

2.2 Mai 1932, Manuskript: Verschiebungssatz

LE VERSCHIEBUNGSSATZ DU SYMBOLE DE RESTES NORMIQUES.

Soient k un corps de nombres p-adiques, et K_1, K_2 deux sur-corps relativement cycliques de degrés n_1, n_2 de k. Soit K le corps composé de ces deux corps, et soit $n = n_1 n_2$ le degré de K/k. Donnons-nous dans k deux nombres β_1, β_2 ; β_1 étant dans le groupe H_1 associé à K_1, et primitif* pour le groupe H_2 associé à K_2, β_2 étant dans H_2 et primitif pour H_1. Donc β_i $(i = 1, 2)$ est norme relative d'un nombre B_i de K_i. Posons p_1 et p_2 désignant les idéaux premiers de K_1, K_2,

$$\left(\frac{B_1, K_2}{p_1}\right) = \sigma_2 \qquad \left(\frac{B_2, K_1}{p_2}\right) = \sigma_1$$

Les opérations σ_1, σ_2 seront considérées comme des automorphismes de K par rapport à k. Ceci posé soit $\mathfrak{K}$ le corps gauche normé de centre k de rang n^2. On sait [1] que ce corps contient en particulier les algèbres $\{B_1, K, \sigma_2\}$ et $\{B_2, K, \sigma_1\}$ de centres respectifs K_1, K_2. Il contient donc des éléments u_1, u_2 tels que, ξ désignant un nombre quelconque de K, on ait

$$u_1^{-1}\xi u_1 = \xi^{\sigma_1} \qquad u_2^{-1}\xi u_2 = \xi^{\sigma_2} \qquad u_1^{n_1} = B_2 \qquad u_2^{n_2} = B_1.$$

De plus on a nécessairement $u_1 u_2 u_1^{-1} u_2^{-1} = \Gamma$ où Γ est un nombre de K. Un calcul facile montre que l'on a

$$\Gamma^{1+\sigma_1+\ldots+\sigma_1^{n_1-1}} = B_2^{1-\sigma_2^{-1}} \qquad \Gamma^{1+\sigma_2+\ldots+\sigma_2^{n_2-1}} = B_1^{\sigma_1^{-1}-1}$$

Or B_1, B_2, Γ peuvent être considérés comme des éléments d'un système de facteurs de K, éléments qui déterminent d'ailleurs entièrement le système

*. *primitif : $\beta_1^{n_2}$ la première puissance de β_1 contenue dans le groupe associé à H_2.*

1. Randbemerkung von Hasse : „nach dem Satz a. S. 1 der anderen Note."

de facteurs. Nous désignerons ce système de facteurs par $(B_1,\ B_2,\ \Gamma)$. Or le symbole $(B_1^{\sigma_1^{-i}},\ B_2,\ \Gamma^{\sigma_1^{-i}})$ représente un système de facteurs équivalent au précédent (il suffit de faire la transformation $u_2' = \Gamma^{1+\sigma_1^{-1}+\cdots+\sigma_1^{-i+1}} u_2$). Il en résulte que l'algèbre de rang n^2 qui appartient à la même classe que $\mathfrak{K}^{n_1}$ se définit par le système de facteurs

$$(\beta_1,\ B_2^{n_1},\ B_2^{1-\sigma_2^{-1}})$$

qui est encore équivalent au suivant : $(\beta_1,\ 1,\ 1)$ comme on le voit en faisant la transformation $u_1' = u_1 B_2^{-1}$. Mais ce système de facteurs définit évidemment le produit direct de l'algèbre de centre k définie par $(\beta_1,\ K_2,\ \sigma_2)$ et de l'algèbre de centre k définie par $(1,\ K_1,\ \sigma_1)$ qui est une algèbre complète de matrices. D'autre part on sait que le corps gauche de l'algèbre $\mathfrak{K}^{n_1}$ est le corps gauche normé de centre k. Il résulte tout de suite de là que

$$\left(\frac{\beta_1, K_2}{p}\right) = \sigma_2.$$

On en déduit que : si $K_1,\ K_2$ sont deux sur-corps relativement cycliques de k (étrangers), si B_1 est un nombre de K_1, et si p_1 est l'idéal premier de K_1, on a

$$\left(\frac{B_1, K_1K_2}{p_1}\right) = \left(\frac{N_{K_1k}(B_1), K_2}{p}\right).$$

La propriété est encore vraie si K_1 et K_2 ne sont pas étrangers. Soit en effet k^* leur partie commune. En vertu de la formule précédente on a

$$\left(\frac{B_1, K_1K_2}{p_1}\right) = \left(\frac{N_{K_1k^*}(B_1), K_2}{p^*}\right).$$

Mais en vertu de la deuxième règle de passage relative au cas cyclique, on a

$$\left(\frac{N_{K_1k^*}(B_1), K_2}{p^*}\right) = \left(\frac{N_{K_1k}(B_1), K_2}{p}\right).$$

On déduit de là que la propriété est vraie quand K_1 est un sur-corps relativement galoisien quelconque. En effet, K_1 est nécessairement relativement métacyclique par rapport à k. Donc il existe une suite de corps k_i avec $k_0 = k,\ k_r = K_1$, telle que k_{i+1} soit un sur-corps relativement cyclique de k_i : on a successivement

$$\left(\frac{B_1, K_1K_2}{p_{K_1}}\right) = \left(\frac{N_{K_1k_{n-1}}(B_1), k_{n-1}K_2}{p_{k_{n-1}}}\right) = \cdots = \left(\frac{N_{K_1k_0}(B_1), K_2}{p}\right).$$

Considérons alors un sur-corps relativement abélien quelconque K de k composé de corps cycliques K_i étrangers les uns aux autres. Nous considérons le groupe de Galois de K comme produit direct des groupes des K_i. Soit β un nombre de k ; il est norme par rapport à k d'un nombre B d'un sous-corps K' de K sur lequel K est cyclique (ce sous-corps étant choisi aussi grand que possible). Posons

$$\left(\frac{B, K}{p'}\right) = \sigma.$$

Alors, en vertu de ce que nous avons démontré, on a

$$\sigma = \left(\frac{\beta, K_i}{p}\right).$$

Il suffit en effet de considérer le corps $K'K_i$: on a

$$\left(\frac{\beta, K_i}{p}\right) = \left(\frac{B, K'K_i}{p'}\right).$$

Nous poserons $\sigma = \left(\frac{\beta, K}{p}\right)$. On voit que ce symbole de restes normiques est encore défini par la formule

$$\left(\frac{\beta, K}{p}\right) = \Pi\left(\frac{\beta, K_i}{p}\right).$$

Comme ceci a lieu quelsque soient les corps K_i choisis pour composer K, on en déduit que pour tout sous-corps K^* de K cyclique par rapport à k, on a

$$\left(\frac{\beta, K}{p}\right) = \left(\frac{\beta, K^*}{p}\right).$$

Il en résulte que la propriété est encore vraie pour les sous-corps quelconques de K. La formule

$$\left(\frac{B, K}{p_{K^*}}\right) = \left(\frac{N_{K^*k}(B), K}{p}\right)$$

est évidente si on remarque que $N_{K^*k}(B)$ est norme par rapport à k d'un sous-corps de K contenant K^* et sur lequel K est cyclique.

Les deux formules sont donc démontrées en général.

2.3 Mai 1932, Manuskript, Fragment

Théorème. *Soit k un corps de nombres p-adiques et soient K_1, K_2 deux sur-corps relativement cycliques de k de degré n. Soit β un nombre de k. Posons $\left(\frac{\beta,K_1}{p}\right) = \sigma_1$, $\left(\frac{\beta,K_2}{p}\right) = \sigma_2$, et supposons que σ_1, σ_2 soient des automorphismes primitifs. Le groupe de Galois de K_1K_2 étant considéré comme produit direct des groupes de K_1, K_2, β est norme relative d'un nombre du sous-corps de K_1K_2 appartenant au groupe $(\sigma_1\sigma_2)$.*

En effet, les corps gauches $(\beta,\ K_1,\ \sigma_1)$ et $(\beta,\ K_2,\ \sigma_2)$ sont isomorphes à un même corps gauche A *que nous supposerons contenir* K_1 *et* K_2. A contient des éléments u, u' tels que $u^n = u'^n = \beta$, u permutant entre eux les nombres de K_1 et u' ceux de K_2. Or ces éléments sont conjugués : $u' = \vartheta^{-1}u\vartheta$, et par suite u permute entre eux les nombres de $\vartheta K_2\vartheta^{-1}$. Remplaçant K_2 par ce corps qui lui est isomorphe, nous pouvons supposer que $u = u'$. Nous introduirons deux nouveaux corps $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$ respectivement isomorphes à K_1, K_2 mais dont les éléments seront considérés comme liés commutativement, de sorte que $\overline{K} = \overline{K}_1\overline{K}_2$ est le corps composé ordinaire. D'autre part considérons K_1 et K_2 comme des k–modules : le module K_1K_2 est module de représentation de K_1 dans K_2 et par suite est K_1–module de rang au moins n (il est certainement $\neq K_2$). Comme il est contenu dans A, il est identique à A. Si les formules $x_1 \to \overline{x}_1$ et $x_2 \to \overline{x}_2$ définissent des isomorphismes de K_1 et K_2 avec $\overline{K}_1$ et $\overline{K}_2$, nous associerons à tout élément de A mis sous la forme $\sum x_1x_2$ l'élément $\sum \overline{x}_1\overline{x}_2$ de $\overline{K}$ (On vérifie tout de suite en exprimant les éléments de K_1 et de K_2 au moyen de bases que cette correspondance est bien définie). A l'élément u est associé un élément B de $\overline{K}$ et comme u est permutable avec u', cet élément est invariant par l'opération $\sigma_1\sigma_2$. Cherchons les éléments de $\overline{K}$ associés aux diverses puissances de u. On a

$$u = \sum_i x_1^{(i)} x_2^{(i)}$$

$$u^2 = \sum_i x_1^{(i)} x_2^{(i)}.u = \sum x_1^{(i)} u \sigma_2 \left(x_2^{(i)}\right) = \sum_{ij} x_1^{(i)} x_1^{(j)} x_2^{(j)} \sigma_2 \left(x_2^{(i)}\right)$$

$$\longrightarrow \sum_{ij} \overline{x}_1^{(i)} \overline{x}_1^{(j)} \overline{x}_2^{(j)} \overline{\sigma}_2 \left(\overline{x}_2^{(i)}\right) = B^{1+\overline{\sigma}_2}$$

où $\overline{\sigma}_2$ est l'automorphisme de $\overline{K}_2$ déduit de σ_2 par l'isomorph[isme] $x_2 \to \overline{x}_2$ et de même on voit que l'élément associé à u^i sera $B_2^{1+\overline{\sigma}_2+\cdots+\overline{\sigma}_2^{i-1}}$. En particulier à u^n sera associé l'élément $B_2^{1+\overline{\sigma}_2+\cdots+\overline{\sigma}_2^{n-1}}$ qui est la norme de B par rapport à k. Mais $u^n = \beta$, et les nombres de k se correspondent à eux-mêmes dans notre correspondance. Par suite β est norme relative du nombre B.

2.4 o.D., Manuskript: Existenzsatz in Charakteristik p

Existence pour corps [de] classes [en] caractéristique p

On considère un diviseur de la forme $(\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2\,\ldots\,\mathfrak{p}_m)^{ap}$ et les sur-corps de degré p (= corps engendré par la fonction ω : $K(y)$ où $y^p - y = \omega$) qui ne sont ramifiés qu'en $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_m$ et qui sont *engendrés* au moyen de fonctions ayant en ces points un pôle d'ordre ap au plus. Soient ω les fonctions qui engendrent ces corps.

Soit $\mathfrak{r}$ un point distinct de $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m$. Supposons qu'une fonction ω ait en $\mathfrak{q}$ où $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}_1\ldots\mathfrak{p}_m\mathfrak{r}$ un pôle. Alors on a nécessairement $\omega \equiv \alpha^p - \alpha$ (mod $\mathfrak{q}^o$). Or considérons les fonctions α' n'ayant de pôles qu'en $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{r}$, et d'une manière précise, dont le dénominateur divise $\mathfrak{q}^{N'}\mathfrak{r}^N$. Soient k, f les ordres de $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$. L'ordre de $\mathfrak{q}^{N'}\mathfrak{r}^N$ est $N'k + Nf$. N étant choisi assez grand pour que $Nf > w$.*) Les fonctions α' dépendent de $N'k + Nf - g + 1$ paramètres. Il en résulte qu'il y'a exactement $N'k$ fonctions α' linéair[ement] indépend[antes] ayant en $\mathfrak{q}$ un pôle d'ordre $\leq N'$, et que, par suite, si α est une fonction ayant en $\mathfrak{q}$ un pôle d'ordre $\leq N'$, il existe une fonction $\alpha' \equiv \alpha$ $(\mathfrak{q}^o)$. Par suite on peut supposer $\omega \equiv \alpha'^p - \alpha'$ (mod. $\mathfrak{q}$) : la fonction $\omega - (\alpha'^p - \alpha')$ engendre encore le même corps que ω et n'a plus de pôle en $\mathfrak{q}$. En faisant cela pour les divers pôles d'une fonction ω, on voit que :

Les corps considerés sont engendrés par des fonctions n'ayant de pôles qu'en $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{r}$ et qui sont congrues (mod. $\mathfrak{r}^o$) à des fonctions de la form $\beta^p - \beta$, et qui enfin ont en $\mathfrak{p}_i$ un pôle d'ordre ap au plus. Ce sont ces fonctions que nous désignerons par ω.

Le degré du corps cherché est donc p^* où

$$p^* = (\omega + \beta^p - \beta : \beta^p - \beta) = \big(\omega : [\omega, \beta^p - \beta]\big)$$

*). w : nombre de ramification

Considérons parmi les fonctions ω celles, ω_n, qui ont un pôle d'ordre np au plus en $\mathfrak{r}$. q étant l'ordre du diviseur $(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m)^{ap}$, les fonctions dont le discrimin[ant] divise $(\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_m)^{ap}\mathfrak{r}^{np}$ dépendent de $q+fnp-g+1$ paramètres. La condition $\omega_n \equiv \beta^p - \beta \pmod{\mathfrak{r}^o}$ donne $fnp - fn$ conditions linéaires. Ces conditions sont indépendantes si q est assez grand pour qu'il y'ait $q - g + 1$ fonctions linéairement indép[endantes] dont le dénominateur divise $(\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_m)^{ap}$. En effet dans ce cas, il y'a pour toute fonction φ une fonction $\equiv \varphi \pmod{\mathfrak{r}^o}$ dont le dénominateur divise $(\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_m)^{ap}\mathfrak{r}^{np}$ (n assez grand). Par suite les fonctions ω_n dépendent de $q + fn - g + 1$ paramètres.

Considérons les fonctions β_n telles que $\beta_n^p - \beta_n = \omega_n$. Ce sont ces fonctions β_n dont le dénomin[ateur] divise $(\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_m)^a\mathfrak{r}^n$. Elles dépendent de $\frac{q}{p} + nf - g + 1$ paramètres (si n est assez grand). Elles forment donc un groupe d'ordre $P^{\frac{q}{p}+nf-g+1}$, (P : nombre des constantes du corps de base), et par suite les fonctions $\beta_n^p - \beta_n$ forment un groupe d'ordre $\frac{P^{\frac{q}{p}+nf-g+1}}{p}$. D'où

$$\big(\omega_n : [\omega_n\,,\, \beta_n^p - \beta_n]\big) \;=\; P^{q(1-\frac{1}{p})}p \;=\; P^{\frac{q}{p}(p-1)}p$$

Ce nombre étant indépendant de n, on a

$$\big(\omega : [\omega,\, \beta^p - \beta]\big) \;=\; P^{\frac{q}{p}(p-1)}p$$

Désignons par $\mathfrak{A}$ les diviseurs de dimension 0 premiers à $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_m$, par α les fonctions de K jouissant de la même propriété, par θ les fonctions $\equiv 1 \;\; (\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_m)^{ap}$. On a

$$[\mathfrak{A} : \mathfrak{A}^p(\theta)] \;=\; \frac{[\mathfrak{A} : (\theta)]}{[\mathfrak{A}^p(\theta) : (\theta)]} \;=\; \frac{[\mathfrak{A} : (\alpha)][(\alpha) : (\theta)]}{[\mathfrak{A}^p : [\mathfrak{A}, (\theta)]]}$$

Or il n'y a qu'un nombre fini de classes de diviseurs d'ordre 0. Prenons dans chaque classe $\neq 1$ dont la puissance $p^{\underline{\text{ieme}}}$ est 1 un diviseur : premier à $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_m$. Soient $\mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_H$ les divers diviseurs ainsi choisis. Si $\mathfrak{A}^p = (\theta)$ et si $\mathfrak{A}$ n'est pas principal, on a $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_i(\alpha)$. Soit $\mathfrak{A}_i^p = (\alpha_i)$: on a $\mathfrak{A}^p = (\alpha_i\alpha^p)$, ou $\theta = \varepsilon\alpha_i\alpha^p$ où ε est une unité. D'où $\mathrm{d}\theta = \varepsilon\alpha^p\,\mathrm{d}\alpha_i$. Or (α) est premier à $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_m$ et $\mathrm{d}\theta$ doit être nul aux points $\mathfrak{p}_i$. Donc $\mathrm{d}\alpha_i$ doit être nul en ces points. Or aucune des differentielles $\mathrm{d}\alpha_i$ n'est $\equiv 0$. On peut donc supposer que $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_m$ sont assez nombreux pour ne pas être les zéros d'une des différentielles $d\alpha_i$. Il faut donc que $\mathfrak{A}$ lui-même soit principal : on a $[\mathfrak{A}^p, (\theta)] = [(\alpha^p), (\theta)]$ et

$$\big(\mathfrak{A}^p : [\mathfrak{A}^p : (\theta)]\big) \;=\; \big(\mathfrak{A}^p : (\alpha)^p\big)\,\big((\alpha)^p : [(\alpha)^p : (\theta)]\big)$$

On a $[\mathfrak{A}^p : (\alpha)^p] = [\mathfrak{A} : (\alpha)]$ et

$$\begin{aligned}[\mathfrak{A} : \mathfrak{A}^p(\theta)] = \frac{[(\alpha) : (\theta)]}{\big((\alpha)^p : [(\alpha)^p, (\theta)]\big)} = \frac{\big((\alpha) : (\theta)\big)}{\big((\alpha^p\theta) : (\theta)\big)} \;&=\; \big((\alpha) : (\alpha^p\theta)\big) \\ &=\; \big(\alpha : \alpha^p\theta\varepsilon\big) \\ &=\; \big(\alpha : \alpha^p\theta\big)\end{aligned}$$

où ε désigne les constantes $\neq 0$ (car ε est puiss[ance] p^e exacte).

Or cet indice se calcule facilement en prenant en chaque $\mathfrak{p}_i$ une variable locale et en trouve qu'il vaut $P^{\frac{q}{p}(p-1)}$.

Enfin si $\overline{\mathfrak{A}}$ designe les diviseurs d'ordre quelconque premiers à $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_m$, on a $[\overline{\mathfrak{A}} : \overline{\mathfrak{A}}^p(\theta)] = p[\mathfrak{A} : \mathfrak{A}^p(\theta)]$ et par suite

$$[\overline{\mathfrak{A}} : \overline{\mathfrak{A}}^p(\theta)] = P^{\frac{q}{p}(p-1)}p$$

ce qui démontre le théorème d'existence.

Kapitel 3

Namenverzeichnis

Kapitel 4

Stichwortverzeichnis