Briefwechsel

H. Hasse – A. Weil

Herausgegeben von Peter Roquette

Version vom 29.09.2011

Letztmalig geändert am 16. Juli 2014.

Hasse an Weil 04.05.36 – 07.03.39
Weil an Hasse 04.08.31 – 09.04.39
Zwei Briefe Hasse/Selberg

Quelle: Handschriftenabteilung der Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen,
Nachlass Helmut Hasse

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Letters Hasse–Weil

1.1 04.08.1931, Weil an Hasse

Herbrand tödlich verunglückt. Chevalley wird sich um den Nachlass kümmern.

Paris, 4.VIII. 31.

Sehr geehrter Herr Professor!

Ich muss Ihnen leider eine sehr betrübende Nachricht mitteilen, die des Todes Jacques Herbrands, der vor wenigen Tagen bei einer Bergbesteigung im Dauphiné tödlich verunglückt ist. Ich brauche Ihnen nicht zu sagen, welchen Verlust dieser Tod für die Wissenschaft und besonders für die Zahlentheorie bedeutet. Noch kürzlich vor seinem Tode hatte er eine neue Idee gehabt, die eine weitere bedeutende Vereinfachung der Klassenkörpertheorie bringen sollte; doch wird das noch erhalten, da er genug davon erzählt hatte, damit es rekonstruiert werde. Sie wissen aber, dass er gewiss noch nicht sein bestes geleistet hatte, und alles, was man sich von ihm versprechen konnte, ist jetzt vorbei.

Herr Chevalley ist mit der Publikation von Herbrands Nachlass beauftragt, und Sie möchten an ihn schreiben, wenn Sie im Besitze von Manuskripten sind, oder von solchen Briefen, die man für eine Publikation benutzen könnte. Chevalley selbst wollte Ihnen übrigens auch direkt schreiben, traute sich aber nicht zu, einen Brief auf deutsch zu schreiben.

Mit den besten Grüssen

Ihr ganz ergebener

A Weil

1.2 18.06.1934, Weil an Hasse

Thetafunktion algebraisch als Divisor auf der Jacobischen Mannigfaltigkeit.

Frankfurt A/M,
18.VI. 34.

Lieber Herr Hasse!

Ich habe noch über Ihr Problem nachgedacht; und es scheint mir nach meinen Erfahrungen auf diesem Gebiet kaum zu erwarten, dass man brauchbare Rechnungen über Abelsche Funktionen ansetzen könnte, wenn man die Thetafunktion nicht mehr zur Verfügung hat. Das Rechnen mit homogenen Funktionen, von dem die Rede war, ist zwar sehr brauchbar zur Vermeidung von Unbestimmtheitsstellen, aber doch kein rechnerisches Werkzeug. Es bleibt Ihnen also m. E. übrig, mit der Thetafunktion in der sonst üblichen Weise zu operieren, indem Sie sie als *algebraisch* erklären. Die Thetafunktion ist nämlich nichts anderes als ein Divisor auf der Jacobischen Mannigfaltigkeit: der Divisor $\vartheta(u_1 - a_1, \ldots, u_p - a_p) = 0$ ist die $(p-1)$–dimensionale Mannigfaltigkeit, deren Punkte denjenigen Divisoren $\mathfrak{X}$ auf der Grundkurve entsprechen, die durch Angabe der Divisoren*klasse* $\left(\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{A}}\right)$ *nicht* eindeutig bestimmt sind. Der algebraische Inhalt der Periodizitätseigenschaften der Thetafunktion ist wieder nichts anderes als eine notwendige und hinreichende Bedingung, damit ein Quotient $\frac{\prod_\mu \vartheta(m_\mu u - a_\mu)}{\prod_\nu \vartheta(n_\nu u - b_\nu)}$ eine Abelsche Funktion, also der zugehörige Divisor auf der Jakobischen Mannigfaltigkeit ein Hauptdivisor sei. Diese Eigenschaften, sowie die wenigen weiteren Eigenschaften, auf die es bei dem Rechnen mit Thetafunktionen ankommt, werden sich wohl ohne übergrosse Mühe rein algebraisch beweisen lassen, und damit werden Sie wieder das einzige brauchbare rechnerische Apparat, das es in dieser Theorie bisher gibt, wieder zur Verfügung haben.

Lassen Sie mich bitte gelegentlich von dem weiteren Verlauf Ihrer Untersuchungen hören. Sie können immer meine Pariser Adresse benutzen.

Mit herzlichen Grüssen

A Weil

1.3 26.04.1936, Weil an Hasse

W. geht nicht nach Oslo, aber mit Delaunay in den Kaukasus. Vielleicht könnte W. auf dem Weg einen Besuch Göttingen machen. Diplomarbeit von Frl. Lutz (Strassburg) über elliptische Kurven im p-adischen Zahlkörper. W. schlägt vor, diese Arbeit in Göttingen zu publizieren als Zeichen fortgesetzter Zusammenarbeit.

Université
de Strasbourg

le 26.IV.36.

Lieber Herr Hasse,

Wegen der Osterferien, die ich in Spanien verbrachte, habe ich Ihren freundlichen Brief erst kürzlich erhalten. Was ich getan habe, habe ich getan; und ich will mich nicht befragen, ob es besser ungetan geblieben wäre. Einem Menschen, der sich in einer unverdient schwierigen Lage befindet, seine Sympathie zu zeigen, ist gut: mehr habe ich eigentlich nicht gewollt, bis plötzlich das Blut zu heiss wurde; als derjenige, der das wenigste aufs Spiel zu setzen hatte, hätte ich allerdings der vernünftigere sein sollen, was ich nicht war. Es wäre freilich traurig, wenn durch die Folgen davon ein wertvolles Menschenleben verbittert wäre: ich kann es doch nicht ganz glauben, und kann bloss hoffen, dass es nicht so ist. Dass Sie so viel Verständnis gezeigt haben, und niemanden verurteilten, hat mich nicht gewundert, da ich nichts anderes von Ihnen erwartet hätte; doch muss ich Ihnen dafür meinen Dank aussprechen.[1]

Nach Oslo werde ich nicht kommen, da ich schon seit dem vorigen Jahr mit B. Delaunay eine Reise in den Kaukasus geplant habe, die gerade in Juli stattfinden soll. Vielleicht könnte ich Sie auf dem Wege dorthin in Göttingen besuchen. Mit Zahlentheorie habe ich mich in der letzten Zeit wenig beschäftigt;

[1] *Anm. d. Hsgb: Aus dem Text geht nicht hervor, um welche Angelegenheit es sich handelt. Vielleicht geht es um Ruth Moufang? Siehe Brief vom 6.5.1936.*

doch hat eine Strassburger Schülerin von mir in Zusammenarbeit mit mir nicht uninteressante Resultate über die Gleichung $y^2 = x^3 - Ax - B$ im p–adischen Zahlkörper erhalten; es zeigt sich, dass die abelsche Gruppe der Lösungen in diesem Körper einen Modul bildet gegenüber dem Ring der ganzen p–adischen Zahlen (ob mit endlicher Basis, wissen wir noch nicht), also dass in diesem Bereich die Multiplikation nicht nur mit gewöhnlichen, sondern auch mit beliebigen p–adischen ganzen Zahlen einen Sinn hat. Da diese Frage einigermassen mit Ihren schönen Noten in den Gött. Nachr. verwandt ist, wie wäre es, wenn ich Ihnen eine Note darüber für die Nachr. sandte ? Das wäre mir lieb, als ein Zeichen der fortgesetzten Zusammenarbeit, doch selbstverständlich nur unter der Bedingung, dass Ihnen dadurch keine Unannehmlichkeit verursacht werden kann; darüber möchten Sie mir ganz offen antworten.

Mit herzlichen Grüssen

A Weil

1.4 04.05.1936, Hasse an Weil

4. 5. 36

H. bietet an, die Arbeit von Lutz in Crelles Journal zu publizieren.

Lieber Herr Weil,

im Anschluß an meinen Brief von vor einigen Tagen möchte ich Ihnen sagen, daß der Sekretär unserer Gesellschaft der Wissenschaften die Veröffentlichungen von Arbeiten, die von einem *Schüler* eines bekannten auswärtigen Gelehrten stammen, grundsätzlich nicht zum Druck in den Göttinger Nachrichten bringen darf. Ich bin aber wie gesagt sehr gern bereit, die Arbeit in Crelles Journal aufzunehmen. Wie schon gesagt hat das seinen inneren Sinn dadurch, daß die ausführliche Darstellung meiner eigenen Theorie gerade jetzt in Crelles Journal im Druck ist. Ich wäre Ihnen sehr dankbar, wenn Sie mir die Arbeit für mein Journal überlassen könnten.

Im übrigen sehe ich noch Ihrer Antwort zu der Frage eines eventuellen Zusammentreffens entgegen.

Mit herzlichen Grüßen

Ihr

H. Hasse

1.5 06.05.1936, Weil an Hasse

Mrs. M. (Moufang?) Vielleicht kann W. nicht nach dem Kaukasus gehen. Vielleicht nach Oslo. Mehr über Diplomarbeit Lutz. Rationale Punkte endlicher Ordnung sind ganzzahlig.

Strasbourg,
6.V.36

Lieber Herr Hasse,

Recht herzlichen Dank für Ihre beiden Briefe. Was Sie von Mrs. M. schreiben, ist das, was ich von ihr erwartet hätte; tapfer ist sie schon; und freudig, ihrer ganzen Anlage nach. Ich wünsche herzlich, dass es ihr gut gehe, trotz aller Schwierigkeiten![1]

Meine Reise nach dem Kaukasus scheint leider nicht mehr so sicher zu sein, da ich viellleicht wegen der Examina nicht frühzeitig genug von meinen Pflichten hier los werde; jedenfalls würden wir uns dann besser auf meiner Rückreise treffen können. Was Sie über diese Zusammenkunft schreiben, kann ich sehr gut verstehen; ich kenne ja die Verhältnisse, und wäre mit Ihrem Vorschlag ganz einverstanden. Vielleicht komme ich aber doch nach Oslo; jedenfalls werde ich Ihnen darüber noch schreiben.

Was die Arbeit meiner Schülerin betrifft, so handelt es sich um eine sogenannte Diplomarbeit, die noch weit anspruchsloser ist als eine deutsche Dissertation; ich dachte zunächst nur an die Veröffentlichung einer kleinen Note, die sich für Crelles Journal wenig eignet. Es kommt heraus, dass die additive Gruppe der Lösungen von $y^2 = x^3 - Ax - B$ im p–adischen Zahlkörper direktes Produkt einer endlichen Gruppe und der additiven Gruppe der ganzen p–adischen Zahlen ist. Ähnliches gilt wohl im $\mathfrak{p}$–adischen Zahlkörper, jedoch wissen wir das noch nicht genau. Die Beweise sind äusserst einfach, oder besser gesagt ziemlich trivial. An eine ausführliche Veröffentlichung werde ich erst denken, wenn sich daraus Folgen über die Lösung der Gleichung

[1] *Anm. d Hrsgb: Handelt es sich um Ruth Moufang? Siehe Brief vom 26.4.1936. Vgl. auch die Korrespondenz Hasse-Moufang.*

in gewöhnlichen ganzen Zahlen ziehen lassen; das wird wohl der Fall sein: zunächst haben wir nur gefunden, dass die Lösungen endlicher Ordnung (Periodenteiler) in gewöhnlichen rationalen Zahlen notwendig ganzzahlig sind; damit kann man immer leicht diese Lösungen vollständig bestimmen.

Mit herzlichen Grüssen

A Weil

1.6 08.07.1936, Weil an Hasse

Comptes-Rendus Noten Lutz. W. ist weder in den Kaukasus gefahren noch wird er nach Oslo gehen, sondern er arbeitet an seinem Buch über Gruppentheorie. W. erbittet zahlentheoretische Neuigkeiten aus Oslo.

3 rue Auguste–Comte,
Paris,
le 8.VII.36.

Lieber Herr Hasse,

Hiermit schicke ich Ihnen Korrekturen von zwei Comptes–Rendus Noten über das in meinen letzten Briefen schon erwähnte Thema. Frl. Lütz wird jetzt während des Sommers die ausführlichen Beweise dazu niederschreiben, um im Herbst ihre Prüfung abzulegen. Glauben Sie, dass es noch der Mühe wert sei, die Sache zu veröffentlichen ? In diesem Falle steht Ihnen die Arbeit gewiss zur Verfügung. Lassen Sie es mich nur wissen: denn ich müsste die Ausarbeitung selbstverständlich viel sorgfältiger durchsehen, wenn sie für Crelles Journal bestimmt wäre, als wenn sie unveröffentlicht bleiben sollte.

Schliesslich bin ich weder nach dem Kaukasus noch nach Oslo gefahren: hauptsächlich deshalb, weil ich ruhig an einem Mémorial–Buch über Gruppentheorie arbeiten wollte, das schon längst hätte fertig sein sollen. Es werden überhaupt ganz wenige aus Frankreich nach Oslo fahren. Schreiben Sie mir bitte mal gelegentlich von den zahlentheoretischen Neuigkeiten, die Sie dort erfahren werden!

Mit herzlichen Grüssen

Ihr sehr ergebener

A Weil

1.7 12.07.1936, Hasse an Weil

Kurz vor Abreise nach Oslo. H. wird in Oslo auch über die Arbeit Lutz berichten. Witt hat Funktionalgleichg. für L-Funktionen in Kongr.-Funktionenkörpern. H. fügt kurze Skizze bei. H. hat pn-primäre Zahlen in p-adischen Zahlkp. explizit bestimmt. Ebenfalls Skizze beiliegend. Deuring hat algebr. Theorie der Korrespondenzen nach Hurwitz. Entscheidende Idee für Riem. V. bei höherem Geschlecht. Ausführliche Darstellg. beigefügt. Es fehlt noch Verhalten der ganzen Differentiale, sowie der Norm. Die Riem. V. erfordert Analogon zur positiv-Definitheit der Periodenmatrix. Nächstes grosses Ziel des Jahrhunderts: binäre diophant. Gl. über Zahlkörpern. Deuring hat komplexe Mult. rein algebraisch.

12. Juli 1936

Lieber Herr Weil,

Ich danke Ihnen sehr herzlich für die Zusendung der beiden Korrekturabzüge, gerade noch vor meiner Abreise nach Oslo. Wenn es meine Vortragszeit gestattet, werde ich von diesen sehr schönen Neuentdeckungen in meinem Kongressvortrag erzählen.

Ich bitte ferner, dass Frl. Lütz mir ihre Arbeit für Crelles Journal einsendet. Ich will sie sehr gerne dort veröffentlichen.

Es ist sehr schade, dass Sie nicht nach Oslo kommen, und auch dass so wenige französische Mathematiker dort sein werden. Das algebraisch–arithmetische Programm ist doch sehr reichhaltig, und als einem von dieser Branche ist es mir eine Genugtuung, dass der Kongress diesem Fachgebiet so weiten Raum gibt.

Ihrer Bitte, Ihnen von zahlentheoretischen Neuigkeiten zu berichten, entspreche ich sehr gerne.

Zunächst wird es sie sicher interessieren, zu erfahren, dass Herr Witt die Funktionalgleichung der L–Funktionen in Kongruenzfunktionenkörpern nunmehr bewiesen hat, und zwar duch eine sehr hübsche Analogisierung des klassischen Beweises mit den Thetafunktionen. Ich lege Ihnen eine kurze

Skizze seines Beweises bei. Die Einzelheiten habe ich nicht aufgeschrieben, weil sie sich für jeden Kenner des klassischen Beweises und der Methodik der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen wohl von selbst ergeben.

Ferner habe ich selbst die Gruppe der p^n–primären Zahlen eines p–adischen Zahlkörpers explizit bestimmt, und zwar durch Einführung eines verallgemeinerten Potenzbegriffs und Ausnutzung der schönen Wittschen Theorie der zyklischen Erzeugungen vom Grade p^n bei Charakteristik p. Sie finden die Skizze davon auf einem zweiten beiliegenden Blatt.

Schliesslich hat Deuring die entscheidende Idee gehabt, die zur Verallgemeinerung meiner Theorie des elliptischen Falles auf beliebiges Geschlecht $g \geq 1$ führt. Sie liegt in der Algebraisierung der Theorie der Korrespondenzen zweier algebraischer Funktionenkörper, also *nicht*, wie ich immer dachte, in der Heranziehung des g–variabligen Körpers der Abelschen Funktionen.

Eine Korrespondenz eines Körpers $K|k$ zu einem Körper $K'|k$ ist nach Hurwitz eine konforme Abbildung einer endlichen Überlagerungsfläche von K auf eine endliche Überlagerungsfläche von K'. Rein–algebraisch bedeutet dies folgendes (falls die Überlagerungsflächen zusammenhängend sind):

Es liegt ein Isomorphismus vor, der K' auf einen Teilkörper $\overline{K}_0$ einer endlichen algebraischen Erweiterung $\overline{K}$ von K bezieht; dabei sei $\overline{K}$ sofort dadurch normiert, dass $\overline{K} = \overline{K}_0 K$ durch Komposition aus $\overline{K}_0$ und K entsteht, also kleinstmöglich gewählt ist.

Dieser Sachverhalt lässt sich nun für abstrakte Funktionenkörper übertragen; dabei sei k algebraisch abgeschlossen angenommen.

Um mit solchen isomorphen Abbildungen rechnen zu können, und auch schon, um sie in ihrer Gesamtheit zu übersehen, führt man den Körper $\mathbf{K} = KK'$ ein, und zwar soll hier die Komposition so verstanden sein, dass die beiden Komponenten K und K' als algebraisch unabhängig über dem Konstantenkörper k angesehen werden; $\mathbf{K}$ hat also den Transzendenzgrad 2 über k. Wir betrachten jedoch $\mathbf{K}$ wesentlich als einen algebraischen Funktionenkörper nur *einer* Unbestimmten, nämlich als $\boldsymbol{K}|K$ mit K als formalem Konstantenkörper.

Dann gibt es zwei Sorten von Primdivisoren von $\boldsymbol{K}|K$:

1.) die *konstanten* Primdivisoren P, d. h. diejenigen Homomorphismen von $\mathbf{K}|K$ auf K bei denen der Teilkörper K' einen *Homomorphismus* erfährt (der dann wegen der algebraischen Abgeschlossenheit von k auf den Körper k selbst — nicht auf eine algebraische Erweiterung von k — erfolgt); diese konstanten Primdivisoren P entsprechen umkehrbar eindeutig den Primdivisoren p' von $K'|k$, was mit $P-p'$ angedeutet sei.

2.) die *nicht–konstanten* Primdivisoren P von $\boldsymbol{K}|\mathbf{K}$, bei denen der Teilkörper K' einen *Isomorphismus* erfährt. Diese nicht–konstanten Primdivisoren P entsprechen umkehrbar eindeutig den oben formal definierten Korrespondenzen nach dem Schema:

$$\overline{K} = \text{Restklassenkörper mod. } P \text{ von } K\,;\ |\overline{K} : K| = n = \text{Grad}\, P.$$

$$\overline{K}_0 = \text{Körper der durch Elemente von } K' \text{ gelieferten Restklassen.}$$

Um nun zu einer abstrakten Fassung der *Punkt*korrespondenz der klassischen Theorie zu kommen, verfährt man folgendermassen.

Ist p ein Punkt (Primdivisor) von $K|k$ so ist p als zusammengesetzter ganzer Divisor n–ten Grades (n–gliedrige Punktgruppe) von $\overline{K}|k$ auffassbar. Man bilde dann die Norm $\mathrm{N}_P(p)$ dieses Divisors p von $\overline{K}$ nach $\overline{K}_0$; das ist wieder ein ganzer Divisor n–ten Grades, von $\overline{K}_0|k$. Davon bilde man das Urbild beim Isomorphismus $K' — \overline{K}_0$, also einen eindeutig bestimmten ganzen Divisor n–ten Grades von $K'|k$, der mit $P(p)$ bezeichnet sei.

Für den Fall, dass $K' \cong K$ ist, ist das die genaue Verallgemeinerung meiner Bildung

$$up = \mathrm{N}_u(p)u^{-1}.$$

Wir ergänzen die Definition der Punktfunktion $P(p)$ noch durch die Festsetzungen:

$$\begin{array}{lcl} P(p) & = & p',\ \text{wenn } P-p' \text{ konstant,} \\ A(a) & = & \text{Produkt der } P(p) \text{ entsprechend den Primzerlegungen} \\ & & \text{der beliebigen Divisoren } A \text{ und } a \text{ von } \boldsymbol{K}|K \text{ und } K|k\,. \end{array}$$

Die Zusammensetzung hinsichtlich A entspricht im klassischen Fall der Zulassung auch solcher konformer Abbildungen, bei denen die Überlagerungsflächen nicht zusammenhängend sind.

Wesentlich ist nun das Verhalten dieser Funktion $A(a)$ hinsichtlich der Divisoren*klassen*.

Man sieht zunächst unmittelbar aus der Definition:

$$\text{Aus } a \sim 1 \text{ folgt } A(a) \sim 1 \text{ für jedes } A$$

Es gilt aber ferner auch

$$\text{Aus } A \sim 1 \text{ folgt } A(a) \sim 1 \text{ für jedes } a\,.$$

Diese letztere Tatsache liegt ziemlich tief. Zu ihrem Beweis braucht man eine Algebraisierung dessen, was bei Hurwitz das erzeugende Ideal der Korrespondenz ist, also eine Charakterisierung der Korrespondenz durch algebraische Relationen zwischen den Punkten.

Das macht sich nun folgendermassen. Die Primdivisoren p von $K|k$ lassen sich auch als konstante Primdivisoren von $\mathbf{K}|K'$ auffassen. Als solche lassen sie sich aber dann auch so charakterisieren: Sei x' eine Transzendente aus K' und y_i' eine Basis der x'–ganzen Elemente aus K'. Dann ergibt sich die genaue Potenz, zu der p (als konstanter Primdivisor von $\boldsymbol{K}|K'$ in einem x'–ganzen Element

$$\sum_i F_i(x')y_i' \qquad (F_i \text{ Polynome über } K)$$

von $\boldsymbol{K}$ enthalten ist einfach als der grösste gemeinsame p–Teiler der Koeffizienten aller F_i (im Sinne von p als Primdivisor von $K|k$). Daher möchte ich p auch einen *Funktional*primdivisor von $\boldsymbol{K}|K$ nennen; denn er entspricht dem Teilbarkeitsverhalten der *Koeffizienten* aus dem *Konstantenkörper* K von $\boldsymbol{K}|K$. Im Falle rationaler Funktionenkörper ist das genau der Kroneckersche Funktionalbegriff. Übrigens gilt alles natürlich auch, wenn der Konstantenkörper K ein algebraischer Zahlkörper ist und p ein Primdivisor von K im Sinne der gewöhnlichen Arithmetik; so ordnen sich Ihre früheren Begriffsbildungen (distributions) diesem Schema ein.

Zu den Korrespondenzen zurückkehrend, gilt nun folgender grundlegende Satz:

Die Transzendente x' von K' sei so gewählt, dass sie P–ganz für die zu untersuchende Primkorrespondenz P ist (das ist nur im Falle eines konstanten P — p' eine Einschränkung und kann hier nötigenfalls durch Übergang zu $\frac{1}{x'}$ erreicht werden). Für den abzubildenden Punkt p von K seien endliche viele Ausnahmen ausgeschlossen, die ich nachher nenne.

Es sei nun $P_{x'}$ das Ideal der durch P teilbaren x'–ganzen Elemente aus K. Darin gehen wir für die p–ganzen Elemente zu den konstanten Resten mod. p über, die dann gewisse Elemente aus K' sind; sie entstehen aus der obigen Basisdarstellung einfach, indem man die Polynome F_i koeffizientenweise durch die Restpolynome f_i ersetzt, also jeden Koeffizienten A aus K durch seinen konstanten Rest a mod. p aus k ersetzt. Die so entstehende Elementegesamtheit aus K' sei mit $P_{x'}$ mod. p bezeichnet.

Ferner sei $P(p)_{x'}$ das Ideal der durch $P(p)$ teilbaren x'–ganzen Elemente aus K'.

Dann gilt

$$\underline{P_{x'} \text{ mod. } p \,=\, P(p)_{x'}\,.}$$

Die endlich vielen zu machenden Ausnahmen entspringen aus drei Quellen. Es ist nämlich zu fordern:

1. Die Restklasse $\overline{x}$ von x' in $\overline{K}$ ist p–ganz

2. Die Primteiler von p in $\overline{K}$ sind relativ zu K und zu $\overline{K}_0$ unverzweigt (bei Primzahlcharakteristik von den trivialen Verzweigungen abgesehen, die durch etwaige Inseparabilitäten zustandekommen).

3. Ist P_i eine p–primitiv normierte Basis des Ideals $P_{x'}$ und

   $$P_i \,=\, \sum_j P_{ij}(x')y'_j$$

   so dass also die P_{ij} p–ganze und insgesamt p–teilerfremde Polynome über K sind, so behält die Determinante

   $$|P_{ij}(x')|$$

   bei Übergang zu den p–Resten denselben Grad, d. h.

   $$|p_{ij}(x')|$$

   hat als Polynom in x' denselben Grad wie $|P_{ij}(x')|$. Dieser Grad ist natürlich einfach der Grad n von P, der gleichzeitig auch der Grad von $P(p)$ ist.

Dieser Satz gilt ferner, wenn man die Ausnahmen entsprechend erweitert, auch für zusammengesetzte Korrespondenzen A statt P. Er liefert leicht die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Tatsache:
<u>Aus $A \sim 1$ folgt $A(a) \sim 1$ für alle a.</u>

Man sieht ferner auch leicht ein:
<u>Aus $A \sim$ konstant, folgt $A(a) \sim 1$ für alle a vom Grade 0.</u>

Von den beiden unterstrichenen Tatsachen gilt schliesslich auch die Umkehrung. Um auf $A \sim 1$ bzw. $A \sim$konstant zu schliessen, genügt es sogar $A(p) \sim 1$ bzw. $A\left(\frac{p}{p_0}\right) \sim 1$ für unendlich viele p vorauszusetzen.

Alles zusammen ergibt: Jedem Divisor A von $\boldsymbol{K}|K$ entspricht eine homomorphe Abbildung der Divisorenklassengruppe nullten Grades von $K|k$ in die Divisorenklassengruppe nullten Grades von $K'|k$. Zwei Divisoren A_1 und A_2 von $\boldsymbol{K}|K$ entspricht dann und nur dann dieselbe solche Abbildung, wenn ihr Quotient einem konstanten Divisor von $\boldsymbol{K}|K$ äquivalent ist.

Man kann ferner zeigen, dass sich eine Korrespondenz von $K|k$ auf $K'|k$ mit einer von $K'|k$ auf $K''|k$ zu einer eindeutig bestimmten Korrespondenz von $K|k$ auf $K''|k$ zusammensetzen lässt, im wesentlichen durch Nacheinanderausführung.

Betrachtet man nun die Gesamtheit der Korrespondenzen von $K|k$ auf sich selbst und definiert für die zugeordneten homomorphen Abbildungen der Divisorenklassengruppe nullten Grades von $K|k$ in sich selbst die Addition durch die Produktbildung der zugrundeliegenden Divisoren A und die Multiplikation durch die besprochene Nacheinanderausführung, so ergibt sich ein *Ring*. Dieser ist die genaue Verallgemeinerung meines Meromorphismenrings.

Um von hier aus zum Beweis der Riemannschen Vermutung vorzudringen fehlt noch zweierlei:

Erstens eine Theorie des Verhaltens der Differentiale erster Gattung bei diesen Korrespondenzen.

Zweitens eine Verallgemeinerung der Theorie der Norm, die hier mit dem Körpergrad $|\overline{K} : \overline{K}_0|$ zusammenhängt.

Ich bin noch zu kurz im Besitz der Deuringschen Theorie, als dass ich schon dazu gekommen wäre, diese beiden Verallgemeinerungen durchzudenken. Jedenfalls sieht man aber schon ungefähr, dass die Riemannsche Vermutung auch in diesem allgemeinen Falle einfach auf das abstrakte Analogon der Tatsache zurückläuft, dass die bekannte hermitesche Form aus der Periodenmatrix positiv–definit ist.

Ich bin sehr gespannt auf die genaue Ausführung der Beweise zu den beiden C. R. Noten von Frl. Lütz und Ihnen. Diese Noten scheinen mir beide ausserordentlich interessant zu sein und die Richtung für weitere Untersuchungen zu weisen. Es wäre doch sehr schön, wenn allmählich nicht nur die verhältnismässig grobe Anzahlfrage, sondern auch die zahlentheoretisch viel wichtigere Frage nach der algebraischen Struktur der Lösungsgesamtheit für die allgemeine binäre Diophantische Gleichung in zwei Unbestimmten für den rationalen oder einen endlichen algebraischen Zahlkörper vollständig gelöst würde. Dies möchte ich als eines der nächsten grossen Ziele der Arithmetik dieses Jahrhunderts ansehen.

Deuring hat übrigens auch noch eine andere Anwendung seiner Theorie. Er will damit das Hilbertsche Konstruktionsproblem für die Klassenkörper algebraischer Zahlkörper durch Abelsche Funktionen allgemein lösen. Im elliptischen Falle hat er aus meinen Untersuchungen, durch Umkehrung meiner ursprünglichen Schlussrichtung, das bereits durchführen können. Er kommt sogar rein–algebraisch zum Ziel, d. h. ohne die Theorie der elliptischen Funktionen als Funktionen einer stetigen komplexen Variablen heranzuziehen, sondern lediglich unter Ausnutzung der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen. Das ist mir sehr sympathisch. Denn wenn ich auch nicht im geringsten etwas gegen die wunderschöne kontinuierliche Theorie der Abelschen Funktionen einzuwenden habe, so fordert doch mein Gewissen als Zahlentheoretiker und Algebraiker eine methodenreine Begründung rein–arithmetischer Sachverhalte, und von diesem Standpunkt aus erscheint mir die Verwendung stetig veränderlicher Variabler etwas unerwünscht.

Ich würde mich sehr freuen, bald einmal wieder von Ihnen zu hören. Mit herzlichen Grüssen

stets Ihr

H. Hasse

1.8 17.07.1936, Weil an Hasse

Grösstes Interesse. Sehr glücklicher Gedanke von Deuring. Hinweis auf die Italiener. Dort Theorie der Korrespondenzen in algebraischem Geiste. Severis Trattato. Heranziehung des Doppelkörpers seit Segre. Severi hat Ring der Korresp. definiert. Severis Polemik gegen van der Waerden. Kein Gegensatz zwischen Theorie der Korrespondenzen u. Abelschen Funkt.körpern. Kommentare zu Hasses Fragen. Nicht alle Körper Abelscher Funktionen gehöen zu algebr. Kurven. – Lutz wird W.s Resultate für Crelle verarbeiten.

3 rue Auguste–Comte,
Paris
le 17.VII.36.

Lieber Herr Hasse,

Mit dem grössten Interesse habe ich Ihren Brief und die mitgeschickten Mitteilungen gelesen. Wie Sie sich schon denken können, lag mir besonders am Herzen die Verallgemeinerung Ihrer Theorie der elliptischen Funktionenkörper; und es ist sehr schön, dass durch die Idee von Deuring nunmehr die Lösung dieses Problems in Aussicht gestellt wird. Ich möchte Ihnen deshalb einige Bemerkungen mitteilen, die mir beim ersten Lesen Ihres Briefes vorgekommen sind.

Es ist ein *sehr* glücklicher Gedanke, zur Verallgemeinerung einer algebraischen Theorie der komplexen Multiplikation die singulären Korrespondenzen heranzuziehen. Was jedoch die in Ihrem Briefe skizzierte Ausführung betrifft, so ist vielleicht aus verschiedenen (*nicht nur* historischen) die Bemerkung nicht überflüssig, dass mehrere der dazu nötigen Überlegungen schon fertig vorlagen. Nachdem nämlich Hurwitz die transzendente Theorie der Korrespondenzen auf einer algebraischen Kurve in seiner wohlbekannten Abhandlung des Jahres 1887 geliefert hatte, wurde die Theorie von den Italienern, zwar im Sinne der alten Geometrie, doch in einem durchaus algebraischen Geiste, wieder aufgenommen; wovon sich eine gute Darstellung in Severis Trattato befindet (Severi, Trattato di Geometria algebrica vol. I, Kap.VI, insbesondere §§ 60–71) sowie auch die historisch–bibliographische Skizze auf S. 240). Die Heranziehung des Körpers $\mathfrak{K} = KK'$ mit dem Transzendenzgrad 2 ist dabei (anscheinend seit Segre) ein klassisches Werkzeug; die Divisoren $\mathfrak{a}$ $\sim$ konstant in diesem Körper sind nichts anderes als die Korrespondenzen mit der Wertigkeit 0 (a valenza nulla); und der Satz, dass die notwendige und hinreichende Bedingung dazu durch "$\mathfrak{a}(\mathfrak{a}) \sim 1$ für alle $\mathfrak{a}$ vom Grade 0" gegeben sei, entspricht dem Severischen Satze, dass "eine Korrespondenz mit der Wertigkeit 0 durch eine einzige Gleichung darstellbar sei, und umgekehrt" (§ 62, S. 199). Noch bemerkenswerter ist, dass von Severi der *Ring* der Korrespondenzen auf einer Kurve unzweideutig definiert ist (§ 69, "Prodotto e somma di due corrispondenze"); und, da offensichtig die Korrespondenzen mit der Wertigkeit 0 ein Ideal in diesem Ring bilden, so entsteht ein Quotientenring, der mit dem Deuringschen Ring (und im elliptischen Falle mit Ihrem Meromorphismenring) vollkommen identisch ist. Dabei sind die „Korrespondenzen mit Wertigkeit" (a valenza) nichts anderes als die Multipla der Einheit im Ringe.*

Betrachten Sie bitte nicht diese Bemerkungen als in irgendeinem Sinne polemisch! Das überlasse ich Severi (der übrigens, in seiner hauptsächlich gegen v. d. Waerden gerichteten Polemik, nicht *ganz* in unrecht steht). Ich weiss wohl selbst, wie notwendig und auch manchmal wie schwierig es ist, die schon vorhandenen Resultate auf diesem Gebiet in die Sprache der modernen Algebra zu übersetzen. Doch halte ich für sehr wichtig, in solchen Untersuchungen die Zusammenhänge mit den älteren Theorien niemals aus dem Auge zu verlieren, und zwar nicht nur um den früheren Autoren (was doch nur billig ist) ihr gebührendes Recht zugehen zu lassen, aber hauptsächlich, um unersetzbare Richtschnüre nicht wegzuschleudern; und das wird sich auch, glaube ich, bei der weiteren Behandlung des vorliegenden Problems bestätigen. Eben die Beziehung der algebraischen (Severischen) Korrespondenztheorie mit der Hurwitzschen, führt zu einigen Bemerkungen, die ich noch hinzufügen will.

Zunächst ist Ihre Bemerkung irreführend, dass nach der Deuringschen Arbeit die Verallgemeinerung Ihrer Theorie in der Theorie der singulären Korrespondenzen "und *nicht* in der Heranziehung des Körpers der Abelschen Funktionen" zu suchen sei: besteht doch durchaus kein Gegensatz zwischen den beiden Gesichtspunkten! Hurwitz zeigt nämlich, wie das Bestehen gewisser Relationen zwischen den Perioden der Abelschen Funktionen aus dem

* Bei $g = 1$ sind die Korrespondenzen mit Wertigkeit nichts anderes als $u' = nu + a$ (oder die damit äquivalenten).

Bestehen einer singulären Korrespondenz folgt, und auch umgekehrt das letztere nach sich zieht. Danach wird sich, wie ich glaube, die erstere der von Ihnen als offen bezeichneten Fragen leicht lösen lassen, nämlich das Verhalten der Differentiale erster Gattung bei den singulären (und zunächst auch bei den nicht–singulären, d. h. mit Wertigkeit behafteten) Korrespondenzen. Es ist möglich, dass dabei ähnliche Fragestellungen vorkommen werden, wie bei meiner Note mit Chevalley in den Hamb. Abh. (Bd. 10, S. 358); ein Werkzeug, das dabei sehr gute Dienste leistet, ist der auf Matrizen verallgemeinerte Riemann–Rochsche Satz (vgl. meine Note in den Hamb. Abh., Bd. 11, S. 110: seitdem habe ich aber allgemeinere und bequemere Formulierungen desselben Satzes gefunden, namentlich für die Behandlung der Verzweigungen).

Weiter wäre noch (in Hinsicht auf Ihre zweite Frage) m. E. zu erwarten, dass die Norm im Korrespondenzenring *nur* durch Heranziehung des Körpers der Abelschen Funktionen zu definieren sei, oder (was auf dasselbe hinauskommt) durch Betrachtung der Wirkung der Transformation auf die g–Dimensionale Mannigfaltigkeit der Divisorenklassen vom Grade 0. Ich glaube also nicht, dass nach der Deuringschen Arbeit der Körper der Abelschen Funktionen aufgegeben werden soll; vielmehr wird durch Deuring eine Methode zur Untersuchung dieses Körpers gegeben (es wäre sogar denkbar, dass für $g > 1$, da die Fundamentalgruppe nicht mehr Abelsch ist, die gewöhnlichen Abelschen Funktionen nicht mehr genügen; möglicherweise wären dann meine Matrizendivisoren und höheren Abelschen Funktionen heranzuziehen). Allerdings bezieht sich diese Methode nur auf solche Abelschen Funktionen, die einer algebraischen Kurve entsprechen. Man kann also wohl daraus den Beweis der Riemannschen Vermutung für algebraische *Kurven* (mit endlichem Konstantenkörper) erwarten; es ist aber wohlbekannt, dass nicht alle Körper Abelscher Funktionen so erzeugt werden können (obwohl es wieder möglich wird, wenn man das Zerspalten zerfallender Abelscher Mannigfaltigkeiten als zulässige Operation noch hinzunimmt) : es wäre also möglich, dass diese auf *Kurven* zugeschnittene Deuringsche Methode nicht genügend allgemein wäre. Z. B. wäre es denkbar, dass für die Klassenkörperkonstruktion die Deuringsche Methode wohl für $g = 1$, nicht aber für höhere Geschlechter ausreichen würde. Einzelheiten über seine Lösung dieses Problems erwarte ich mit einiger Ungeduld.

Sonst habe ich von hier aus keine Neuigkeiten zu erzählen. Hoffentlich wird sich auf dem Kongress viel ergeben haben, wovon Sie mir einmal das interessanteste erzählen möchten. Ihrer freundlichen Aufforderung, ihre und meine Resultate für Crelles Journal zu verarbeiten, wird Frl. Lütz gerne entsprechen. Ich hoffe, dass die Arbeit bis Oktober fertig geschrieben sein wird.

Mit dem besten Dank für Ihre Mitteilungen, und den herzlichsten Grüssen

Stets Ihr

A Weil

1.9 21.12.1936, Weil an Hasse

Manuskr. Lutz fertig. Wird Deuring seine Resultate bald publizieren? W. würde gern nach Göttingen zum Koll. über algebr. Funktionen kommen, fährt aber am 6. Jan. nach Amerika. Chevalley u. W. haben Auflösung der Singuleritäten gefunden.(!) Kähler. Austausch Crelle gegen neue Reihe in Strassburg? Grüsse an van der Waerden.

Paris
le 21.XII.36.

Lieber Herr Hasse,

Verschiedene Umstände haben die endgültige Abfassung der Arbeit von Frl. Lütz sehr verzögert; eben jetzt ist sie fertig, und wird Ihnen binnen weniger Tage zugeschickt werden; hoffentlich werden Sie sie noch in Crelle aufnehmen.

Was gibt es neues bei Ihnen ? Werden die Deuringschen Resultate bald veröffentlicht ? Hoffentlich waren Sie mir nicht böse wegen des langen Briefes, den ich Ihnen darüber vor den Sommerferien schrieb. Ich hätte gern versucht, nach Göttingen zum Kolloquium über algebraische Funktionen zu fahren* (wo eben, wie es scheint, Deuring diese Resultate vortragen soll) wenn ich mich nicht eben am 6. Januar nach Amerika einschiffen müsste. Vielleicht habe ich Ihnen schon früher geschrieben, dass ich jetzt ein Semester beim Institute for Advanced Study in Princeton verbringen soll.

Vielleicht wird es Sie und die Teilnehmer des Kolloquiums interessieren, dass Chevalley und ich einen höchst einfachen Beweis für die Tatsache gefunden haben, dass jede algebraische Mannigfaltigkeit sich birational in eine singularitätenlose transformieren lässt; bisher war das nur für Flächen bekannt, und zwar durch sehr mühsame Betrachtungen. Der Beweis beruht auf der E. Cartanschen Methode der Verlängerung (vgl. Kählers Büchlein über Differentialgleichungen): von einer irreduziblen algebraischen V^p im projektiven

*Vom 6.-8.1.1937 fand in Göttingen eine von Hasse organisierte Arbeitstagung statt. Offenbar hatte Hasse eine Einladung auch an Weil geschickt.

Raum P^n nimmt man die Verlängerung, d. h. die Mannigfaltigkeit der p–dimensionalen Tangentialelemente von V^p (im Raume aller p–dimensionalen Elemente des P^n); und so weiter; nach endlich vielen Verlängerungen bekommt man dann eine singularitätenlose Mannigfaltigkeit, wie sich durch Rekursion über p ohne besondere Schwierigkeit beweisen lässt.

Ich möchte auch diese Gelegenheit benutzen, um Ihnen vom Austausch des Crelleschen Journals gegen die Veröffentlichungen unseres Instituts in Strassburg zu schreiben; vielleicht haben Sie schon den Brief von Thiry (dem Direktor des Institutes) bekommen, oder werden ihn bald bekommen. Wir beginnen eine neue Reihe, die bei Hermann erscheint (und ungefähr so wie die Herbrandsche Gedächtnisreihe aussehen wird). Eine topologische Arbeit von mir befindet sich schon im Druck; und bald nachher wird eine recht schöne Arbeit von de la Vallée Poussin über Potentialtheorie erscheinen (er hat unlängst bei uns Vorträge darüber gehalten). Wenn es irgendwie möglich ist, Crelle dagegen auszutauschen, so hoffe ich, dass Sie damit einverstanden sein werden.

Mit herzlichsten Grüssen (auch an v. d. Waerden)

Ihr sehr ergebener

A Weil

1.10 22.11.1937, Weil an Hasse

Neue Methode für Riem.Roch-Satz. Neuer Begriff des Differentials. F.K.Schmidt. Ausführliche Darstellung. Geeignet f. Crelle? W. hat geheiratet. W. hat in Princeton Schilling kennengelernt. Chevalley lässt grüssen. Hinweis auf neuen Traité d'Analyse. W. will über p-Gruppen arbeiten.

Strassburg,
den 22. November 1937.

Lieber Herr Hasse ! [1]

Bei Gelegenheit eines Vortrages im Juliaschen Seminar habe ich neuerdings eine Methode zur Begründung des Riemann–Rochschen Satzes ausgearbeitet, die sich eng an meinem Beweis des verallgemeinerten Riemann–Rochschen Satzes anschliesst. Dabei wird in neuartiger Weise ein Begriff eingeführt, der sachlich mit dem bisherigen Begriff des Differentials übereinstimmt; zu einer eingehenden Untersuchung des Zusammenhanges mit den F. K. Schmidtschen Differentiationen, sowie zu den Ergebnissen Teichmüllers bin ich aber noch nicht gekommen. Meine neue Begründung des Riemann–Rochschen Satzes sei im Folgenden kurz mitgeteilt.

Aus der schönen F. K. Schmidtschen Arbeit entnehme ich die Nr. 1-2 des § 3, sowie die Tatsache, dass zu jedem Element z aus dem Funktionenkörper K ein Divisor (z) gehört. Ich sage, z sei Multiplum eines Divisors $\mathfrak{a}$, wenn der Divisor (z) Multiplum von $\mathfrak{a}$ ist; wie üblich werden "Multiplum von $\mathfrak{a}$", "teilbar durch $\mathfrak{a}$", "$\equiv 0\,(\mathfrak{a})$" als gleichwertige Schreibweisen gebraucht. Der Grad eines Divisors $\mathfrak{a}$ werde durch $n(\mathfrak{a})$ bezeichnet. Wenn t eine zu einem Primdivisor (oder Punkte) $\mathfrak{p}$ Ortsuniformisierende bedeutet (d. h. ein Element aus K, dessen Divisor den Primdivisor $\mathfrak{p}$ genau zur ersten Potenz enthält), lässt sich jedes z aus K in einer Potenzreihe in

[1] *Das vorliegende Orginal dieses Briefes trägt eine Reihe von Änderungen, offensichtlich um den Text als Manuskript für die Publikation verwenden zu können. Diese Änderungen wurden offenbar auf Hasses Geheiss durch Witt vorgenommen (vgl. Hasses Brief vom 16.12.36). Die Änderungen sind hier nicht berücksichtigt.*

t entwickeln, deren Koeffizienten in K gelegene Vertreter des zugehörigen Restklassenkörpers sind, d. h. eines Körpers vom Relativgrade $n(\mathfrak{p})$ über dem Konstantenkörper k.

Durch $L(\mathfrak{a})$ werde die lineare Schar der z aus K bezeichnet, die $\equiv 0\,(\mathfrak{a}^{-1})$ sind; durch $\ell(\mathfrak{a})$ ihre Dimension, d. h. die Anzahl der bezüglich k linear–unabhängigen z aus K, die durch $\mathfrak{a}^{-1}$ teilbar sind.

1. Es seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zwei Divisoren; $\mathfrak{a}$ sei durch $\mathfrak{b}$ teilbar. Betrachten wir ein z aus $L(\mathfrak{a})$, und seine Reihenentwicklungen in den sämtlichen (endlich vielen) Punkten, deren Primdivisoren in $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b}$ vorkommen; die Bedingung, z sei durch $\mathfrak{b}$ teilbar, drückt sich dadurch aus, dass man gewisse endlich viele Koeffizienten aus diesen Potenzreihen zum Verschwinden bringen soll. Soll aber ein solcher Koeffizient, der in einem Restklassenkörper vom Relativgrade $n(\mathfrak{p})$ über k liegt, verschwinden, so ergibt das $n(\mathfrak{p})$ lineare Gleichungen in k. In allem hat man also $n(\mathfrak{a})-n(\mathfrak{b})$ lineare Gleichungen in k, um auszudrücken, dass ein z aus $L(\mathfrak{a})$ auch zu $L(\mathfrak{b})$ gehört. Es ist also, wenn $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ teilbar ist:

$$\ell(\mathfrak{b})-n(\mathfrak{b})\geq \ell(\mathfrak{a})-n(\mathfrak{a})\,.$$

Insbesondere ist aber $n(1) = 0$, $\ell(1) = 1$, und also, wenn $\mathfrak{a}$ ganz ist, $\ell(\mathfrak{a})\leq n(\mathfrak{a})+1$. Mit g bezeichne ich jetzt die obere Schranke von $n(\mathfrak{a})+1-\ell(\mathfrak{a})$, wenn $\mathfrak{a}$ sämtliche ganze Divisoren durchläuft; und mit $\mathfrak{g}$ einen solchen ganzen Divisor, dass eben $n(\mathfrak{g})+1-\ell(\mathfrak{g}) = g$ sei. Dann ist, wenn $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{g}$ teilbar ist:

$$\ell(\mathfrak{a}) = n(\mathfrak{a})+1-g\,.$$

Wenn jetzt $\mathfrak{b}$ beliebig ist, und $\mathfrak{a}$ ein gemeinsames Multiplum von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{g}$, ergibt die obige Ungleichung: $\ell(\mathfrak{b})\geq n(\mathfrak{b})+1-g$. Wir setzen:

$$\ell(\mathfrak{b}) = n(\mathfrak{b})+1-g+r(\mathfrak{b})\,,$$

wo also $r(\mathfrak{b})\geq 0$ ist; $r(\mathfrak{b})$ ist die Anzahl der Relationen, die zwischen den oben besprochenen $n(\mathfrak{a})-n(\mathfrak{b})$ Gleichungen bestehen.

2. Es sei $R(z) = 0$ eine solche Relation, die also für jedes z aus $L(\mathfrak{a})$ identisch zwischen endlich vielen Koeffizienten der Reihenentwicklungen von z besteht. Es sei $\mathfrak{a}'$ ein Multiplum von $\mathfrak{a}$; $R'(z)$ eine ähnlich gebildete Relation, die identisch für jedes z aus $L(\mathfrak{a}')$ bestehe. Wir sagen, $R'(z)$ sei eine Fortsetzung von $R(z)$, wenn sich für jedes z aus $L(\mathfrak{a})$ der Ausdruck

$R'(z)$ auf $R(z)$ reduziert. Jeder $R'(z)$ kann höchstens Fortsetzung eines einzigen $R(z)$ sein, denn sonst gäbe es ein $R'(z)$, der sich für jedes z aus $L(\mathfrak{a})$ auf 0 reduzieren würde, und es wäre $R'(z) = 0$ eine Relation zwischen den $n(\mathfrak{a}') - n(\mathfrak{a})$ Gleichungen, die ausdrücken, dass ein z aus $L(\mathfrak{a}')$ zu $L(\mathfrak{a})$ gehört; also wäre $\ell(\mathfrak{a}) > n(\mathfrak{a}) + 1 - g$, entgegen der Voraussetzung, dass $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{g}$ teilbar ist.

Andererseits ist die Anzahl der Relationen $R(z)$ zwischen den Koeffizienten eines z aus $L(\mathfrak{a})$, die verschwinden sollen, damit z zu $L(\mathfrak{b})$ gehre, gleich $r(\mathfrak{b}) = \ell(\mathfrak{b}) - n(\mathfrak{b}) + g - 1$ Ausdrücke $R(z)$, die nur in den Koeffizienten eines z aus $L(\mathfrak{a})$, die verschwinden sollen, damit z zu $L(\mathfrak{b})$ gehöre, gleich $r(\mathfrak{b}) = \ell(\mathfrak{b}) - n(\mathfrak{b}) + g - 1$; sie ändert sich nicht, wenn man $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{a}'$ ersetzt; sie ist also gleich der Anzahl der Relationen $R'(z)$: jeder Relation $R(z)$ entspricht genau eine Relation $R'(z)$, die sie fortsetzt.

Wir dürfen also die Relationen $R(z)$ mit den Relationen $R'(z)$ identifizieren.

Jeder Relation, die identisch zwischen endlich vielen Koeffizienten der Reihenentwicklungen jedes z aus $L(\mathfrak{g})$ besteht, ordnen wir jetzt eineindeutig ein neues Ding ω zu, das ein Differential genannt werde; die zugehörige Relation sei dann als $\oint z\omega = 0$ geschrieben. Die Fortsetzung dieser Relation, die für jedes z aus $L(\mathfrak{a})$ gilt, wenn $\mathfrak{a}$ irgendein Multiplum von $\mathfrak{g}$ bedeutet, werde ebenfalls als $\oint z\omega = 0$ geschrieben; die Gesamtheit der Glieder in $\oint z\omega$, die Koeffizienten der Entwicklung von z in Punkte $\mathfrak{p}$ enthalten, bezeichnen wir mit $\oint_{\mathfrak{p}} z\omega$.

Für jedes z aus K und jedes Differential ω besteht also die Gleichung $\oint z\omega = 0$. Insbesondere ist, wenn x und ω fest gewählt sind, für jedes z aus K, also auch für jedes z aus $L(\mathfrak{g})$, $\oint z.x\omega = 0$: durch den Ausdruck $\oint z.x\omega$ wird ein Differential definiert, das mit $x\omega$ bezeichnet sei. Mit anderen Worten lässt der Modul der Differentiale die Elemente des Körpers K als Operatoren zu.

3. Wir sagen, das Differential ω sei Multiplum von $\mathfrak{b}$, wenn für jedes z aus $L(\mathfrak{b})$ $\oint z\omega$ überhaupt keinen Entwicklungskoeffizient von z mit einem nichtverschwindenden Koeffizient enthält. Offenbar kann nach unseren Definitionen kein nichtverschwindendes Differential Multiplum von $\mathfrak{g}$ sein; also ist $r(\mathfrak{b})$ genau die[2]

[...]

[2] *Bemerkung: Hier fehlt im Original eine oder mehrere Seiten. Wir verweisen auf die veröffentlichte Fassung; siehe Crelle Bd. 179, pp.129-133, insbesondere Abschnitt* **4**.

Wenn es Ihnen scheint, dass die obigen Ausführungen für eine Veröffentlichung in Crelle geeignet sind, so stehen sie zu Ihrer Verfügung. In diesem Falle würde ich Sie aber bitten, etwaige Sprachfehler erst verbessern zu wollen!

Lange Zeit wollte ich Ihnen schon meinen besten Dank dafür aussprechen, dass Sie in so liebenswürdiger Weise die Arbeit von Frl. Lutz aufnahmen; ich nehme gern diese Gelegenheit dazu. Schon seit dem Sommer bin ich aus Amerika zurück (und, beiläufig gesagt, ich habe mich seitdem verheiratet). Der Aufenthalt in Princeton war lehrreich und angenehm; insbesondere freute ich mich, dass ich Schilling näher kennen lernte. Kennen Sie schon seine schöne Verallgemeinerung des Lürothschen Satzes ? Ich hielt eine Vorlesung über meine Verallgemeinerung der Abelschen Funktionen; eine grössere Abhandlung wird bald im Hadamardschen Jubiläumsband des Liouvilleschen Journals erscheinen. Im Mai fuhr ich von Princeton fort nach Mexico; und machte dort eine völlig unwissenschaftliche und ausserordentlich schöne Reise.

Chevalley lässt Sie grüssen. Gerne möchte ich von Ihnen hören; Nachrichten aus Deutschland sind etwas spärlich geworden, ausser in der (doch immer willkommenen) Form von Sonderabdrücken, und jede persönliche Mitteilung würde mich sehr freuen.

Von meiner Zeit wird augenblicklich viel von unserem grossen Traité d'Analyse (von dem Sie wohl wissen) beansprucht.[3] Ich will jetzt über endliche Gruppen, insbesondere Gruppen der Ordnung p^n, arbeiten, und habe einige Ansätze dazu; doch ist alles noch zu unbestimmt, um irgendwie mitteilbar zu sein.

Mit den herzlichsten Grüssen

Ihr stets ergebener

A Weil

Als Titel für meine Mitteilung, falls sie erscheinen sollte, würde ich wählen: "Zur algebraischen Theorie der algebraischen Funktionen".

[3] *Anm. d. Hrsgb: Möglicherweise handelt es sich um die ersten Ansätze von Bourbaki. Siehe Brief vom 30.11.1937.*

1.11 30.11.1937, Hasse an Weil

H. dankt für interessanten Brief und nimmt W.s Arbeit über Riem.Roch gern für Crelle an. Brauer hat Artikel für Enzyklopädie fertig. Hat darin Schillings Resultat erwähnt. H. hatte Korrespondenz mit Chevalley. H. lernt französisch. H. schreibt an Buch „Zahlentheorie“ und hofft, dass Bd.1 im nächsten Jahr erscheint. Chevalley hatte schon von dem Traité d'Analayse unter einem komischen Namen erzählt. (Bourbaki!)

30. 11. 37

Lieber Herr Weil,

haben Sie recht herzlichen Dank für Ihren sehr interessanten Brief mit dem schönen neuen Beweis des Riemann–Rochschen Satzes. Ihre Einführung der Differentiale finde ich besonders hübsch und originell. Ich werde gern von Ihrem freundlichen Anerbieten Gebrauch machen und aus Ihrem Brief eine Mitteilung für Crelles Journal zusammenstellen.

Von der schönen Entdeckung meines Schülers Schilling hatte ich schon durch den Artikel gehört, den Richard Brauer für unsere Neuauflage der Enzyklopädie geschrieben hat. Das ist wirklich ein großer Fortschritt.

Ich freue mich zu hören, daß Sie sich verheiratet haben. Herzlichen Glückwunsch!

Für die Grüße von Chevalley besten Dank. Ich bin ihm seit langem einen Brief schuldig. Wir haben seit einiger Zeit mehrere Briefe gewechselt, nicht nur aus wissenschaftlichen Gründen — im Anschluß an seine wunderschöne Neufassung der Klassenkörpertheorie auch für endliche Erweiterungen — sondern auch mit dem Ziel, mich ein wenig in die französische Sprache einzuführen. Leider sind meine Fortschritte bisher sehr unbefriedigend; so leicht es mir gefallen ist Englisch zu lernen, so große Schwierigkeiten habe ich mit Französisch.

Ich schreibe zur Zeit an meinem seit langen Jahren geplanten Buch über Zahlentheorie. Der I. Band, enthaltend eine kurze Darstellung der rationalen Zahlentheorie von höherem Standpunkt, eine ausführliche und ganz moderne Darstellung der gesamten Bewertungstheorie und deren Anwendung auf die Begründung der Arithmetik in algebraischen Zahlkörpern, unter Einschluß der Funktionenkörper in Anhängen an die einzelnen Paragraphen, liegt bis auf ein paar Paragraphen abgeschlossen vor. Ich hoffe, daß Band I im nächsten Jahre erscheinen kann.

Es würde mich sehr freuen von Ihnen einmal Näheres über den großen Traitée d'Analyse zu hören. Ist das dasselbe, von dem Chevalley im Frühjahr unter einem komischen Namen irgendwelcher Art erzählte ? Wie stark wird es werden, und wann wird es erscheinen ?

Wollen Sie von dem endgültigen Manuskript der Note für Crelle noch vor dem Druck einen Durchschlag haben, oder genügt es, wenn Ihnen die Korrekturen zugehen ?

Mit besten Grüßen

stets Ihr sehr ergebener

H. Hasse

1.12 06.12.1937, Hasse an Weil

Fragen zu W.s Brief über Differentiale, den H. zur Publikation bei Crelle bearbeitet. Frl. Lutz nach Göttingen. einladen? Schillings Beweis hat wesentliche Lücke. (Neueste Nachrichten aus Amerika.)

6. 12. 37

Lieber Herr Weil,

als ich mich vor einigen Tagen daran begeben wollte, aus Ihrem Brief eine Arbeit für Crelles Journal zu machen, tauchte gleich am Anfang die Frage auf, welche Voraussetzung Sie eigentlich über den Konstantenkörper k machen wollen. Es ist Ihnen doch wohl bekannt, daß die lokalen Potenzreihenentwicklungen im eigentlichen Sinne nur bei vollkommenem Konstantenkörper vorhanden sind. Nur in diesem Fall kann man nämlich den Restklassenkörper eines Primdivisors p stets durch einen *Teilkörper* k von K vertreten. Ist k unvollkommen und p ein Primdivisor mit inseparablem Restklassenkörper, so geht das nicht mehr. Man hat dann zwar p–adische Entwicklungen mit Koeffizienten aus einem vollen Vertretersystem des Restklassenkörpers innerhalb K, aber dies Vertretersystem läßt sich dann nicht so wählen, daß es selbst ein Körper ist. Ich übersehe nicht, ob Ihre Abzählungen der linearen Bedingungen auch gelten, wenn man solche allgemeineren Entwicklungen im Auge hat, oder ob Sie vielmehr Wert darauf legen müssen, daß es sich um gewöhnliche Potenzreihen handelt.

Auch ist mir nicht klar, wieso der Begriff des Differentials als solcher auf den separablen Fall beschränkt sein soll. Er ist doch ganz allgemein erklärt, und zwar gilt hinsichtlich der Separabilität folgender Satz: Das Differential $\mathrm{d}x$ eines Elementes x aus K ist dann und nur dann von 0 verschieden, wenn x ein separierendes Element von K ist, d. h. wenn K über $k(x)$ separabel ist. Ich schreibe das deshalb, weil Sie in Ihrem einleitenden Absatz implizieren, der *Begriff* des Differentials sei an die Separabilität gebunden.

Was macht Frl. Lutz jetzt ? Ist sie wohl noch in Straßburg ? Kann sie vortragen, dann könnten wir sie doch unter Umständen einmal nach Göttingen einladen.

Da Sie von dem Schillingschen Ergebnis zum Lürothschen Satz schrieben, möchte ich Ihnen doch mitteilen, daß die neusten Nachrichten aus Amerika besagen, daß Schillings Beweis eine wesentliche Lücke besitzt. Es ist mir noch nicht sicher, ob sich diese Lücke beheben läßt.

Ich warte dann also mit der Fertigstellung der Crelle–Note, bis ich Ihre Antwort auf diesen und meinen letzten Brief habe.

Herzliche Grüße

Ihr

H. Hasse

1.13 16.12.1937, Hasse an Weil

Dank für Erläuterungen zum Crelle-Ms. H. hat die Redaktion an Witt gegeben. Dank für Anerbieten einer französischen Auflage der Zahlentheorie.

16. 12. 37

LIEBER HERR WEIL,

besten Dank für Ihren Brief mit den Erläuterungen. Da ich selbst alle meine Zeit für mein Buch brauche, habe ich Herrn Witt, der ja ein ausgezeichneter Sachkenner ist, mit der Redaktion Ihrer Note befaßt. Ich werde Ihnen einen Durchschlag von dem endgültigen Manuskript zuschicken.

Vielen Dank für Ihr liebenswürdiges Anerbieten, für eine französische Ausgabe meines Buches zu sorgen. Ich bin grundsätzlich damit gern einverstanden, muß mich aber dem Wunsch meines Verlegers Springer fügen, daß diese französische Ausgabe nicht gleichzeitig mit der deutschen erscheint sondern frühestens 1 1/2 Jahr später. Ich übersehe natürlich nicht, ob Sie mit dieser Nebenbedingung überhaupt den Plan durchsetzen können. Jedenfalls hat ja dann die Sache noch etwas Zeit.

Mit herzlichen Grüßen

Ihr

H. HASSE

1.14 19.02.1938, Weil an Hasse

W. hat an Witt geschrieben und damit die Fragen von H. beantwortet. W. bittet H., einen Empfehlungsbrief für ihn an Joliot in Paris zu schreiben (Collège de France.). Geplanter Besuch von H. in Paris. W. lädt H. nach Strassburg ein. W.s Arbeit über Verallg. abelscher Funktionen.

4 rue Sleidan,
Strasbourg,
le 19. II. 38.

Lieber Herr Hasse!

Herr Witt wird wohl die neue Fassung meines Briefes an Sie bekommen haben. Damit ist, glaube ich, die Sache völlig in Ordnung.

Sie werden wohl schon den Brief von Joliot erhalten haben. Er wollte eine sachkundige Meinung über meine zahlentheoretischen Arbeiten haben, da ich mich um Hadamards Nachfolgerschaft im Collège de France bewerben wollte, und ich gab ihm Ihren Namen, sowie auch Siegels. Doch ist das ziemlich sinnlos geworden; die Wahl hängt nämlich hauptsächlich von Lebesgue ab, da er als einziger Mathematiker im Collège de France bleibt; noch vor einiger Zeit schien er mir ziemlich günstig, doch liess er mich heute wissen, dass er endgültig für Mandelbrojt Partei genommen hat, und zwar in solcher Weise, dass für mich nichts übrig bleibt, als mich zurückzuziehen.

Doch würden Sie mir einen Dienst leisten, wenn Sie Joliot trotzdem ganz kurz beantworteten; dabei möchten Sie erwähnen, dass Sie deshalb keine ausführlichere Antwort geben, weil Sie von mir hören, dass ich mich zurückziehe, und ausserdem, weil Sie bald nach Paris kommen werden und persönlich Ihre Meinung mitteilen werden.

Dass Sie bald nach Paris kommen, würde mich besonders dann freuen, wenn ich gewiss wäre, dass ich Sie dort treffen werden kann. Lassen Sie mich bitte also im voraus wissen, wenn Sie kommen; denn ich fahre nicht mehr sooft nach Paris wie früher. Es wäre für Sie wohl kaum ein Umweg, wenn Sie entweder auf der Hinreise oder auf der Zurückfahrt Strassburg besuchen wollten; ich hoffe sehr, Sie werden sich dazu überreden lassen; was sagen Sie dazu ?

Meine Arbeit über die Verallgemeinerung der Abelschen Funktionen kommt in der nächsten Woche heraus; ich werde sie Ihnen gleich schicken. Inzwischen schicke ich Ihnen schon die "Notice", die ich nach hiesigem Gebrauch drucken lassen musste; mit der in ihr enthaltenen Bibliographie meiner Arbeiten wird sie Ihnen die Antwort an Joliot erleichtern. Es wäre am besten, wenn Sie Joliot vor dem 15. ten März schreiben könnten.

Mit bestem Dank, und herzlichen Grüssen

Ihr ergebener

A Weil

1.15 24.02.1938, Hasse an Weil

Vorläufig Reise nach Paris aufgeschoben wg. Sprachschwierigkeiten von H. Wenn H. später nach Paris fährt, dann mit Vergnügen über Strassburg. H. bemüht sich noch immer, den Beweis für Riem.V. bei höherem Geschl. zu finden. Im Wintersemester hatte H. ein Seminar darüber. Deurings Arbeit bietet Grundlage.

24. 2. 38

Lieber Herr Weil,

besten Dank für Ihren freundlichen Brief. Ich habe bisher keinen Brief von Joliot erhalten. Sollte ich einen solchen noch bekommen, so bin ich natürlich gern bereit, mich in dem von Ihnen gewünschten Sinn über Sie zu äußern.

Vorläufig ist von einer Reise nach Paris für mich noch nicht die Rede. Von mir aus gesehen ist es auch noch nicht so weit, da meine Anstrengungen die französische Sprache zu erlernen, bisher noch nicht von Erfolg gekrönt sind. Wenn es dazu kommt, werde ich mit dem größten Vergnügen über das von mir sehr geliebte Straßburg fahren und Sie dort besuchen.

Herzlichen Dank auch für die Zusendung Ihrer Schrift über Arithmetik und Geometrie auf algebraischen Mannigfaltigkeiten und der Notice.

Von Witt habe ich bisher über Ihre Antwort noch nichts gehört. Das liegt aber wohl nur daran, daß ich Witt seit 14 Tagen nicht gesehen habe.

Ich bemühe mich noch immer, den Beweis für die Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern von höherem Geschlecht zu führen. Ein Seminar über diesen Gegenstand in diesem Winter hat mich zwar ein gutes Stück weitergebracht, aber es fehlt noch immer eine entscheidende Idee. Jedenfalls ist durch die Deuringsche Arbeit über Korrespondenzen die ganze Sache in das Stadium der Angreifbarkeit gerückt.

Mit herzlichen Grüßen

Ihr sehr ergebener

H. Hasse

1.16 10.05.1938, Hasse an Weil

H. bittet um Übersetzung math. Fachausdrücke für die Enzyklopädie, denn Weil sei ein Sprachgenie. Im Seminar Versuch, W.s Satz über Endlichkeit des Ranges bei höherem Geschlecht rein algebr. zu beweisen. Zerlegungsgesetz des Körpers der abelschen Funktionen im n-Teilungskörper. Verallg. der Klassenkörpertheorie. H. hat Einladg. nach Paris. Wird erst im kommenden Frühjahr fahren (Julia). Und dann auch Strassburg besuchen.

10. Mai 1938.

Lieber Herr Weil,

zunächst komme ich mit einer grossen Bitte zu Ihnen, welche die Neuauflage des Algebra–Buches unserer Enzyklopädie betrifft. Wir wollen dabei die hauptsächlichsten Fachausdrücke ins Französische, Englische und Italienische übersetzen. Bei den meisten Artikeln haben die Verfasser selbst dies an Hand der Literatur getan. Dagegen schreibt mir Herr Baer, dass er lediglich die englischen Übersetzungen angeben könnte, weil er sich für die französischen und italienischen nicht kompetent fühle. Nun weiss ich, dass Sie ein Sprachgenie sind und auch die moderne Algebra weitgehend beherrschen. Daher wage ich es, Ihnen die beiliegende Liste aus dem Baerschen Aufsatz zuzusenden mit der Bitte, die Übersetzungen ins Französische und Italienische, soweit Sie Ihnen geläufig sind, dahinter zu schreiben. In meinem Seminar beschäftigen wir uns augenblicklich mit Ihren Arbeiten über die Arithmetik auf algebraischen Kurven. Wir versuchen, Ihren Satz über die Endlichkeit des Ranges in rationaler Lösungsanzahl bei Geschlecht ≥ 1 auf rein algebraische Art zu beweisen. Dabei leistet uns die Deuringsche Korrespondenztheorie sehr gute Dienste. Amüsant ist auch die Verallgemeinerung des Gesetzes, das Sie auf Seite 6 unten und 7 oben Ihrer Arbeit:

Bull sc. math. 54 1930

aussprechen. Es zeigt sich, dass ein ganz entsprechendes Gesetz für die Zerlegung der Zahlen des Körpers der Abelschen Funktionen im n–Teilungskörper gilt. Dies Zerlegungsgesetz ist aber nichts anderes als die Verallgemeinerung der Klassenkörpertheorie von algebraischen Funktionenkörpern mit nichtalgebraisch abgeschlossenem konstanten Körper. Die Zerlegung wird dabei nicht nur — wie bei Zahlkörpern — durch den Grad der Primteiler beschrieben, sondern durch den Restklassenkörper selbst und noch genauer durch eine bestimmte Kummersche Erzeugung dieses Restklassenkörpers, und es zerfallen immer genau alle Zahlen einer festen Klasse des Grundkörpers in diesem Sinne in gleicher Weise in n–Teilungskörper. Ich hoffe, Sie verstehen, was ich damit meine. Ich habe inzwischen eine Einladung nach Paris erhalten, werde aber nach Verabredung mit Julia erst im nächsten Frühjahr (etwa im Mai) dorthin fahren. Ich will dann gerne auf dem Hin– oder Rückwege auch durch Strassburg kommen.

Mit herzlichsten Grüssen

stets Ihr

H. Hasse

1.17 15.12.1938, Weil an Hasse

W. hat die Liste math. Fachausdrücke vergessen. Braucht H. sie noch? Aufregung im September (Münchner Abkommen?). W. beschäftigt sich mit p-Gruppen. Fragen über Mathematik in Göttingen. Grüsse auch an Courant und Siegel.

Université de
Strasbourg,
le 15. XII. 38.

Lieber Herr Hasse,

Eben jetzt bin ich zufällig zu meiner grossen Beschämung daran erinnert worden, dass Sie mir im Frühjahr eine Liste algebraischer Fachausdrücke zur Übersetzung ins Französische und Italienische schickten, die ich inzwischen total vergessen hatte, wozu ich keine Entschuldigung zu finden vermag. Brauchen Sie die Übersetzungen noch jetzt ? Inzwischen haben Sie sich wohl einen zuverlässigeren Dolmetscher gefunden (ausserdem kenne ich keine italienischen Ausdrücke zu vielen von den angeführten Begriffen); wenn nicht, so werde ich Ihnen Ihre Liste samt Übersetzungen gleich schicken.

Nach der Aufregung in September hat man hier langsam einen quasi–normalen Zustand wieder erreicht. Ich beschäftige mich u. a. mit p–Gruppen, und habe gefunden, dass jede solche Gruppe Faktorgruppe einer nilpotenten Lieschen Gruppe über dem p–adischen Körper nach einer abgeschlossenen Untergruppe ist; das folgt nämlich ziemlich leicht aus dem Satz von G. Birkhoff–Magnus–Witt über die Darstellung freier Liescher Ringe. Ich hoffe, mit den Hilfsmitteln der Lieschen Gruppentheorie die Theorie der p–Gruppen weiterzubringen. Sonst gibt es hier kaum nennenswerte mathematische Neuigkeiten.

Was gibt es in Göttingen ? Wann kommt Ihre grosse Zahlentheorie heraus ? Sind Sie mit der Algebraisierung meiner Thèse durchgekommen ? Ist es wahr, dass Sie beim Problem der Klassenkörpererzeugung Fortschritte gemacht oder gar das Problem gelöst haben ?

Mit herzlichsten Grüssen, auch an C. u. S.

Ihr sehr ergebener

A Weil

1.18 06.01.1939, Hasse an Weil

H. wünscht Übersetzungen math. Fachausdrücke immer noch. Zahlentheorie-Buch (1. Band) ist fertig. Aber Verleger macht Schwierigkeiten wg. Umfangs. Im Seminar Arbeiten von W. und von Siegel. Klassenkörpererzeugung macht Deuring. Die Teilungskörper der Abelschen Funktionen liefern keineswegs alle Klassenkörper, sondern nur solche von bestimmtenm Typus. (CM-Körper!) H. wird in der 2.Hälfte Mai nach Paris reisen und auf der Rückreise durch Strassburg.

6. 1. 1939.

Lieber Herr Weil!

Herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief aus Strassburg. Es ist sehr nett, dass Sie sich noch meiner Anfrage über die Fachausdrücke für die Enzyklopädie erinnern. Ich wäre Ihnen sehr dankbar, wenn Sie mir die Liste sammt den für Sie möglichen Übersetzungen zurückschickten.

Ihre Untersuchungen über die p–Gruppen scheinen mir sehr interessant zu sein. Hoffentlich kommen Sie damit zu dem gewünschten Abschluss.

Der erste [Band] meiner Zahlen–Theorie liegt im Manuskript fertig vor. Er sollte im Mai dieses Jahres erscheinen. Nun hat aber der Verleger Schwierigkeiten gemacht, weil ich den Umfang sehr überschritten habe. Da ich mich geweigert habe, die in meinen Augen besten Stücke aus dem Manuskript zu entfernen, wie man es von mir verlangt hat, hat der Verlag die Angelegenheit auf die lange Bank geschoben. Ich weiss also gar nicht, ob und wann das Buch erscheinen wird.

In unserem Seminar sind wir noch immer mitten in der Arbeit, Ihre Thesis und die Grosse Siegelsche Arbeit zu algebraisieren. Für Ihre Thesis sehe ich schon ganz klar, wie das laufen wird. Wir haben aber auf Siegels Wunsch zunächst seine Arbeit vorgenommen, und da stellen für höheres Geschlecht zunächst noch Schwierigkeiten ein.

In dem Problem der Klassenkörpererzeugung hat Deuring (nicht ich) Fortschritte gemacht. Er wird darüber Ende Februar in Hamburg vortragen. Soviel ich weiss, hat sich herausgestellt, dass die Teilungskörper der Abelschen

Funktionen keineswegs alle Klassenkörper liefern, sondern nur solche von bestimmtem Typus, wie das schon in den Untersuchungen von Hecke für Geschlecht 2 hervortritt.

Ich werde nun in der 2. Hälfte des Mai dieses Jahres der Einladung nach Paris Folge leisten, vielleicht unter Zuhilfenahme meines Autos. Auf alle Fälle werde ich auf der Rückreise Strassburg berühren. Ich bin auch gern bereit, einen Abstecher nach Clairmont–Ferrand zu machen für den Fall, dass Sie dann dort sind.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr sehr ergebener

H. Hasse

1.19 20.01.1939, Weil an Hasse

W. ist empört über Zurückweisg. von H.s Zahlentheorie-Buch. Angebot, das Buch bei Hermann herauszubringen. W. ist bereit, sein mögliches zu tun. Pisot geht im SS nach Göttingen. Die Zahlentheoretiker in Paris werden im Mai durch einen bösen Zufall alle verreist sein. W. wird in England sein, hat ein Stipendium für Reise nach England u. Skandinavien. W.s Hoffnung, eine Professur in Clermont-Ferrand oder Poitiers zu erhalten, ist gescheitert. W. bittet H., sich in Paris bei den hohen Herrn für einen Lehrstuhl für Zahlentheorie einzusetzen. W. hat Funkt.gleichg. für L-Funktionen von Funkt.körpern mit beliebigen Charakteren. Man braucht eine Vertiefg. von Riem.Roch. Suche nach Verallg. der Klassenkp.theorie auf den Galoisschen Fall.

Université de
Strasbourg,
le 20. I. 38.*

Lieber Herr Hasse,

Hiermit schicke ich Ihnen die leider unvollständige Liste algebraischer Fachausdrücke.

Dass das Erscheinen Ihrer grossen Zahlentheorie in eine unbestimmte Zukunft verlegt wird, hat mich aufs höchste empört. Wollen Sie nicht unter diesen Umständen zu unseren früheren Übersetzungsplänen zurückkommen ? Andererseits gäbe es vielleicht eine Möglichkeit bei Hermann, das Buch hier auf deutsch erscheinen zu lassen; dafür müsste es, dem allgemeinen Plan der Actualités scientifiques gemäss, in kleinere Abschnitte von je 100 oder 120 Seiten zerschnitten werden; das wäre an sich kein ernster Einwand; doch würden Sie es gern im Ausland erscheinen lassen ? Ich bin jedenfalls bereit, mein mögliches in dieser Hinsicht zu tun. Übrigens wird Pisot das Sommersemester in Göttingen verbringen; er hat unlängst seine These über diophantische Approximationen veröffentlicht, und ist jetzt in Holland bei van der

*Offenbar hatte Weil diesen Brief falsch datiert; der Inhalt zeigt, dass der 20. I. 39 gemeint ist.

Corput; er ist es, an den ich für die Übersetzung Ihres Buches gedacht hatte, und Sie werden die Frage mit ihm besprechen können, wenn sie früher nicht entschieden ist. Er will bei Ihnen und Siegel seine zahlentheoretischen Kenntnisse vervollständigen; als geborener Elsässer spricht er deutsch ebensogut wie französisch; er ist klug und nett; ausserdem ist er Mitglied von Bourbaki geworden; ich hoffe, dass sein Zusammenwirken mit Ihnen und Siegel recht fruchtbar sein wird.

Es ist übrigens schade, dass Sie erst in diesem Jahr der Einladung nach Paris folge leisten können; denn im vorigen Jahr wären alle unsere Zahlentheoretiker dabei gewesen, die durch einen bösen Zufall im Mai verreist sein werden (wenn nicht etwa Chevalley schon aus Amerika zurück sein sollte, was allerdings möglich ist). Pisot, wie gesagt, wird in Göttingen sein; Chabauty in Manchester, bei Mordell; und ich selbst in Cambridge, da ich eben vom Conseil de la Recherche ein Stipendium zu einer Studienreise nach England und Skandinavien bekommen habe. Ich brauche nicht zu sagen, wie sehr ich bedaure, diese Gelegenheit, um Sie nach so langer Zeit wieder zu sehen, verpassen zu müssen. Es ist sehr nett von Ihnen, dass Sie sogar bereit waren, nach Clermont–Ferrand zu fahren. Allerdings bin ich nicht zur geplanten Übersiedlung nach Clermont gekommen; auch ein Versuch, eine ordentliche Professur in Poitiers zu bekommen, scheint wenige Chancen zu haben, doch wird die Sache erst im nächsten Monat entschieden. In Frankreich haben die Berufungen mit den wissenschaftlichen Leistungen nur sehr wenig zu tun, so dass ich mich noch einige Zeit gedulden muss.

Vielleicht können Sie aber die Gelegenheit Ihrer Reise nach Paris benutzen, um mir und der Zahlentheorie einen grossen Dienst zu erweisen. Einige von den Herren an der Sorbonne scheinen allmählich zu verstehen, dass es für die Sorbonne eine Schande ist, keinen Lehrstuhl für Zahlentheorie zu besitzen. Schon vor dem Krieg soll man Pläne gefasst haben, um diese Lücke zu füllen, doch war natürlich damals kein Zahlentheoretiker vorhanden. Jetzt fängt aber ein Gerücht an, sich zu verbreiten, dass sich in dieser Hinsicht die Lage etwas verändert hat. Sie können also, den hohen Herren der Sorbonne gegenüber, offen Ihrem Befremden darüber Ausdruck geben, dass die Zahlentheorie in den Vorlesungen der französischen Universitäten überhaupt nicht vertreten wird. Cartan wird jedenfalls mit Ihnen ganz einverstanden sein; ich bin mit ihm sehr befreundet; er ist leider zu bescheiden, um aktiv in eine solche Frage einzugreifen. Mit Julia haben wir uns verkracht, doch kann er nicht sehr wohl gegen uns in dieser Frage sein. Wichtig wäre es, Borel zu gewinnen. Wichtig wäre es auch, mit dem Dekan (Maurain) und dem

Rektor (Roussy) darüber zu sprechen; dem Dekan jedenfalls werden Sie vermutlich einen Höflichkeitsbesuch abzustatten haben, und es ist auch möglich, dass Sie den Rektor sehen werden. Sie sollten auch versuchen, mit Montel die Angelegenheit zu besprechen. Jedenfalls können Sie mit Cartan und mit Mandelbrojt (der ein guter Freund von mir ist, und inzwischen, wie Sie wissen, Hadamards Nachfolger im Collège de France geworden ist) eben so offen darüber sprechen, wie mit mir selbst; beide werden Ihnen sagen, wie Sie am besten unserem Zweck dienstlich sein können.

Ich habe seit kurzer Zeit meine Untersuchungen über p–Gruppen unterbrochen, um früher gefasste Gedanken über die Analogie zwischen Zahlen– und Funktionenkörper fortzusetzen. Ein erster Erfolg war, dass ich die Funktionalgleichung für die mit beliebigen Charakteren gebildeten Zetafunktionen in Funktionenkörpern mit endlichem Konstantenkörper bewies. Wenn es sich bloss um Charaktere mod. 1 handelt, ist der Beweis vom F. K. Schmidtschen für die gewöhnliche Zetafunktion nicht verschieden, da man bloss den gewöhnlichen Riemann–Rochschen Satz benutzt; für die Charaktere, die mit einem beliebigen Führer gebildet sind, braucht man dagegen eine gewisse Vertiefung des Riemann–Rochschen Satzes, die auch an sich von Interesse ist. Wenn ich nicht fürchten müsste, dass es Ihnen ungelegen sein könnte, hätte ich Ihnen eine Note darüber für die Göttinger Nachrichten geschickt. Weiter glaube ich damit einen Ansatz gewonnen zu haben, um den in meiner Liouvilleschen Arbeit bewiesenen verallgemeinerten Riemann–Rochschen Satz ins Arithmetische übersetzen zu können, und damit einen Ausdruck für die Artinschen nicht–abelschen L–Funktionen zu gewinnen, der auf den Oberkörper keinen Bezug hätte; das wäre offenbar die lang gesuchte Verallgemeinerung der Klassenkörpertheorie auf den allgemeinen Galoisschen Fall. Ich hoffe Ihnen etwas später näheres darüber mitteilen zu können.

Mit herzlichsten Grüssen

Ihr ergebener

A Weil

1.20 04.02.1939, Hasse an Weil

H. will sein Buch in Deutschland erscheinen lassen. H. kann die Einladg. nach Paris nicht noch einmal verschieben. H. erinnert W., dass er ihn bereits früher über Witts unveröffentl. Beweis der Funkt.gleichg. für L-Funktionen informiert habe. Die Verallg. von Riem.Roch auf Strahlklassen hat Schüler von Artin erledigt. (Weissinger) Auch Davenport hat Beweis auf rechnerische Art gegeben. H. arbeitet immer noch an der Algebraisierg. von W.s Thèse. Distrubutionen bei höherer Dimension unnötig. H. hofft, bald genauere Ergebnisse mitteilen zu können.

4. 2. 1939.

Lieber Herr Weil!

Haben Sie herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief und für die Zusendung der Liste algebraischer Fachausdrücke. Es ist sehr freundlich, dass Sie solch ein grosses Interesse an dem Schicksal meines Buchmanuskriptes zeigen. Sie werden allerdings verstehen, dass ich das Buch wenn überhaupt, dann lieber in Deutschland erscheinen lassen möchte. Der Verlag Springer hat inzwischen erklärt, dass er von dem Vertrag zurücktreten wolle, weil ich seinen Kürzungswünschen nicht nachkommen kann. Ich warte vorläufig ab, ob sich eine Gelegenheit zum Erscheinen des Buches in Deutschland finden wird.

Es freut mich sehr, zu hören, dass Pisot im nächsten Sommer nach Göttingen kommen wird. Er ist uns allen hier herzlich willkommen. Sehr schade finde ich es, dass Sie im Mai nicht in Paris sein werden, und dass auch andere junge Zahlentheoretiker dann nicht dort sein werden. Ich glaube aber, ich kann die Einladung der Faculté des Sciences nicht gut noch einmal verschieben. Mit Chevalley hatte ich im letzten Herbst verabredet, dass er Ende Mai wieder in Paris sein wollte. Für Sie freue ich mich, dass Sie das Stipendium in Skandinavien bekommen haben, bedaure allerdings, dass Ihnen die Stelle in Clermont entgangen ist. Hoffentlich bekommen Sie nun bald eine Professur irgendwo anders.

Wenn ich Gelegenheit dazu habe, werde ich gern bei den hohen Herren der Sorbonne für die Zahlentheorie eintreten. Natürlich kann das von mir als Ausländer nur in Form einer gelegentlichen Bemerkung geschehen, hat aber vielleicht in dieser Form gerade grösseres Gewicht, weil ich ja als Ausländer an sich an innerfranzösischen Personalfragen nicht interessiert bin.

Es freut mich sehr, dass Sie auf Ihre früheren Arbeiten über Zahlen– und Funktionenkörper zurückkommen. Der Beweis der Funktionalgleichung für beliebige Charaktere ist allerdings schon bekannt, wenn auch nicht veröffentlicht. Witt hat ihn durch eine sehr elegante und formale Analogisierung der Thetafunktionen geführt. Ich besitze einige Aufzeichnungen darüber, kann aber im Moment nicht daran kommen, weil ich mit einer Muskelverletzung auf 3 Wochen im Haus still liegen muss. Die Verallgemeinerung des Riemann–Rochschen Satzes auf Strahlklassen hat auch in etwas anderer Weise ein Schüler von Artin gegeben in einem der letzten Bände der Hamburger Nachrichten. Ich glaube der Name dieses Schülers ist Weiss. Schliesslich hat auch Davenport auf mehr rechnerische Art das Bestehen der Funktionalgleichung bewiesen. Leider ist auch diese Rechnung nicht veröffentlicht. Durchaus neu dagegen scheint mir Ihr Ansatz zu sein, mit dem Sie eine Darstellung der Nicht–Abelschen L–Funktionen geben können, die auf den Erweiterungskörper keinen Bezug hat. Wenn Sie mir darüber gelegentlich etwas genaueres schreiben könnten, wäre ich Ihnen sehr dankbar.

Ich benutze die Musse, um weiter an der Algebraisierung Ihrer Thesis zu arbeiten. Ich glaube wirklich, dass man ohne die — verzeihen Sie, bitte — recht undurchsichtige Theorie der Distributionen in algebraischen Mannigfaltigkeiten höherer Dimensionen auskommt. Die Divisoren der Jakobischen Mannigfaltigkeit, die man wirklich braucht, sind doch immer in trivialer Weise aus Divisoren des betrachteten Funktionenkörpers zusammengesetzt, und es genügt dann, die Distributionen einer Variablen zu beherrschen. Man muss dabei immer nur die letzte symmetrische Grundfunktion für die Bildung einer Erzeugung des Teilungskörpers und der Koordinaten der Punktgruppen benutzen. Hoffentlich kann ich Ihnen bald genauere Ergebnisse melden.

Mit freundlichen Grüssen!

Ihr sehr ergebener

H. Hasse

1.21 09.02.1939, Weil an Hasse

W.s Überlegungen zur Funkt.gleichg. stimmen genau mit Weissingers überein. Bitte um Witts Beweis der Funkt.gleichg. Die L-Reihen vom Grad 1 und Funkt.gleichg. ergeben Riem. Vermutg. Hinweis auf Davenport-Hasses Arbeit. Vielleicht neuer Ansatz zum Beweis Riem. Vermutg: sämtliche Linearfaktoren der Zetafkt. könnten als nichtabelsche L-Reihen im Artinschen Sinne betrachtet werden. Wenn dies gelingt, wird W. Nachricht geben.

Université de
Strasbourg,
le 9. II. 39.

Lieber Herr Hasse,

Besten Dank für Ihren Brief, und insbesondere für den Hinweis auf die Arbeit Weissingers in den Hamburger Abh. Meine Verallgemeinerung des Riemann–Rochschen Satzes, und der daraus entspringende Beweis der Funktionalgleichung der L–Reihen, stimmen in der Tat genau mit Weissingers Resultaten überein. Ich wäre Ihnen dankbar, wenn Sie mir gelegentlich näheres über den Wittschen Beweis der Funktionalgleichung mitteilen könnten. Eine Bemerkung noch, die Ihnen wahrscheinlich schon bekannt ist: aus der Funktionalgleichung ergibt sich die Riemannsche Vermutung für sämtliche L–Reihen, die vom 1.ten Grade sind, also auch schon für diejenigen Zetafunktionen in Funktionenkörpern, die in (abelschen) L–Reihen 1.ten Grades zerfallen; wenn ich mich nicht irre, sind das genau diejenigen Zetafunktionen, für welche Sie in Ihrer mit Davenport gemeinsam geschriebenen Arbeit die Riemannsche Vermutung bewiesen haben, und das ist wohl der eigentliche Grund dafür, dass der Beweis gelingt. Ich vermute aber, dass sämtliche Linearfaktoren der Zetafunktionen in Funktionenkörpern als nicht–abelsche L–Reihen im Artinschen Sinne betrachtet werden können; daraus würde sich der allgemeine Beweis der Riemannschen Vermutung in Funktionenkörpern ergeben.

Allerdings bin ich noch nicht so weit, dass ich die nicht–abelschen L–Reihen im Grundkörper darstellen kann; es hängt alles von der Weiterführung meiner Liouvilleschen Arbeit ab. Wenn es mir gelingt, die in Angriff genommene Frage zu lösen, werde ich Ihnen gewiss davon schreiben.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

A Weil

1.22 24.02.1939, Weil an Hasse

W. hat H.s Brief vom 12.6.35 mit Witts Beweis der Fugl. gefunden. W. möchte über Algebraisierung seiner Thèse durch H. informiert werden. Beziehungen zwischen Divisoren und Distributionen. Hat H. daran gedacht, ob mehrdimensionale algebr. Mannigf. über endl. Konstantenkörpern Zetafunktn. besitzen?

Université de
Strasbourg
le 24. ii. 39.

Lieber Herr Hasse,

Mit grosser Beschämung habe ich gefunden, dass Sie mir schon in einem Brief vom 12. VI. 1936 die wesentlichen Züge des Wittschen Beweises für die Funktionalgleichung der L–Reihen in Funktionenkörpern mitgeteilt hatten. Sie sollen sich also bitte nicht die Mühe geben, mir darüber wiederum zu schreiben, obwohl ich Sie in meinem vorigen Brief überflüssigerweise damit belästigen wollte.

Mit meinem Ansatz zur Darstellung der nicht–abelschen L–Reihen im Grundkörper komme ich langsam vorwärts; doch bin ich noch nicht so weit, dass ich Ihnen etwas davon mitteilen konnte.

Ich bin recht neugierig, mehr über Ihre Algebraisierung meiner Thèse zu hören, sobald Sie einen befriedigenden Abschluss damit erreichen werden. Ich habe es ja auch manchmal als einen Schönheitsfehler empfunden, dass ich die mehrdimensionalen Distributions heranziehen musste. Allerdings sind diese Distributions m. E. nur insofern undurchsichtig, als sie an der Undurchsichtigkeit der Divisorentheorie auf höher–dimensionalen Mannigfaltigkeiten ihren Anteil haben (die Beziehungen zwischen Distributions und Divisoren glaube ich in meiner Schrift zum Andenken Herbrands gänzlich klargelegt zu haben).

Haben Sie je daran gedacht, ob auch die mehrdimensionalen algebraischen Mannigfaltigkeiten über einem endlichen Konstantenkörper Zetafunktionen besitzen ?

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

A WEIL

1.23 07.03.1939, Hasse an Weil

H. sendet Ausarbeitg. von Witts Beweis der Fugl. mit Bitte um Rücksendg. H.s (auch Siegels) Kritik an W.s Thèse. H. hat nicht an Zetafkt. mehrdim. algebr. Mann. gedacht, aber Zetafkt. eindim. Mann. über Zahlkörpern. Hinweis auf Hecke u. Petersson. H. hat Schüler Humbert an die Aufgabe gesetzt, im ellipt. Falle Beziehungen zw. Heckes und Hasses Ansatz zu untersuchen. L-Reihen 1. Grades u. Davenport-Hasse. Zusätzlich die Fälle, wo der Grad eine höhere Potenz von p ist. Hinweis auf Witt (Wittsche Vektoren). Davenport beabsichtigt eine Arbeit dazu. Vorträge H.s in Paris.

7. 3. 1939.

Lieber Herr Weil!

Als Ihr Brief vom 24. 2. eintraf, habe ich bereits angefangen, eine Ausarbeitung des Wittschen Beweises der Funktionalgleichung zu machen. Ich möchte Ihnen nun doch die jetzt fertig gewordene Ausarbeitung vorlegen, allerdings mit der Bitte um demnächstige Rücksendung. Es war mir sehr erwünscht, dass Ihre Anfrage endlich einen Anlass gab, meine damaligen sehr kursorischen Aufzeichnungen in geschlossener Form auszuarbeiten. Den Inhalt von § 1 habe ich übrigens in meinem Buch verarbeitet, indem ich von diesem Hilfssatz aus — der ja im Wesentlichen der Satz von der Existenz einer Normalbasis ist — direkt zum Riemann–Rochschen Satz vorstosse, also ohne Einführung des Wittschen Formalismus mit der Theta–Funktion.

Bei der Algebraisierung Ihrer Thesis haben wir eine wesentliche Schwierigkeit: Während Sie in der Thesis selbst die Distributionen den Idealen der höchsten Dimension umkehrbar eindeutig zuordnen, erscheinen sie in ihrer späteren Note in den Actualités als den sämtlichen Idealen zugeordnet. Die Isomorphie hinsichtlich der Produktbildung im letzteren Sinne hat aber keineswegs die Isomorphie hinsichtlich der Produktbildung im ersteren Sinne zur Folge. Ich habe übrigens bisher keinen Mathematiker gefunden, der die §§ 4 – 10 Ihrer Thesis wirklich verstanden hat, Siegel und mich selbst eingeschlossen. Der Wunsch, die darauf gestützten Sätze über rationale Punkte algebraischer Kurven in wirklich durchsichtiger Weise zu beweisen, ist also von mehr diktiert als von blossen mathematischen Prinzipien.

An Zeta–Funktionen mehrdimensionaler algebraischer Mannigfaltigkeiten über einem endlichen Körper habe ich noch niemals gedacht, wohl[1] aber an Zeta–Funktionen eindimensionaler Mannigfaltigkeiten über einem algebraischen Zahlkörper.

Allerdings würde das letztere ungefähr dasselbe sein, wie das erstere bei 2 Dimensionen. Mir scheinen die sehr eleganten Ergebnisse von Hecke und Petersson in die Richtung der letzteren Frage zu weisen. Jedenfalls habe ich meinen derzeitigen Schüler Humbert (Lausanne) an die Aufgabe gesetzt, Beziehungen zwischen den Heckeschen Ergebnissen und meiner Theorie der elliptischen Funktionenkörper zu verfolgen.

Sie haben recht: Die Zetafunktionen, die in L–Reihen 1. Grades zerfallen, sind wesentlich dieselben, die ich in meiner Arbeit mit Davenport behandelt habe. Zu diesen kommen noch solche hinzu, wo der Grad eine höhere Potenz der Charakteristik ist. Ihre Theorie ergibt sich aus den Ergebnissen von Witt über zyklische Körper dieser Art. Soviel ich weiss, hat Davenport die Absicht, eine Arbeit darüber herauszubringen.

Meine Vorträge in Paris sind jetzt in der Tat auf die Zeit zwischen Himmelfahrt und Pfingsten festgesetzt. Es tut mir wirklich leid, Sie dann doch nicht zu treffen.

Mit freundlichem Gruss!

Ihr sehr ergebener

H. Hasse

[1]Hasse schreibt versehentlich "weil" statt "wohl".

1.24 12.03.1939, Weil an Hasse

Anrede: Lieber Hasse. Dank für Witts Beweis. W. hat z.Zt. Untersuchungen in ganz demselben Ideenkreis. W. erklärt Riem.Roch für Matrizenringe. Linearisierung d. Problems. Vergleich mit Darstellg. in H.s Buch. Mehrdim. Distributionen in W.s Thèse. W. interessiert sich für H.s Untersuchungen über Zetafunkt. für Funktkp. über Zahlkpn. W. hofft auf Professur in Strassbg.

Université de
Strasbourg
le 12. iii. 39.

Lieber Hasse!

Ihre Sendung hat mich sehr interessiert.[1] Ich danke Ihnen sehr, dass Sie den Witt'schen Beweis für mich so sorgfältig ausgearbeitet und damit Ihre frühere Mitteilung über denselben Gegenstand vervollständigt haben. Schön ist insbesondere an diesem Beweis, dass die genaue Analogie zwischen der Heckeschen Thetaformel und dem (gewöhnlichen und nach Weissinger verallgemeinerten) Riemann–Rochschen Satze so klar hervortritt; man möchte meinen, einmal werden sich beide Sätze gleichzeitig beweisen lassen.

Ich schicke Ihnen Ihre Aufzeichnungen zurück, weil ich (wie Sie wohl wissen) leider die Tendenz habe, solche Sachen monate– und jahrelang liegen zu lassen, wenn ich sie nicht sofort erledige. Ich hätte aber den Beweis nicht so schnell durcharbeiten können, wenn ich nicht darauf durch meine gegenwärtigen Untersuchungen besonders vorbereitet gewesen wäre; der Beweis verläuft ganz in demselben Ideenkreis, wo ich mich seit einiger Zeit befinde. Der Sachverhalt ist nämlich folgender. Es sei K ein Funktionenkörper; K sei über $k(x)$ separabel. K' sei eine (separable) endliche Erweiterung vom Grade n von K. In K und K' will ich Divisoren betrachten, wie

[1] Added by A. Weil on the top margin of this page: "Lieber Hasse, Dies ist der Brief, den ich verlegt hatte. Ich schicke ihn unverändert ab, da ich eben im Begriff bin, nach Cambridge wegzufahren. Mit herzlichen Grüßen — Ihr A W"

ich sie in meiner Liouvilleschen Arbeit einführe; ein Divisor r–ten Grades ist also ein Divisor im Matrizenringe r–ten Grades über K bzw. K'; was man gewöhnlich unter "Grad" eines Divisors versteht, will ich ferner wie in meiner Arbeit als "Gesamtindex" bezeichnen. *Jedem Divisor vom Grade r auf K' entspricht aber ein Divisor vom Grade rn auf K*, wie ich jetzt für $r = 1$ (der Einfachheit halber) ausführen werde. Es sei $B_1, \ldots, B_n$ eine Basis von K' bezüglich B; um auszudrücken, dass das Element $\sum_i B_i \varphi_i$ von K' ($\varphi_i \in K$) $\equiv 0$ mod. $\mathfrak{a}$ ist, wo $\mathfrak{a}$ ein Divisor 1. ten Grades (in meinem Sinne), also ein ganz beliebiger Divisor in K' im gewöhnlichen Sinne bedeutet, hat man zu schreiben, dass n Linearausdrücke in den φ_i in jedem Punkte von K endlich bleiben, nämlich die n Ausdrücke $t_P^{\nu(S)} . \sum B_i^S \varphi_i$ ($t_P =$ lokale Uniformisierende in P, also eine Funktion in K, die den Primdivisor P im Zähler zur ersten Potenz enthält; $S =$ Element der Galoisschen Gruppe, wenn K'/K Galoissch ist, sonst ein Vertreter der Nebengruppe nach der Untergruppe, zu welcher K' in einem Galoisschen Oberkörper gehört; $\nu(S)$ eine ganze Zahl, wenn K' in P unverzweigt ist, und eine gebrochene Zahl, wenn K' in P eine gewöhnliche Verzweigung besitzt; der Einfachheit halber will ich hier die höheren Verzweigungen nicht berücksichtigen, obwohl sie hier keine Schwierigkeit verursachen). Die Matrix der n Linearausdrücke in den φ_i definiert dann einen Divisor n–ten Grades (in meinem Sinne) in K.

Nun ist der Riemann–Rochsche Satz für den gewöhnlichen Divisor $\mathfrak{a}$ auf K' mit dem (nach mir oder auch nach Witt, da im wesentlichen kein Unterschied besteht) verallgemeinerten Riemann–Rochschen Satze für den zugehörigen Divisor n–ten Grades auf K vollkommen gleichwertig. Der Wittsche Beweis besteht nun daraus, dass man den Riemann–Rochschen Satz zunächst für Divisoren beliebigen Grades (d. h. Matrizendivisoren) im Körper $k(x)$ beweist; genauer gesagt, beweist man den Satz für eine spezielle Klasse von Divisoren, aber dafür in einer präziseren Fassung, indem man die Kongruenzklassen nach einem Führer einführt (also einen speziellen Fall der Weissingerschen Sätze für Matrizendivisoren erledigt; diese Sätze sind übrigens mit meinem "nicht–homogenen Riemann–Rochschen Satze" im ersten Teil meiner Liouvilleschen Arbeit gleichwertig); dann wird der Satz für einen gewöhnlichen Divisor in einer Erweiterung K von $k(x)$ auf den Satz in $k(x)$ zurückgeführt.

Allerdings wundere ich mich, dass Sie in Ihrem Buche (wie in Ihrem Brief erwähnt ist) diesem Beweis des Riemann–Rochschen Satzes den Vorzug gaben; denn zu einer Lehrbuchdarstellung eignet sich m. E. nur ein Beweis, der soweit wie möglich im Körper K selbst operiert, und nicht erst zum Unterkörper $k(x)$ heruntersteigt; doch kann ich wohl diese Frage nicht ganz unparteilich beurteilen: denn der einzige mir bekannte algebraische Beweis, der dieser Forderung genügt, ist derjenige, den ich in der von Ihnen gedruckten Arbeit veröffentlicht habe. Von meinem Beweis zum Riemann–Rochschen Satze für Matrizendivisoren (sogar mit Berücksichtigung der Kongruenzklassen nach einem Führer) ist dann ein leichter Schritt.

Was Ihre Frage über meine Thesis betrifft, so habe ich die Beweise über mehrdimensionalen Distributionen eben durchgelesen, und kann nicht einsehen, dass eine Lücke oder eine wesentliche Schwierigkeit darin vorkomme. Allerdings würde ich nicht mehr so die Sache darstellen, sondern wie in meiner Schrift "Arithmétique et Géométrie..." : dabei weiss ich sehr wohl, dass ein Bindeglied noch fehlt (ich habe es in der Fussnote (1), S. 12, angedeutet, da ich nicht mehr Lust hatte, die Sache auszuführen, obwohl — oder weil — ich überzeugt war, die Sache würde sich leicht machen lassen). Das fehlende Bindeglied würde sich aus einem Satz folgender Art ergeben: im Ringe Ω (Bezeichnungen wie in meiner Schrift) ist jedes (homogene) Hauptideal einem Produkt von Primidealen der höchsten Dimension äquivalent, falls die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit V keine Singularitäten besitzt. Es ist möglich, dass man, um diesen Satz zu beweisen, die Gedankengänge der §§ 4 – 10 meiner Thesis wird benutzen müssen; vielleicht lässt sich aber die Sache leichter erledigen. Ich glaube, irgendein Schüler von van der Waerden könnte das leicht machen.

Ich benutze die Gelegenheit, um zu bemerken, dass der Schluss im § 18 meiner Thesis ("Le raisonnement précédent est en défaut...") ganz und gar nicht zwingend ist, da es denkbar wäre, dass die Länge der Sprünge, die man dabei zu machen hat, nicht beschränkt wäre. Man muss also anders schliessen. Dazu braucht man bloss, statt *eines* Vertreters a_i für jede Divisorenklasse mod. 2 , so viele Vertreter zu wählen (eventuell nach Erweiterung des Grundkörpers), dass überhaupt keine Sprünge nötig sind. Wenn Ihnen dieser Punkt Schwierigkeiten macht, kann ich Ihnen die Sache genauer ausführen.

Sollte der Versuch, Zetafunktionen für Funktionenkörper über einem algebraischen Zahlkörper, gelingen, so möchte ich gern davon hören. Ich bin immer noch ganz von meinen Untersuchungen über nicht–abelsche Erweiterungen von Funktionenkörpern in Anspruch genommen, und habe die Hoffnung, dass gewisse neue Verallgemeinerungen der Riemannschen Bilinearrelation, die ich gegenwärtig untersuche, die vielgesuchte Verallgemeinerung des Artinschen Reziprozitätsgesetz irgendwie enthalten. Doch bin ich noch weit davon entfernt, diese recht verwickelten Verhältnisse zu überblicken.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr sehr ergebener

A Weil

Von jetzt ab, und jedenfalls bis Oktober, bitte ich Sie, meine Pariser Adresse zu benutzen. Ausserdem muss ich Sie bitten, wenn Sie mir schreiben, die Adresse *nicht* mit deutschen Buchstaben schreiben zu lassen; in Strassburg können wenigstens die älteren Leute die deutsche Schrift noch lesen, aber Ihr letzter Brief, da er mir nach Paris nachgeschickt wurde, hat mich nur mit Mühe erreicht. Aus dem Versuch, eine Professur in Poitiers zu bekommen, ist, wie erwartet, nichts geworden; wahrscheinlich bekomme ich eine in Strassburg noch vor Ende des Jahres.

1.25 09.04.1939, Weil an Hasse

W. schickt H.s Manuskr. zurück.

Paris

le 9. iv. 39.

Lieber Herr Hasse!

Hiermit schicke ich Ihnen Ihre Aufzeichnungen über den Wittschen Beweis zurück; ich habe sie mit grossem Interesse gelesen, und hatte Ihnen, bald nach Empfang derselben, darüber und über verwandte Fragen einen recht ausführlichen Brief geschrieben, den ich seitdem nicht wiederzufinden vermag. Wenn ich ihn noch finde, werde ich ihn schicken, sonst schreibe ich Ihnen einmal wieder darüber.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

A Weil

1.26 Sommer 1941, Weil an Hasse

Beilage zum Sonderdruck von W.s Note üb. den Beweis der Riem. Vermutg.

ohne Datum[1]

Dear Hasse,

In the midst of the vastly more important affairs in which I hear you are at present engaged, you may still be able to spare a few minutes for the perusal of the solution of a problem you used to be interested in.

With best greetings from the U. S. A.

Yours sincerely

A Weil

[1]Die folgenden Zeilen lagen einer Sendung von Weil an Hasse bei, welche einen Sonderdruck seiner Note "On the Riemann hypothesis in function fields" in den Proceedings Nat. Acad. Sci. 27 (1941) 345-347, enthielt. Die Sendung erreichte Hasse vor September 1941.

Kapitel 2

Verschiedenes

2.1 19.02.1957, Selberg an Hasse

Febr 19, 57

Dear Professor Hasse,

The faculty of our Institute is currently considering to recommend the appointment of a new professor of Mathematics in the Institute. It is our custom on such occasions to solicit some opinions and statements from outside our faculty.

As the name of Andre Weil has figured prominently in our discussions, I take the liberty of turning to you with a request for such a statement about the merits and standing of his work in as far as it falls within the range of your interests. I need not say that I should consider a statement from you particularly valuable and helpful.

Your letter, which by the way need not be long, will of course be kept in strictest confidence and not accessible to any one outside our faculty. I trust you will consider this request confidential in the same way.

Thanking you in advance, and also asking you to excuse the bother I cause you, I remain

Yours sincerely,

Atle Selberg

2.2 22.02.1957, Hasse an Selberg

22. Februar 1957

Verehrter, lieber Herr Selberg,

Ihre Anfrage ist ausserordentlich leicht zu beantworten. In meinen Augen ist Andre Weil einer der führenden Forscher auf dem Gebiete der Algebra und Zahlentheorie. Schon als junger Mann gelang ihm ein grosser Wurf, der Beweis seines Endlichkeitssatzes über Punktgruppen auf algebraischen Kurven. Mit der dazu geschaffenen Methode der sogen. Distributionen tat er den ersten Schritt für die Entwicklung einer Arithmetik der algebraischen Mannigfaltigkeiten. An der weiteren Entwicklung dieses heute im Mittelpunkt des Interesses stehenden Forschungsgebietes ist er massgeblich durch seine beiden bekannten Monographien in den Actualites Scientifiques beteiligt. Ausserordentlich tiefliegende arithmetische Resultate hat er in der letzten Zeit durch seinen topologischen Beitrag zur Klassenkörpertheorie und durch seine neuen Entdeckungen über die Zetafunktionen von Mannigfaltigkeiten geliefert. Damit habe ich nur die wichtigsten seiner mathematischen Ergebnisse gestreift. Ich glaube, dass es die mathematische Fachwelt als unbedingt gerechtfertigt ansehen würde, wenn Sie ihn für Ihr Institut in Frage ziehen.

In der Hoffnung, Ihnen mit diesen Ausführungen gedient zu haben, bin ich

mit freundlichen Grüssen
Ihr sehr ergebener

Kapitel 3

Index

Index