

# BRIEFWECHSEL HASSE–SCHILLING

*Version von Samstag, 05.07.2003,  
Gesamtfile  
Für PDFLaTeX/hyperref  
und LaTeX2e/hyperref*

Hasse an Schilling 06.07.34 – 09.10.36

Schilling an Hasse 05.07.34 – 14.01.37

(Abschnitte “Hasse–Schilling”, “Schilling Beil.” und  
“Schilling–Crelle” vollständig)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Letters Hasse–Schilling</b>	<b>4</b>
1.1	05.07.1934, Schilling to Hasse . . . . .	5
1.2	06.07.1934, Hasse to Schilling . . . . .	7
1.3	14.07.1934, Hasse to Schilling . . . . .	8
1.4	16.07.1934, Schilling to Hasse . . . . .	9
1.5	17.07.1934, Hasse to Schilling . . . . .	11
1.6	19.07.1934, Hasse to Schilling . . . . .	12
1.7	19.03.1935, Schilling to Hasse . . . . .	13
1.8	01.04.1935, Schilling to Hasse . . . . .	14
1.9	02.04.1935, Hasse to Schilling . . . . .	15
1.10	17.04.1935, Schilling to Hasse . . . . .	16
1.11	02.05.1935, Schilling to Hasse . . . . .	17
1.12	06.05.1935, Hasse to Schilling . . . . .	18
1.13	03.06.1935, Schilling to Hasse . . . . .	19
1.14	19.06.1935, Hasse to Schilling . . . . .	25
1.15	25.06.1935, Schilling to Hasse . . . . .	27
1.16	01.07.1935, Hasse to Schilling . . . . .	35
1.17	02.07.1935, Schilling to Hasse . . . . .	37
1.18	11.07.1935, Hasse to Schilling . . . . .	38
1.19	13.07.1935, Schilling to Hasse . . . . .	39
1.20	26.08.1935, Hasse to Schilling . . . . .	40
1.21	28.08.1935, Schilling to Hasse . . . . .	41
1.22	26.09.1935, Schilling to Hasse . . . . .	42
1.23	14.10.1935, Hasse to Schilling . . . . .	46
1.24	18.10.1935, Schilling to Hasse . . . . .	48
1.25	24.10.1935, Schilling to Hasse . . . . .	49
1.26	28.10.1935, Hasse to Schilling . . . . .	54

1.27	04.11.1935, Hasse to Schilling . . . . .	56
1.28	07.11.1935, Schilling to Hasse . . . . .	58
1.29	14.11.1935, Schilling to Hasse . . . . .	59
1.30	28.11.1935, Schilling to Hasse . . . . .	60
1.31	03.12.1935, Hasse to Schilling . . . . .	65
1.32	11.12.1935, Schilling to Hasse . . . . .	73
1.33	16.12.1935, Hasse to Schilling . . . . .	77
1.34	16.12.1935, Schilling to Hasse . . . . .	79
1.35	20.12.1935, Schilling to Hasse . . . . .	82
1.36	22.12.1935, Hasse to Schilling . . . . .	85
1.37	09.01.1936, Schilling to Hasse . . . . .	87
1.38	10.02.1936, Hasse to Schilling . . . . .	90
1.39	13.02.1936, Schilling to Hasse . . . . .	92
1.40	30.03.1936, Hasse to Schilling . . . . .	94
1.41	10.04.1936, Schilling to Hasse . . . . .	96
1.42	27.04.1936, Hasse to Schilling . . . . .	98
1.43	17.05.1936, Schilling to Hasse . . . . .	99
1.44	16.06.1936, Schilling to Hasse . . . . .	102
1.45	05.07.1936, Schilling to Hasse . . . . .	104
1.46	20.07.1936, Schilling to Hasse . . . . .	105
1.47	25.09.1936, Schilling to Hasse . . . . .	106
	<i>Literaturangaben zu algebraischen Korrespondenzen im</i>	
	<i>Auftrag von Lefschetz.</i>	
1.48	09.10.1936, Hasse to Schilling . . . . .	107
1.49	14.01.1937, Schilling to Hasse . . . . .	108
<b>2</b>	<b>Miscellaneous Related to Hasse–Schilling</b>	<b>111</b>
2.1	11.07.1934, Manuscript: Aenderungen im Beweis eines Einheitshauptgeschlechtssatzes . . . . .	112
2.2	13.07.1934, Manuscript: Note by E.Witt . . . . .	116
2.3	05.07.1935, Hasse to Consulate . . . . .	117
2.4	09.07.1935, Consulate to Hasse . . . . .	118
2.5	August 1935, Manuscript: Representations of Finite Groups . . . . .	119
2.6	18.10.1935, Manuscript: Struktur der Divisorenklassengruppe... by O.Schilling . . . . .	122
<b>3</b>	<b>Name Index</b>	<b>129</b>



# Kapitel 1

## Letters Hasse–Schilling

## 1.1 05.07.1934, Schilling to Hasse

5-7-34

Sehr geehrter Herr Professor!

Wie konnte ich nur so nachlässig sein. Hoffentlich habe ich Ihnen hierdurch keine Ungelegenheiten bereitet, sodass meine Arbeit beeinträchtigt wird. Ich glaube, dass man vorläufig durch die Worte „ $A$  eine abelsche Gruppe mit endlicher Basis“ auf Seite 10 zu Beginn des Hilfssatzes alles in Ordnung bringen kann. Denn:

a.) Sei  $A$  eine abelsche Gruppe mit *endlicher* Basis, also direktes Produkt zyklischer Gruppen  $\mathfrak{Z}_i : A = \mathfrak{Z}_1 \dot{\times} \dots \dot{\times} \mathfrak{Z}_m$ . Ausserdem  $C$  eine Untergruppe von  $A$ , sie habe die Darstellung  $C = Z_1 \dot{\times} \dots \dot{\times} Z_\mu \quad (\mu \leq m)$

**Behauptung:** Es existiert mindestens ein Homomorphismus von  $A$  auf  $C$ .

**Beweis:**  $z_i$  ein System von Basiselementen von  $A = \mathfrak{Z}_1 \dot{\times} \dots \dot{\times} \mathfrak{Z}_m$ ,  $\zeta_j$  ein System von B. el. von  $C$ . Da  $C \subseteq A$  so bestehen Relationen  $\zeta_j = \prod_{i=1}^m z_i^{\alpha_{jk}}$  ( $j = 1, \dots, \mu$ ). Wir ordnen nun den  $z_1, \dots, z_m$  die  $\zeta_1, \dots, \zeta_\mu$ , die durch  $m - \mu$  Einselemente  $1$  von  $C$  ergänzt sind, in beliebiger Reihenfolge zu. Dies ergibt Homomorphismen. Sei etwa

$$\begin{pmatrix} z_1 & \dots & z_\mu & z_{\mu+1} & \dots & z_m \\ \zeta_1 & \dots & \zeta_\mu & 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

die Zuordnung. Dann ist einem bel. El.  $a$  aus  $A$  mit  $a = \prod_{i=1}^m z_i^{a_i}$  zugeordnet  $\bar{a} = \prod_{i=1}^{\mu} \zeta_i^{a_i}$ , einem  $b = \prod_{i=1}^m z_i^{b_i}$  ist zugeordnet  $\bar{b} = \prod_{i=1}^{\mu} \zeta_i^{b_i}$ . Also  $ab = \prod_{i=1}^m z_i^{a_i} \prod_{i=1}^m z_i^{b_i} = \prod_{i=1}^m z_i^{a_i+b_i} \longrightarrow \prod_{i=1}^{\mu} \zeta_i^{a_i+b_i} = \prod_{i=1}^{\mu} \zeta_i^{a_i} \prod_{i=1}^{\mu} \zeta_i^{b_i} = \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}$ . Man erhält auch zu jedem El.  $\bar{a} = \prod_{i=1}^{\mu} \zeta_i^{c_i}$  ein Urbild:  $a = \prod_{i=1}^{\mu} z_i^{c_i}$  z. B.

b.) Das Kompositum der Untergruppen  $\varphi_i A$  ist eine Untergruppe  $\varphi_1 A \varphi_2 A \dots \varphi_n A$  von  $A$ . ( $\varphi_i A$  bedeutet, dass  $\varphi_i$  auf bel. El. von  $A$  angewendet unabhängig von  $\varphi_k$ .) Da  $A$  den Vor. von b.) genügen soll (Einheitengruppe), so wird  $A \longrightarrow \prod \varphi_i A$  ein Gruppenhomomorphismus, der mit  $\psi$  bezeichnet werde.

c.)  $B$  von endlichem Index in  $A$ . Dann ist  $\prod_i \varphi_i B$  Untergruppe von  $B$ ,

also durch einen Homomorphismus  $\overline{\psi}$  realisierbar.

Nun ist nach Definition des Kompositums stets zu erreichen, dass  $\overline{\psi}B = \psi B$ . Also ist  $\psi$  auch homomorpher Operator für  $B$ . Dann ist aber

$$\begin{aligned}(A : B) &= (\varphi A : \varphi B)(A_\varphi : B_\varphi) \\ &= \left( \prod_i \varphi_i A_i \prod_i \varphi_i B \right) (\Delta_i A_{\varphi_i} : \Delta_i B_{\varphi_i})\end{aligned}$$

Es wird also die schwer zu übersehende Kompositumsbildung  $\prod_i \varphi_i A$  durch einen einzigen Homomorphismus  $\psi$  ersetzt, dessen nähere Bestimmung unnötig ist. Seine Existenz steht nach a.) fest.

So ist wohl alles klargelegt.

Vielleicht kann ich Sie am Sonnabend in Marburg sprechen?

Herzlichen Dank!

Ihr

Otto Schilling.

## 1.2 06.07.1934, Hasse to Schilling

6. JULI 34

Herrn

Otto Schilling,

Marburg/Lahn

-----

Weissenburgstr. 11.

Lieber Herr Schilling!

Besten Dank für Ihren Brief! Ich bin noch nicht zufrieden aus den folgenden zwei Gründen:

1. Der Homomorphismus von  $A$  auf  $C$ , den Sie angeben, stimmt nicht wenn in  $A$  Basiselemente von unendlicher Ordnung vorhanden sind, in  $C$  aber nicht.

2. Es ist nicht klar, dass der Durchschnitt der durch die einzelnen Operatoren in eins abgebildeten Gruppen wirklich genau die bei dem von Ihnen konstruierten Homomorphismus in eins abgebildeten Untergruppen ist.

Bitte überlegen Sie die Sache gleich noch einmal und suchen Sie mich Sonntag vormittag in meiner Wohnung in Marburg auf.

Mit herzlichem Gruss

Ihr

H. Hasse



### 1.3 14.07.1934, Hasse to Schilling

14. JULI 34

Herrn

Otto Schilling

Marburg/Lahn.

-----  
Weissenburgstr. 11.

Lieber Herr Schilling!

Herr Witt hat leider durch 2 Beispiele gezeigt, dass der fragliche Index-Quotient sich bei Übergang zu einer Untergruppe sowohl vergrössern als verkleinern kann. Er nimmt als Gruppe  $A$  ein direktes Produkt aus zwei Zyklen gleicher endlicher Ordnung, als  $B$  die Einsgruppe, als ersten Homomorphismus die Erhaltung des ersten Zyklus und Einsetzung des zweiten. Als zweiten Homomorphismus die Einsetzung des ersten Zyklus und die Überführung des zweiten in den ersten. Dann verkleinert sich der Index-Quotient. Lässt man aber den ersten Homomorphismus wie oben, dagegen im zweiten Homomorphismus: zweiter Zyklus in eins, erster in zweiten, so vergrössert sich der Index-Quotient; der zu beiden Homomorphismen komplementäre ist beide-mal der Einshomomorphismus.

Bei dieser Sachlage habe ich nunmehr den Dekan gebeten, den § 2 aus Ihrer Dissertation ganz herauszustreichen. Zum Glück geht das ja, da §§ 3–7 für sich eine geschlossene Dissertations-Leistung darstellen.

Mit deutschem Gruss

Ihr

H. Hasse

## 1.4 16.07.1934, Schilling to Hasse

OTTO SCHILLING

DEN 16–VII 1934.

Sehr geehrter Herr Professor,

Das Gegenbeispiel von Herrn Witt ist einfach und treffend. Mir waren nach dem Telefongespräch auch Bedenken gekommen. Man kann die Indizes  $(A^{\varphi_1} A^{\varphi_2} : B^{\varphi_1} B^{\varphi_2})$  und  $(A : (A_{\varphi_1} \cap A_{\varphi_2}) \cdot B)$  nicht auf dem angegebenen Wege mit einander vergleichen. Das zeigt auch das Witt'sche Beispiel 2. Mit diesen Homomorphiesätzen habe ich eine bittere — aber vielleicht nötige — Lehre bekommen.

Nun erhebt sich aber folgende Fragestellung:

Kann man eine Übersicht über Struktureigenschaften der Homomorphismen erhalten, die es ermöglicht zu entscheiden, ob in dem Indexquotienten  $\geq$  oder  $\leq$  steht?

Könnte man hier zu Ergebnissen gelangen, so wäre man einen wesentlichen Schritt weiter. Denn vermutlich wird es dann nicht mehr schwer sein zu entscheiden, zu welchem Typus das Potenzieren mit (1–5) usf. gehört.

Leider kann ich dies alles nur ohne jeglichen Anhaltspunkt aussprechen. Das Wittsche Beispiel legt mir aber solche Vermutungen nahe.

Ich bin doch beruhigt, dass §§ 3–7 der eingereichten Arbeit noch eine Dissertation darstellen. Es ist nur sehr bedauerlich, dass diese Zeitverschwendung wegen meiner Übereile und Schlampigkeit nötig war. Das ist mir im Augenblick am peinlichsten. Denn ich weiss nicht, wie ich das Ihnen gegenüber bei Ihrer enormen Belastung wieder gutmachen könnte. — Wir können am Mittwoch den 25.VII oder 1.VIII Termine zur mündlichen Prüfung erhalten. Ich halte den 1.VIII für den richtigen. Denn wegen meiner Arbeit wird es ein Durcheinander gegeben haben, auch brauchen Sie dann nicht Ihre Vorlesungen usf. vor Semesterende zu unterbrechen. Vielleicht müssen wir von Krafft früher geprüft werden.

Herr Schmid und ich befinden sich augenblicklich in den Vorbereitungen.

Herzlichen Dank  
Ihr  
Otto Schilling.

## 1.5 17.07.1934, Hasse to Schilling

17. JULI 34

Herrn

Otto Schilling

M a r b u r g .

-----  
Weissenburgstr. 11.

Lieber Herr Schilling!

Ich habe dem Dekan vorgeschlagen den 1. August als Prüfungstermin zu nehmen, da er mir persönlich besser passt als der 25. Juli.

Ich begrüße es, dass Sie es nunmehr als Ehrensache ansehen, die Frage des Einheitenindexquotienten aufzuklären. Vielleicht ist es gut, die Sache zunächst einmal an Beispielen zu versuchen, um zu sehen, was man erwarten kann. Ich empfehle biquadratische Körper vom Typus  $(2, 2, 2, \dots)$  sowie den galoisschen Körper zu einem kubischen Körper.

Mit herzlichen Grüßen

Ihr

H. Hasse

## 1.6 19.07.1934, Hasse to Schilling

19. JULI 34

Herrn

Otto Schilling

M a r b u r g

-----  
Weissenburgstr. 11

Lieber Herr Schilling!

Besten Dank für die Briefabschriften, die mir Schmid übersandte. Ich lege Sie Ihnen wieder bei, denn *diese* Briefe habe ich, mir fehlen andere, ältere Briefe.

Mit herzlichem Gruss

Ihr

H. Hasse

## 1.7 19.03.1935, Schilling to Hasse

OTTO SCHILLING

DEN 19–III 1935

Sehr geehrter Herr Professor,

Vor einer Woche erhielt ich von Vieweg–Braunschweig die Fahnen zu meiner Dissertation. Ich habe ein durchgesehenes Exemplar an Prof. Blumenthal geschickt; das andere ging mit der Bitte um Druckgenehmigung nach Marburg. Ich nehme an, dass Sie im Laufe dieser Woche diese Papiere erhalten. — Es wäre mir sehr angenehm, wenn ich in der nächsten Woche nach Göttingen kommen könnte, um mit Ihnen auch über meine anderen Pläne zu sprechen. — Geben Sie mir bitte Nachricht, wann ich Sie besuchen kann. — In der letzten Zeit habe ich einiges über Ideale in Ordnungen und Ideale von beliebigem Rang in Matrixalgebren gefunden.

Mit bestem Gruss  
Ihr Otto Schilling.

Bernhardstr. 45  
Apolda.

## 1.8 01.04.1935, Schilling to Hasse

DR. OTTO SCHILLING

DEN 1-IV 1935

Sehr geehrter Herr Professor,

Hoffentlich haben Sie sich nicht viel Mühe mit der Durchsicht der Fahnenkorrektur gemacht. Inzwischen habe ich schon die Bogenkorrektur gelesen. Ich wäre sehr dankbar, wenn Sie mir an meine Göttinger Adresse eine kurze Nachricht zukommen liessen, ob ich Sie am Mittwoch nachmittag aufsuchen kann. (Wann und wo?)

Inzwischen habe ich auch aus Princeton von Weyl die Einladung bekommen. Ich soll vom 1. Okt 1935 → 1. Mai 1936 kommen. Sie können sich denken, dass ich mich unbändig gefreut habe. —

Mit den besten Grüßen

Ihr

Otto Schilling.

## 1.9 02.04.1935, Hasse to Schilling

Herrn  
Dr. O. Schilling  
G ö t t i n g e n  
Nikolausbergerweg 39

Göttingen, den 2. April 1935.

Lieber Herr Schilling,

herzlichen Dank für Ihren Brief. Bitte kommen Sie doch am Mittwoch nachmittags gegen 6 Uhr ins Institut. Hoffentlich haben Sie Ihre Arbeit noch nicht als druckfertig erklärt, ich habe mir noch einige Korrekturen aufgeschrieben. Zu Ihrer Einladung nach Princeton beglückwünsche ich Sie herzlichst.

Mit besten Grüßen

Ihr

H. Hasse



## 1.10 17.04.1935, Schilling to Hasse

DR. OTTO SCHILLING

DEN 17-IV 1935

Sehr geehrter Herr Professor,

Ich nehme an, dass Sie mit den Korrekturen meiner Arbeit einverstanden waren. Von Marburg erhielt ich leider noch nicht die Genehmigung zum Druck.

Wahrscheinlich fahre ich sofort nach Ostern nach England, sodass ich ungefähr am 29. IV. in Cambridge sein werde. Vielleicht sind Sie so freundlich und schicken in der Zwischenzeit an Herrn Davenport und Herrn Hall eine kurze Mitteilung zur Einführung. Dafür wäre ich sehr dankbar.

Mit den besten  
Ostergrüssen  
Ihr sehr ergebener  
O. Schilling.

## 1.11 02.05.1935, Schilling to Hasse

Cambridge 2-V-1935  
34 Jesus Lane.

Sehr geehrter Herr Professor,

So schön hatte ich mir Cambridge nicht vorgestellt. Ich fühle mich hier wohl. Herr Davenport hat sich meiner in sehr liebenswürdiger Weise angenommen. Er hat mich überall eingeführt. Herrn Hall konnte ich noch nicht sprechen. Letzthin sprach Prof. Hardy in der conversation class über „strong summability of Fourier series“. Leider konnte ich nicht sehr viel davon verstehen. Herr J. v. Neumann aus Princeton hält in diesem „Term“ Gastvorlesungen über „Überall periodische Funktionen in Gruppen.“ Das verspricht sehr interessant zu werden. — Von den jungen Emigranten werde ich ziemlich misstrauisch angeschaut. Das ist auch zu leicht verständlich. — Von Marburg erhielt ich einen Tag vor meiner Abreise die Titelblätter zurück. Sie seien druckfertig. Nun weiss ich nicht genau, ob damit auch die Arbeit für druckfertig erklärt worden ist. Ich möchte das fast annehmen.

Mit den besten Grüßen  
Ihr  
O. Schilling.

## 1.12 06.05.1935, Hasse to Schilling

Professor Dr. Hasse  
Göttingen, den 6. Mai 35  
Bunsenstr. 2-5.

Herrn Dr. O. Schilling

*Cambridge*  
34 Jesus Lane

Lieber Herr Schilling!

Herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief. Ich freue mich, dass Cambridge Ihre Erwartungen übertrifft und Sie sich dort wohlfühlen. Was Sie über das Misstrauen des dortigen zugewanderten Kreises schreiben, verstehe ich nicht recht. Vielleicht erläutern Sie das noch einmal etwas. Die Druckfertigkeits-erklärung für Ihre Dissertation habe ich in der Marburger Fakultät schon vor längerer Zeit ausgesprochen. Wenn Sie noch Zweifel haben, so fragen Sie doch bitte gleich nochmal an beim Dekan in Marburg, ob Sie das Imprimatur erteilen dürfen. Es freut mich, dass mein Freund Davenport sich Ihrer in so netter Weise angenommen hat. An Hall habe ich geschrieben. Ich fände es doch gut, wenn Sie ihn bald besuchten.

Mit den besten Grüßen, Wünschen und der Bitte, mir gelegentlich einmal wieder von Ihrem Ergehen zu berichten,

bin ich stets

Ihr

H. Hasse

## 1.13 03.06.1935, Schilling to Hasse

Cambridge 3-VI-1935  
34 Jesus Lane

Sehr geehrter Herr Professor,

Ich möchte Ihnen noch besonders dafür danken, dass Sie mich bei Herrn Hall angemeldet hatten. Ich kam gerade recht zu einer Sitzung der Hall study group. Herr Hall war sehr nett. Gelegentlich werde ich auch über irgend eine arithmetische Frage aus der Theorie der hyperkomplexen Systeme vortragen. So bin ich auch mit den jungen Deutschen in engere Berührung gekommen. Ich jetzt regelmässig zu den Besprechungen. Das Eis ist gebrochen, darf ich sagen. Wir kommen sehr gut miteinander aus. Kürzlich hat auch Herr Baer hier vorgetragen. Besonders haben mich aber die Vorlesungen v. Neumann's über Operatoren in allgemeinen Hilbert'schen Räumen interessiert. Ob es wohl möglich sein wird, von der allgemeinen Gruppentheorie her kommend Einblick in Einheitengruppen hyperkomplexer Systeme zu bekommen? Diese Frage legte ich mir besonders vor.

Herr Heilbronn hat eine fellowship vom Trinity-College für seine Arbeit über quadrat. Formen bekommen. Er kann sich freuen. Herr Rado und Herr Baer wissen wohl im Augenblick noch nicht, wo sie im nächsten Term sein werden.

Vor einigen Tagen habe ich an den Doyen der Graduate-School von Princeton geschrieben und mich um eine Wohnung in dem College beworben. Herr v. Neumann riet mir dazu. Ich hoffe einen günstigen Bescheid zu bekommen. In der Zwischenzeit glaube ich einige Fortschritte gemacht zu haben. Gestatten Sie mir bitte einige kurze Mitteilungen:

### **Normensatz in Divisionsalgebren**

Ich musste noch zeigen, dass zu gegebenem  $\alpha$  ein Element  $\beta_{\mathfrak{p}_i}$  mit den Eigenschaften

(1')  $(\alpha, \beta_{\mathfrak{p}_i}) = 1$  und (2')  $(k_{\mathfrak{p}_i}(\sqrt[n]{\beta_{\mathfrak{p}_i}}) : k_{\mathfrak{p}_i}) = n$  existiert.

Dazu betrachte ich die Gruppe  $P_i = k_{\mathfrak{p}_i}^* | k_{\mathfrak{p}_i}^{*n}$  und unterscheide 2 Fälle:

- a.)  $\alpha$  hat die Ordnung  $n$  in  $P_i$ ,  
 b.) die Ordnung von  $\alpha$  in  $P_i$  ist ein echter Teiler von  $n$ .

Nun zeige ich die Existenz von Elementen  $\beta_{p_i}$  im Falle a.) durch explizite Angabe, und im Falle b.) ändere ich  $\alpha$  multiplikativ ab, so dass Ihr Theorem III', Bericht II § 14 unmittelbar anwendbar wird.

Zu a.),  $-\alpha$  hat auch die Ordnung  $n$ . Dann ist bekanntlich  $(\alpha, -\alpha) = 1 = (-\alpha, \alpha)$ . Alle  $\beta_{p_i} \equiv_{(n)} -\alpha$  erfüllen offenbar (1') und (2').

Zu b.) Bestimme ein  $\alpha'_{p_i}$  zu  $\alpha$  mit

$$(1'') \quad (\alpha, -\alpha\alpha'_{p_i}) = 1, \quad (2'') \quad \text{ord}(\alpha'_{p_i}) = n.$$

Ein solches  $\alpha'_{p_i}$  muss die folgenden Bedingungen erfüllen

$$(1''') \quad \alpha'_{p_i}, +\alpha) = 1. \text{ Das ergibt sich aus } 1 = (\alpha\alpha'_{p_i}, -\alpha\alpha'_{p_i}) = (\alpha, -\alpha\alpha'_{p_i})$$

$$(\alpha'_{p_i}, -\alpha\alpha'_{p_i}) = (\alpha'_{p_i}, -\alpha\alpha'_{p_i}) = (\alpha'_{p_i}, +\alpha)^{-1}(\alpha'_{p_i}, -\alpha'_{p_i}) = (\alpha'_{p_i}, +\alpha)^{-1} =$$

$$\overline{(\alpha'_{p_i}, \alpha)} \quad (\text{vgl. } 1'') \quad \text{und}$$

$$(2''') \quad \text{ord}(\alpha'_{p_i}) = n.$$

Hiermit ist aber die Existenzaussage auf Theorem III' zurückgeführt. In der komplementären Klasse  $B_i$  zu  $A_i = \{\alpha\}$  existiert ein Element  $\alpha'_{p_i}$ , das (1''') erfüllt. Da ausserdem  $P_i$  mindestens eine Klasse von der Ordnung  $n$  enthält, so muss wegen  $B_i \cong P_i/A_i$  ein  $\alpha'_{p_i}$  mit (2''') existieren. ( $\text{ord } A_i$  echter Teiler von  $n$ ). —

### **Eindeutigkeitssatz und Bauerscher Satz für algebraische Funktionenkörper mehrerer Veränderlicher.**

Es handelt sich um die Ausdehnung der Ergebnisse von F. K. Schmidt auf mehrere Variable. Darüber schrieb ich schon mit einer ausführlichen Skizze an F. K. Schmidt. Er teilte mir mit, dass er sich gelegentlich schon die Möglichkeit der Verallgemeinerung überlegt hatte. Es gilt also folgender Satz: die Gesamtheit der Zerlegungsgruppen der Primdivisoren von der Höchstdimension erschöpft die Menge aller Untergruppen der gal. Gruppe eines Normalkörpers von endlichem Transzendenzgrad. Ich glaube auch, dass man diesen Satz mit den Deuring'schen Methoden erhalten kann. Vielleicht ist es auf diese Weise auch möglich, den Satz auf noch allgemeinere Konstantenkörper zu übertragen. Immerhin erscheint mir das erhaltene Ergebnis einiger Beachtung wert. Es ist ein erster nicht mehr trivialer Schritt. Wahrscheinlich gelten diese Sätze für mehrere Variable immer dann, wenn sie für eine Variable gelten. Bisher konnte ich aber noch keine Induktionsmethode ausfindig

machen.

Es wäre mir sehr angenehm, wenn ich über die beiden oben genannten Dinge je eine Note publizieren könnte. Was meinen Sie dazu?

Augenblicklich beschäftige ich mich mit der Theorie der Ordnungen im hyperkomplexen. Ich habe einige Beispiele gerechnet, um mit den Schwierigkeiten und möglichen „Fällen“ vertraut zu werden. Ich möchte gern eine Charakterisierung für das Zerlegungsverhalten der Primstellen des Zentrums in einer nicht kommutativen Erweiterungsordnung aufdecken. Zuerst denke ich bescheiden an die Systeme mit quadratischen und kubischen Zerfällungskörpern. Hier gelang es mir explizit die verschiedenen Zerlegungstypen aufzustellen und eigentümliche Beziehungen zu Artinsymbolen zu sehen. Letztere reichen — wie ich bisher sehen konnte — aber noch nicht vollständig aus. Vermutlich gilt folgendes:

$\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}|\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}\cdot\mathfrak{p} = e_1\cdot\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}|\mathfrak{p} + e_2\cdot\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}|\mathfrak{p} + e_3\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}|\mathfrak{p} + \mathfrak{N}_{\mathfrak{p}} \iff$  wenn in  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$  die (lokale) Hauptordnung  $\Omega_{\mathfrak{p}}$  eines Zerfällungskörpers  $K$  mit  $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right) = 1$  liegt. D. h. dieser Typus tritt nur für nicht-Verzweigungsstellen der Algebra auf. ( $\mathfrak{D}$  eine Ordnung eines Systems vom Grade 3,  $\mathfrak{o}$  die Hauptordnung des Zentrums,  $\mathfrak{N}_{\mathfrak{p}}$  das Radikal von  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}|\mathfrak{p}$ .)

Es ist übrigens interessant, das Verhalten der einseitigen Erweiterungs Ideale von Ordnungs Idealen in den Zwischenordnungen zu untersuchen.  $\mathfrak{D} \leq \mathfrak{D}' \leq \mathfrak{D}'' \leq \dots \leq \mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{D}\mathfrak{a} \leq \mathfrak{a}$ , Erweiterungs Ideale  $\mathfrak{D}^{(\nu)}\mathfrak{a}$ ? Es kann dann vorkommen, dass das linksseitige Erweiterungs Ideal  $\mathfrak{D}^{(\nu)}\mathfrak{a}$  eines 2-seitigen  $\mathfrak{D}$ - Ideals  $\mathfrak{a}$  ein ganz anderes Verhalten als das rechtsseitige Erweiterungs Ideal  $\mathfrak{a}\mathfrak{D}^{(\nu)}$  hat. Z. B. kann sein  $\mathfrak{D}^{(\nu)}\mathfrak{a} \neq \mathfrak{D}^{(\nu)}$ , aber  $\mathfrak{a}\mathfrak{D}^{(\nu)} = \mathfrak{D}^{(\nu)}$ ! Dafür habe ich eine Reihe von Beispielen, hier kommen die Eigenschaften der verschiedenen Führer in Betracht. Schon an einfachen Fragen erkennt man, dass im Nichtkommutativen die Dinge ganz anders liegen können als im Kommutativen. Die Krull'sche Theorie der Zerlegungs- und Trägheitsringe wird ein ganz anderes Gesicht bekommen. Immerhin muss ich sie zu übertragen versuchen. Dazu habe ich schon einige Ansätze. Gleichzeitig erhebt sich nun die Frage nach charakteristischen Invarianten der Ordnungen. Das wird eine verteilte Geschichte werden! Die Struktur der Gruppe der 2-seitigen Ideale, die prim zum Führer sind, gerechnet modulo den Idealen des Zentrums dürfte einige Aufschlüsse geben. Für Maximalordnungen erhält man bekanntlich die endlich vielen Zyklen der Ordnung  $m_{\mathfrak{p}}$ . Hier treten andere neue Zyklen auf.

Überhaupt hängen solche Fragen mit dem Klassenzahlproblem in Ordnungen zusammen. Die Endlichkeit der Klassenzahl, im folgenden Sinne zu rechnende Klassen, habe ich zeigen können:

$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$  prim zum Linksführer der Ordnung  $\mathfrak{D}$  sollen dann und nur dann äquivalent heißen, wenn  $\mathfrak{a}_1\alpha_1 = \mathfrak{a}_2\alpha_2$  mit regulären Elementen  $\alpha_1, \alpha_2$  aus der Algebra. Man muss zu den regulären Idealen übergehen, da sonst die Äquivalenzdefinition nicht mehr vollständig die üblichen Eigenschaften hat. Der Grund liegt darin, dass im Kommutativen die bezüglich  $\mathfrak{D}$  ganzen Ideale in Ordnungen keine Fastgruppe mehr bilden. D. h. aus  $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ ,  $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$  folgt nicht mehr  $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$ . Im Nichtkommutativen gilt Ähnliches. Erst wenn man sich auf die zum Führer primen Ideale beschränkt, kann man eine anständige Äquivalenz definieren. Die Theorie der zu den Führern teilerfremden Ideale und Strukturtheorie der Ordnungen (Bestimmung durch die Komponenten, Führerzerlegungen) sind mir bekannt. Hier ergibt sich nicht viel Neues. Die Charakterisierung der Restklassensysteme  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}|\mathfrak{p}$  als endliche Mengen mit Kompositionsgesetz für Ideale erscheint aussichtslos. Hiesige Spezialisten für Axiomatik der Gruppentheorie „versicherten“ mir, dass eine Klassifizierung jener endlichen Systeme sehr schwer möglich sein wird. Die Freiheiten sind wegen der wenigen Rechenregeln zu groß. — Immerhin wird man zeigen können — ich habe viele Beispiele dafür — dass auch nur endlich viele Klassen bei Aufgabe der Regularität existieren:  $\mathfrak{a}_1 \sim \mathfrak{a}_2 \iff \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1\alpha$ ,  $\alpha$  regulär und  $\text{Cl}(\mathfrak{a}_1) = \text{Cl}(\mathfrak{a}_2)$  wenn die Mengen aus „gleich viel“ Idealen bestehen.

Eine genaue explizite Bestimmung der Klassenzahlen der regulären Ideale mit rein arithmetischen Methoden — wie es Dedekind im Kommutativen konnte — gelang mir nicht. Ich werde wohl analytische Hilfsmittel, wie  $\zeta$ -Fktionen und Dichtigkeiten, heranziehen müssen. Das Analogon zum Quotienten aus den Regulatoren der Einheitengruppen werden Quotienten von Integralen über die Fundamentalbereiche von Einheitengruppen, das sehe ich schon genau. Nun fehlt mir noch die Schlussformel. Und das führt wieder zur Frage nach den Einheitengruppen selbst. Folgendes ist wohl richtig: der Index der Einheitengruppe einer Ordnung in der Einheitengruppe jeder einbettenden Maximalordnung ist endlich. Um diesen Satz zu beweisen, brauche ich auch analytische Anschauungen. Leider bin ich noch nicht ganz fertig. Und wie wird die Struktur der Restklassensysteme sein, existiert zu jeder Untergruppe von endlichem Index eine oder mehrere Ordnungen, deren Einheitengruppe *genau* die gegebene Gruppe ist? Die explizite Bestimmung von Klassenzahlen bei bestimmten Äquivalenzfestsetzungen gelang mir für

endliche Moduln bezüglich Ordnungen (damit die Bestimmung von Klassenzahlen in Matrixensystemen über jenen Ordnungen) und für die „Pseudoideale“ in Maximalordnungen von Matrixensystemen. Pseudoideal  $\mathfrak{a}$  nenne ich eine additive abelsche Gruppe mit beschränkten Nennern aus  $\mathfrak{S}$ , die eine Maximalordnung  $\mathfrak{M}$  gestattet:  $\mathfrak{M}\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{a}\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{a}$ , und die aus lauter Nullteilern besteht. Entsprechend der Anzahl der linear unabhängigen Spalten oder Zeilen spreche ich von dem Rang des Pseudoideals.

$\mathfrak{a}_1 \sim \mathfrak{a}_2 \iff \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2\alpha$ ,  $\alpha$  regulär aus  $\mathfrak{S}$ . Die Rechtsordnungen von Pseudolinksideal sind Ringe mit Radikal. Die Struktur des Restklassenringes nach dem Radikal wird aber übersichtlich. Das hoffe ich auch gelegentlich noch genauer ausführen zu können.

Ausserdem habe ich mich weiter mit der Struktur der allgemeinen Bewertungen beschäftigt. Im Falle von 2 Variablen gilt für stufenweise perfekte Körper, dass die R. Brauersche Gruppe endlich ist, falls der Konstantenkörper ein endl. Galoisfeld ist. Stufenweise perfekt heisst ein Körper, wenn er selbst perfekt ist und ebenso die Restklassenkörper nach den Vergrößerungen der gegebenen Bewertung vom Range 2. Eigenartigerweise kann die R. Brauersche Gruppe auch für Körper, die bezüglich eines Primdivisors von der Höchstdimension perfekt sind, bisweilen endlich werden. Das ist aber ein ganz seltener Fall.

Nun habe ich noch eine vielleicht kindliche Frage: Haben Sie sich schon überlegt, ob aus der Tatsache, dass die Jakobische Gruppe (erkläre gleich, was ich damit meine) und die  $g$ -gliedrige komplexe Transformationsgruppe im Kleinen isomorph sind, eine Verallgemeinerung Ihrer Untersuchungen im elliptischen Falle folgen kann?

**Jakobische Gruppe:**  $K$  ein klassischer Funktionenkörper vom Geschlecht  $g$ ,  $u_i^{p_i, q_i}$  ( $i = 1, \dots, g$ ) die Differentiale erster Gattung. Das Jakobi'sche Umkehrproblem  $\sum_{j=1}^g u_i^{p_j, q_j} \equiv v_i \pmod{Pu}$  ( $i = 1, \dots, g$ ) ermöglicht die Bestimmung von  $g$  Stellen  $\mathfrak{q}_i$  zu gegebenen Wertesystemen  $v_i$  bei bekannten festen  $\mathfrak{p}_i$ . Falls  $\mathfrak{p}_i$  in allgemeiner Lage sind, ist die Lösung eindeutig. Nun ordne man  $(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_g) = P$  einen Punkt des  $g$ -dimensionalen komplexen Raumes  $K_g$  zu, desgleichen sei  $(\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_g) = Q$  ein Punkt in  $K_g$ . Jedes Wertesystem  $(v_i)$  ergibt nun eine Transformation  $P \rightarrow Q$  von  $K_g$  in sich. Die Gruppe dieser Transformationen ist im Kleinen stetig isomorph zu der allgemeinen  $g$ -dimensionalen Transformationsgruppe. Aus der Theorie der kontinuierlichen Gruppen weiss man aber, dass hieraus nicht die stetige Isomorphie im Großen erschlossen werden kann. Das geht für  $g > 1$  auch in



unserem Falle nicht. Dafür sind aber die Überlagerungsgruppen beider Ausgangsgruppen stetig isomorph. Also liegt wieder eine ähnliche Situation wie für  $g = 1$  vor; nur mit dem Unterschiede, dass man bei  $g = 1$  nicht erst in den Wegeraum zu gehen brauchte. Das legt doch eine weitere Untersuchung nahe!

Entschuldigen Sie bitte den so lang geratenen Brief. Ich wollte Ihnen aber einen Überblick über meine hiesige Tätigkeit geben. Wahrscheinlich werde ich im August noch einmal nach Göttingen kommen, ehe ich nach Princeton gehe.

Die traurigen Nachrichten über Herrn Grell haben mich aufs Peinlichste überrascht. Ich hätte nie so etwas angenommen.

Mit den besten Grüßen

Ihr

Otto Schilling.

## 1.14 19.06.1935, Hasse to Schilling

19. 6. 1935

Lieber Herr Schilling,

Herzlichen Dank für Ihren ausführlichen Brief, aus dem ich ersehe, dass Sie schön im Zuge sind. Hoffentlich wird aus Ihren mannigfachen wissenschaftlichen Plänen etwas. Denn wenn ich Ihnen das in aller Freundschaft sagen darf, Sie müssen sich bei Ihrer Veranlagung hüten, allzuvielen Dingen gleichzeitig anzupacken und dann naturgemäss bei keinem so recht in die Tiefe zu dringen. Das wissen Sie ja auch selbst schon; wir sprachen gelegentlich mündlich darüber.

Von den Sachen über Ordnungen in Algebren verstehe ich zu wenig, als dass ich mich darüber massgeblich äussern könnte. Da haben Sie ja in Ihrem Freunde Chevalley den denkbar besten Berater.

Ihren Beweis für den Bauerschen Eindeutigkeitssatz bei Funktionenkörpern mehrerer Unbestimmten würde ich gern einmal im einzelnen sehen. Vielleicht setzen Sie mir einmal einen Entwurf für eine Veröffentlichung darüber auf.

Ihr Beweis des Normensatzes für Algebren scheint mir in zwei Punkten unstimmtig zu sein. Einmal — das ist harmlos — hat  $-\alpha$  nicht notwendig die gleiche Ordnung wie  $\alpha$ , wenn der Grad  $n$  gerade ist. Und dann — das ist ernster — ist keineswegs richtig, dass in einer Faktorgruppe  $B \simeq P|A$  ein Element der Ordnung  $n$  vorkommt, wenn in  $P$  selbst ein solches vorkommt und  $A$  durch ein Element  $\alpha$  von echt in  $n$  aufgehender Ordnung erzeugt wird. Wenn z. B.  $P$  zyklisch ist, stimmt das nicht. In Ihrer Anwendung ist nun zwar  $P$  nicht zyklisch, aber auch dann braucht der obige Schluss nicht richtig zu sein.

Hinreichen würde es sicher, wenn  $P$  mindestens zwei unabhängige Elemente der Ordnung  $n$  besitzt, und zwar ganz unabhängig davon, ob  $A$  die Ordnung  $n$  selbst, oder sogar einen echten Teiler von  $n$  hat.

Ich habe mir nun aber die ganze Frage noch einmal von Grund auf neu

überlegt, und zwar gleich unter der allgemeineren Voraussetzung, dass  $k$  ein *beliebiger* algebraischer Zahlkörper ist, der nicht notwendig die  $n$ -ten Einheitswurzeln enthält, und auch dass es sich um eine normale einfache Algebra  $A$ , nicht notwendig eine Divisionsalgebra handelt. Sie finden meine Untersuchungen auf beiliegenden Blättern. Wie Sie sehen, kommt man dabei sehr schön und vielleicht noch viel durchsichtiger zum Ziel, als für den Spezialfall, dass  $k$  die  $n$ -ten Einheitswurzeln enthält. Insbesondere machen gerade die Teiler von  $n$  nicht die geringste Schwierigkeit, weil hier die Gruppe  $k|k^n$  genügend viele unabhängige Elemente der Ordnung  $n$  enthält, nämlich mindestens zwei. Der betr. Satz von Hensel, der das feststellt, findet sich in Crelle 146. Allerdings treten von den nicht in  $n$  aufgehenden Primteilern her zunächst noch Einschränkungen auf, für deren Beseitigung man nach meinen Überlegungen notwendig über die Betrachtung bloss zyklischer Teilkörper hinausgehen muss. Es wäre schön, wenn Sie diesen Rest noch erledigen könnten. Dann möchte ich vorschlagen, dass wir daraus eine kleine Note zur Veröffentlichung zusammenstellen.

Ob ich im August hier in Göttingen sein werde, ist noch unbestimmt. Ich will jedenfalls Ende Juli für einige Zeit in dem neu angeschafften Wagen südwärts ziehen.

Bitte grüssen Sie die dortigen Bekannten herzlichst. Und lassen Sie mich bald einmal wieder von sich hören.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

## 1.15 25.06.1935, Schilling to Hasse

25-VI-1935

Cambridge.

Sehr geehrter Herr Professor,

Erst heute kann ich Ihnen für den liebenswürdigen Brief danken, da ich in den letzten Tagen ziemlich unter Fieber zu leiden hatte. Ich hoffe, dass ich meine Überlegungen im folgenden klar genug darstelle.

Auf Ihre wertvolle Anregung hin habe ich nach allgemeinen Bedingungen gefragt, unter denen ein gegebenes Element  $\beta$  eines Zahlkörpers  $k$  Faktorensystem zu einer gegebenen normalen Algebra  $A$  über  $k$  werden kann (allgemeiner, wann es Faktorensystem zu einer beliebigen Algebra der Klasse  $\mathfrak{A}$  zu  $A$  werden kann.)

Nach dem Vorbild Ihrer Überlegungen kann man sich auf die Behandlung endlich vieler lokaler Probleme beschränken. Man muss eben die Bestimmungsgrößen  $x, y$  zu den Charakteren des Grünwald'schen Existenzsatzes aus einer Exponentenforderung abzuleiten versuchen.

Ich möchte gleich bemerken, daß nicht jedes  $\beta \in k$  als Faktorensystem zu einem passenden zyklischen Zerfällungskörper  $K$  festen Grades ( $K : k$ ) tauglich ist. Trotzdem kann man aber durch eine triviale Kombination Ihrer Resultate und der folgenden Ergebnisse jedes El.  $\beta$  (falls es bei im Unendlichen verzweigten  $A$  noch der Vorzeichenbedingung genügt) als Norm aus  $A$  darstellen. Man konstruiert sich für die Verzweigungsstellen von  $A$  gewisse Normalelemente, die aber nicht gegenüber irgend welchen Forderungen invariant zu sein brauchen. Wie in dem von Ihnen behandelten Falle teile man die Verzweigungsstellen in 3 Klassen ein. (Die Aufspaltung in Algebren von Primzahlpotenzgrad sei schon geschehen.).

1.)  $\mathfrak{p} \nmid \ell$       $\mathfrak{p} \nmid p_\infty$ .

( $\alpha$ ) Zu  $\beta \in k$  existiere ein zyklischer Körper  $K$  vom Grade  $\ell^m$  über  $k$ , sodass  $(\beta, K) = A$ ,  $A^{\ell^m} \sim k$ . — Zu  $K$  gehört ein gewisser  $\ell^m$ -ter Charakter von  $k|k^{\ell^m}$ :  $\chi_{\ell^m}(\alpha) = \zeta_{\ell^m}^{xa+yb\ell^{m-m_0}}$  für ein allgemeines Element  $\alpha$ . Für  $\beta$  folgt speziell nach Voraussetzung  $\chi(\beta) = \zeta^{xc+yd\ell^{m-m_0}} = \zeta^s$  mit  $(s, \ell) = 1$ . Also  $xc + yd\ell^{m-m_0} \equiv s(\ell^m)$ . Hieraus mod  $\ell^{m-m_0}$ :  $xc \equiv s(\ell^{m-m_0})$ . Hieraus folgt wegen der Primitivität von  $\chi_{\ell^m}$  notwendig  $c \not\equiv 0(\ell)$ .

( $\beta$ ) Umgekehrt gehört zu jedem Element  $\beta \in k$ , für welches  $c \not\equiv 0(\ell)$  ist, ein echter  $\ell^m$ -ter Charakter. Man muss dazu zeigen, dass sich  $x, y$  unter dieser Voraussetzung finden lassen. Die Kongruenz  $xc + yd\ell^{m-m_0} \equiv s(\ell^m)$ , wo  $c \not\equiv 0(\ell)$  und  $s \not\equiv 0(\ell)$  sind, ist zu lösen.

Man macht den Ansatz:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_1\ell + \dots + x_{m-m_0-1}\ell^{m-m_0-1} \\ c &\equiv c_0 + c_1\ell + \dots + c_{m-m_0-1}\ell^{m-m_0-1} \\ s &\equiv s_0 + s_1\ell + \dots + s_{m-m_0-1}\ell^{m-m_0-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{xc \equiv s(\ell^{m-m_0})}{\dots (\ell^{m-m_0})} &\longrightarrow x_0c_0 + (x_1c_0 + x_0c_1)\ell + \dots \equiv s_0 + s_1\ell + \dots \\ &\longrightarrow x_0c_0 \equiv s_0(\ell), \quad x_0c_1 + x_1c_0 \equiv s_1(\ell), \dots \end{aligned}$$

Das ist ein inhomogenes Gleichungssystem für  $m - m_0$  Unbestimmte  $x_0, \dots, x_{m-m_0-1}$  in  $m - m_0$  Gleichungen. Notwendig und hinreichend für seine Lösbarkeit im Restklassenkörper mod  $\ell$  ist das Nichtverschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} c_0 & & & \\ c_1 & c_0 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & c_0 \end{vmatrix} = c_0^{m-m_0}. \text{ Nach Vor. ist } c_0 \not\equiv 0(\ell). \text{ Also}$$

$$\text{kommt } x_0 = \frac{\begin{vmatrix} s_0 & & & \\ s_1 & c_0 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & c_0 \end{vmatrix}}{c_0^{m-m_0}} = \frac{s_0}{c_0} \not\equiv 0(\ell). \text{ Wir sind fertig.}$$

Man hätte auch  $xc + y\ell^{m-m_0}d \equiv s(\ell^m)$  als mod  $\ell^m$  abgebrochene  $\ell$ -adische diophantische Gleichung auffassen können. Dann folgte unter der Voraussetzung, dass  $(c, \ell) = 1$  ist, auch eine Lösung  $(x, \ell) = 1$  usf....

Nun verlangen wir nicht mehr, dass  $(K : k) = \ell^m$  ist, sondern nur  $(K : k) = \ell^n$ ,  $n > m$ . Die Bedingungen ergeben dann:

**( $\alpha\alpha$ )** Falls ein  $K$  vom Grade  $\ell^n$  zu  $\beta$  existiert, so kann nur werden

$$\chi_{\ell^n}(\beta) = \zeta_{\ell^n}^{xc+y\ell^{n-n_0}d} = \zeta_{\ell^n}^{s\ell^{n-m}}, \quad (s, \ell) = 1. \text{ Also}$$

$xc + y\ell^{n-n_0}d \equiv s\ell^{n-m}(\ell^n)$ , denn  $s$  kann durch Änderung der speziellen E. W.  $\zeta_{\ell^n}$  stets zu 1 normiert werden. Wegen  $(K : k) = \ell^n$  ist  $(x, \ell) = 1$ . Also folgt aus  $xc \equiv 0(\ell^{n-m})$ , falls  $n-n_0 \geq n-m$  ist, dass  $c \equiv 0(\ell^{n-m})$ . Sogar  $c$  genau durch  $\ell^{n-m}$  teilbar, da sonst ein Widerspruch zur Hauptkongruenz folgen würde. Wenn  $n-m > n-n_0$  ist, so folgt  $xc \equiv 0(\ell^{n-n_0})$ ; also  $c \equiv 0(\ell^{n-n_0})$ .

**( $\beta\beta$ )** Wenn  $n_0 \leq m$  ist, so sieht man die Umkehrung ähnlich wie unter **( $\beta$ )** ein.

Unangenehm ist, dass in das Resultat unter **( $\alpha\alpha$ )** die Größenbeziehung zwischen  $n_0$  (zu gegebenem festen  $n$ ) und  $m$  eingeht. Für genügend großes  $n$  wird ja  $n_0$  konstant, aber daraus folgt auch nicht mehr als eine hinreichende Bedingung für die Zulässigkeit der  $\beta$  als Operatorenpotenzen in genügend hohem Grade  $\ell^n$  der Algebra  $A$ .

**2.)  $\mathfrak{p}|\ell$      $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{p}_\infty$ .**

**( $\alpha$ )** Zu  $\beta$  existiere ein  $(K : k) = \ell^m$  mit  $\text{ord}(\beta, K) = \ell^m$ . Es ist also  $\chi_{\ell^m}(\beta) = \zeta_{\ell^m}^{xc+yd} = \zeta_{\ell^m}^s$ ,  $(s, \ell) = 1$ . Dabei sind  $c, d$  die Ordnungszahlen von  $\beta$  bezüglich  $2^n$  der durch  $K$  bestimmten Basisklassen der Ordnung  $\ell^m$ . Man erhält die Kongruenz  $xc + yd \equiv s(\ell^m)$ . Hieraus kann man nur schliessen, dass  $\beta$  nicht äquivalent einer  $\ell$ -ten Potenz in  $k|k^{\ell^m}$  ist.

**( $\beta$ )** Umgekehrt sei  $\beta$  nicht  $\ell$ -te Potenz (für mindestens eine Basisklasse der Ordnung  $\ell^m$  nicht). Dann sind aus  $xc + yd \equiv s(\ell^m)$  stets  $x, y$  mit  $(x, y, \ell) = 1$  bestimmbar.

( $\alpha\alpha$ ) Nun nehmen wir wieder an, dass zu  $\beta$  ein  $K$  mit  $(K : k) = \ell^n$ ,  $n > m$  existiert, sodass  $\text{ord}(\beta, K) = \ell^m$  wird. Es existieren also  $(x, y, \ell) = 1$ . Für  $\beta$  gilt  $\chi_{\ell^n}(\beta) = \zeta_{\ell^n}^{xc+yd} = \zeta_{\ell^n}^{s\ell^{n-m}}$ . Also  $xc + yd \equiv s\ell^{n-m}(\ell^n) \longrightarrow xc + yd \equiv 0(\ell^{n-m})$ . Zur Vereinfachung können wir immer  $x = 1$  annehmen.

Wir machen den Ansatz:

$$\begin{aligned} c &= c_0 + c_1\ell + \dots + c_{n-1}\ell^{n-1} \\ d &= d_0 + d_1\ell + \dots + d_{n-1}\ell^{n-1} \\ y &= y_0 + y_1\ell + \dots + y_{n-1}\ell^{n-1} \\ s &= s_0 + s_1\ell + \dots + s_{m-1}\ell^{m-1}. \end{aligned}$$

Dann kommt

$$\begin{aligned} (c_0 + c_1\ell + \dots) + (y_0d_0 + (y_1d_0 + y_0d_1)\ell + \dots) &\equiv \\ &\equiv s_0\ell^{n-m} + s_1\ell^{n-m+1} + \dots(\ell^n). \end{aligned}$$

Also

$$\begin{array}{ll} c_0 + y_0d_0 & \equiv 0(\ell) \\ c_1 + y_1d_0 + y_0d_1 & \equiv 0(\ell) \\ \dots & \dots \\ c_{n-m-1} + y_{n-m-1}d_0 + \dots + y_0d_{n-m-1} & \equiv 0(\ell) \\ c_{n-m} + y_{n-m}d_0 + \dots + y_0d_{n-m} & \equiv s_0\ell^{n-m}(\ell) \\ \dots & \dots \\ c_{n-m+\nu} + y_{n-m+\nu}d_0 + \dots + y_0d_{n-m+\nu} & \equiv s_\nu\ell^{n-m+\nu}(\ell) \\ \dots & \dots \\ c_{n-1} + y_{n-1}d_0 + \dots + y_0d_{n-1} & \equiv s_{m-1}\ell^{n-1}(\ell). \end{array}$$

Die  $n - m$  ersten Kongruenzen  $c_\mu + y_\mu d_0 + \dots + y_0 d_\mu \equiv 0(\ell)$  [ $\mu = 0, \dots, n - m - 1$ ] ergeben  $c_\mu \equiv -(y_\mu d_0 + \dots + y_0 d_\mu)(\ell)$ . Also  $c_0 \not\equiv 0(\ell) \iff d_0 \not\equiv 0(\ell)$ , da nach Vor.  $y_0 \not\equiv 0(\ell)$  ist. Und falls  $\left. \begin{array}{l} c_0 \equiv \dots \equiv c_{\mu-1} \equiv 0(\ell) \\ d_0 \equiv \dots \equiv d_{\mu-1} \equiv 0(\ell) \end{array} \right\}$ , so ist  $c_\mu \not\equiv 0(\ell) \iff d_\mu \not\equiv 0(\ell)$ . D. h. für  $\mu = 0, \dots, n - m - 1$  ist  $v_\ell(c) = v_\ell(d)$ .

Falls  $v_\ell(c) = v_\ell(d) = n - m - 1$  ist, so kann wegen  $s_0 \not\equiv 0(\ell)$  nur sein  $c = c'_0\ell^{n-m}$ ,  $d = d'_0\ell^{n-m+\varrho}$  ( $\varrho \geq 1$ ) oder  $c = c_0\ell^{n-m+\sigma}$  ( $\sigma \geq 1$ )  $d =$

$d_0 \ell^{n-m}$ ; aber nicht gleichzeitig  $v_L(c), v_L(d) > n - m$ .

( $\beta\beta$ ) Umgekehrt folgt aus  $v_\ell(c) = v_\ell(d) \leq n - m - 1$ , dass zu  $\ell$  prime Elemente  $x, y$  zur Charakterbestimmung gefunden werden können. Die Ordnungen  $c, d$  von  $\beta$  beziehen sich dann auf 2 beliebige Klassen der Ordnung  $\ell^n$  aus  $k|k^{\ell^n}$ .

Für  $v_\ell(c) = n - m, v_\ell(d) = n - m + \varrho$  kann man auch die Kongruenz lösen.

Da  $n \geq m$ , wenn man nur auf die Algebrenklasse  $\mathfrak{A}$  achtet, beliebig gewählt werden kann, so sieht man, dass hier die Einschränkungen wie in ( $\beta\beta$ ) zu **1.**) nicht auftreten. —

### 3.) $\mathfrak{p}|p_\infty$

Hier ist trivialerweise  $\beta < 0$  notwendig und hinreichend.

---

Wenn  $u^{\ell^m} = \beta$  ist, so wird  $Nu = \beta \cdot (-1)^{\ell^m + 1}$ . Hieraus folgt, dass  $\beta$  selbst dann und nur dann red. Norm wird, wenn keine unendlichen Verzweigungsstellen der Klasse  $\mathfrak{A}$  existieren.

Die oben gefundenen Bedingungen erlauben es nun in speziellen Fällen zu entscheiden, wann ein  $\beta \in K$  als Operatorpotenz für den genauen lokalen Algebrenexponenten zulässig ist.

Für die Stellen  $\mathfrak{p} \nmid \ell, \mathfrak{p} \nmid p_\infty$  konstruiere ich nun endlich viele spezielle Elemente  $\beta_i$  (für  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ ), die als Operatoren zulässig sind. Es mögen  $\mathfrak{p}_j$  die in  $\ell$  aufgehenden Verzweigungsstellen der Algebra  $A$  bezeichnen.

Zu jedem Element  $\beta = \mathfrak{p}_1^{\sigma_1} \dots \mathfrak{p}_s^{\sigma_s} \cdot w$  mit  $\text{ord}_{\mathfrak{p}_j}(\beta) \not\equiv 0(\ell)$  und  $(\sigma_i, \ell) = 1$  existiert ein Körper  $K$ , und es wird  $u^{\ell^m} = \beta$ .

Es sollen nun Elemente  $\beta_i = \mathfrak{p}_i \cdot w_i, (w_i, \prod_{i=1}^s \mathfrak{p}_i) = 1$  als reduzierte Normen dargestellt werden. Dazu sei  $\beta'_i = \mathfrak{p}_1^{\sigma_1} \dots \mathfrak{p}_i^{1+\ell} \dots \mathfrak{p}_s^{\sigma_s} \cdot w'_i$  und  $\beta''_i = \mathfrak{p}_1^{\sigma_1} \dots \mathfrak{p}_i^1 \dots \mathfrak{p}_s^{\sigma_s} \cdot w''_i$  so bestimmt, dass  $u_i^{\ell^m} = \beta'_i$  und  $u_i^{\ell^m} = \beta''_i$  wird. Solche Elemente existieren für  $(\sigma_i, \ell) = 1$  immer, da  $w'_i, w''_i$  passend bestimmbar sind, sodass für  $\mathfrak{p}_j$  die Ordnungsbeziehung gilt. Dann wird  $Nu'_i \cdot (-1)^{\ell^n + 1} = \beta'_i, Nu''_i \cdot (-1)^{\ell^n + 1} = \beta''_i$ . Wir wählen nun  $\beta_i = \beta'_i \beta''_i^{-1}$ . Dann kommt  $Nu'_i u''_i^{-1} = Nu''_i^{-1} u'_i = \beta_i$ . Vorzeichen von  $\beta_i$  ist auch festgelegt durch  $\beta'_i, \beta''_i$  ( $\text{sign } \beta_i = +1$ ). Für  $i = 1, \dots, s$  können solche Normalelemente  $\beta_i$  bestimmt werden.

Jetzt sei  $\beta = \prod \mathfrak{p}_i^{\tau_i} \cdot w$  ein beliebiges Element aus  $k$  (falls  $A$  im Unendlichen



verzweigt  $\beta > 0$ ).

Dann wird  $\beta \Pi \beta_i^{-\tau_i} = \Pi \mathfrak{p}_i^{\tau_i} \Pi \mathfrak{p}_i^{-\tau_i} \Pi w_i^{-1} \cdot w = \Pi w_i^{-1} \cdot w$  ein Element  $\beta^*$ , das für  $\mathfrak{p}_i$  keine Beiträge hat. Nach Ihrem Kriterium ist dann aber [ , falls  $\beta^* > 0$  ist für im Unendlichen verzweigte Algebren  $A$  ]  $\beta^*$  als Norm aus einem zyklischen Zerfällungskörper  $K^*$  darstellbar:

$$\beta^* = NB^*.$$

Also  $\beta \Pi \beta_i^{-\sigma_i} = NB^* \longrightarrow \beta = \Pi \beta_i^{-\sigma_i} NB^* = \Pi N(u'_i u''_i)^{-\sigma_i} NB^* = N(B^* \Pi u''_i^{\sigma_i} \Pi u'_i^{-\sigma_i})$ , denn durch Bezugnahme auf die absolute irreduzible Darstellung  $A\Omega$  folgt  $N\bar{A}C = N\bar{C}A$  für  $C, \bar{A}$  aus  $A$ . —

Hiermit ist gezeigt:

*Bis auf die Vorzeichenbedingung ist jedes Element eines algebraischen Zahlkörpers als reduzierte Norm aus einer ihn enthaltenden normalen einfachen Algebra darstellbar.*

Nun möchte ich noch meine Bemerkungen zu der Arbeit von F. K. Schmidt über die Eindeutigkeit von Funktionenkörpern einer Variablen, falls der Koeffizientenkörper den Hilbertschen Irreduzibilitätssatz ermöglicht, skizzieren.

**Bezeichnungen.** Im wesentlichen wie in der Arbeit von F. K. Schmidt. Aus Gründen, deren Berechtigung schon das Studium der klassischen Theorie der algebraischen Flächen verteidigt, wird im Falle der Funktionenkörper mehrerer Variabler nicht mehr „birational invariant“ gearbeitet. Die Primdivisoren  $\mathfrak{P}$  (Stellen) sind diejenigen Homomorphismen eines Kpers vom Transzendenzgrade  $r$ , deren Restklassenkörper vom Transzendenzgrade  $r - 1$  ist. Die formale arithmetische Theorie dieser Divisoren ist die gleiche wie im Falle  $r = 1$ . Wir haben also die Existenz von Primelement und die Eigenschaften der Zerlegungsgruppe (im Falle galoisscher Relativkörper) gesichert. Dann gilt **Satz C**:

Die Gesamtheit der Zerlegungsgruppen aller Primdivisoren der Höchstdimension von  $N$  stimmt überein mit der Gesamtheit der Untergruppen von  $\mathfrak{G}$ .

**Beweis:**

1.) Die Dedekindsche Regel gilt wegen der arithmetischen Eigenschaften der Stellen und der Endlichkeit der Diskriminante.  $K \supseteq K' = k(\vartheta) \supseteq k \supseteq$

$\Omega(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathfrak{P}$  eine Stelle von  $K$ ,  
 $(\vartheta) = \mathfrak{P}^e \mathfrak{R}$ ,  $e \geq 0$ ,  $\Delta_k(\vartheta) \not\equiv 0(\mathfrak{P}) \longrightarrow (\tilde{K}'_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}'_{\mathfrak{P}}) = (\tilde{\vartheta}_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}_{\mathfrak{P}})$ .  
 [Betrachtung der definierenden Gleichung, mit  $\mathfrak{P}$ -adischen bekannten Schlüssen.]

2.)  $K \supseteq k' = \Omega(\eta_1, \dots, \eta_r) \supseteq \Omega$  ( $K/k'$  separabel)  $\longrightarrow$   
 $\longrightarrow$  existieren unendlich viele  $\mathfrak{P}$  in  $K$  mit

- a.)  $\eta_1 \equiv a_1(\mathfrak{P})$ ,  $a_1 \in \Omega$   
 $\eta_i \equiv \tilde{\eta}_i(\mathfrak{P})$  ( $i = 2, \dots, r$ )  
 $\tilde{\eta}_i \neq \infty$  aus  $\tilde{k}'_{\mathfrak{P}}$  und Transzendente  
 b.)  $(\tilde{K}'_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}'_{\mathfrak{P}}) = (K : k')$ .

**Beweis:** Sei  $F(x; \eta_1, \dots, \eta_r) = x^m + A_1(\eta_1, \dots, \eta_r)x^{m-1} + \dots + A_m(\eta_1, \dots, \eta_r)$  mit  $A_i(\eta_1, \dots, \eta_r) \in \Omega[\eta_1, \dots, \eta_r]$  ein definierendes Polynom von  $K/\Omega(\eta_1, \dots, \eta_r)$ . Sei  $\varphi$  eine 0-Stelle:  $F(\varphi; \eta_1, \dots, \eta_r) = 0$ , also  $K = k'(\varphi)$ . Über  $\Omega$  gilt nach Voraussetzung der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz. Es gibt also unendlich viele  $a \in \Omega$ , sodass bei  $\eta_1 \longrightarrow a$  aus  $F(x; \eta_1, \dots, \eta_r)$  ein über  $\Omega$  irreduzibles Polynom  $F(x; a, \eta_2, \dots, \eta_r)$  entsteht. Jedem solchen  $a$  ordne man einen Primdivisor  $\mathfrak{P}$  zu, sodass  $\eta_1 - a \equiv 0(\mathfrak{P})$ . [Es sind nur endlichviele Stellen  $\mathfrak{P}$  auszuschließen, für sie ist  $\mathfrak{P} | \Delta_k(\varphi)$  oder  $\varphi \equiv \infty(\mathfrak{P})$ ]. Diese unendlichvielen Stellen erfüllen:

- a.)  $\eta_1 \equiv a(\mathfrak{P})$ ,  $a \in \Omega$  und  
 $\eta_i \equiv \tilde{\eta}_i(\mathfrak{P})$ ,  $\tilde{\eta}_i$  sind unabhängige transzendente Elemente,  
 da  $\mathfrak{P}$  nur  $\eta_1 - a$  teilt  
 b.) Nach Wahl von  $\mathfrak{P}$  ist  $\varphi$  endlich mod  $\mathfrak{P}$ ,  $\Delta_{k'}(\varphi) \not\equiv 0(\mathfrak{P})$ .

Nach Dedekind also

$$(1) \quad (\tilde{K}'_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}'_{\mathfrak{P}}) = (\tilde{\varphi}_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}'_{\mathfrak{P}})$$

$$0 = F(\varphi; \eta_1, \dots, \eta_r) \equiv F(\varphi; a, \eta_2, \dots, \eta_r) \pmod{\mathfrak{P}},$$

$F(\varphi; a, \eta_2, \dots, \eta_r)$  über  $\Omega$  und  $\Omega(\eta_i, \dots, \eta_r) \cong \widetilde{\Omega(\eta_i, \dots, \eta_r)} \cong \widetilde{\Omega}(\tilde{\eta}_i, \dots, \tilde{\eta}_r)$   
 $(i = 2, \dots)$  [ $\Omega \equiv \widetilde{\Omega}_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{P})$ ] irreduzibel. D. h.  $\varphi$  ist 0-Stelle von  $F(x; a; \tilde{\eta}_2, \dots, \tilde{\eta}_r) \pmod{\mathfrak{P}}$ . Wegen  $\tilde{\eta}_1 \mathfrak{P} = \tilde{a}_{\mathfrak{P}} \in \widetilde{\Omega}_{\mathfrak{P}}$  ist  $\widetilde{\Omega}_{\mathfrak{P}}(\tilde{\eta}_1 \mathfrak{P}) = \widetilde{\Omega}_{\mathfrak{P}}$  und da  $\widetilde{\Omega}_{\mathfrak{P}} \subseteq \dots \subseteq \Omega(\eta_i, \dots, \eta_r)_{\mathfrak{P}} \subseteq \Omega(\eta_{i-1}, \dots, \eta_r)_{\mathfrak{P}}$ , so ist  $F(x, a, \tilde{\eta}_2, \dots, \tilde{\eta}_r)$  auch über  $k' = \Omega(\eta_1, \dots, \eta_r) \pmod{\mathfrak{P}}$  irreduzibel. Deshalb

$$(2) \quad (\tilde{\varphi}_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}'_{\mathfrak{P}}) = \text{grad}_x (F(x; a, \eta_2, \dots, \eta_r)) =$$

$$= \text{grad}_x (F(x; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r)) = (K : k').$$

Aus (1) und (2) folgt (b).

Alles andere ergibt sich nun nach den gleichen Schlüssen wie in der Arbeit von F. K. Schmidt.

Sie haben ganz recht, dass ich nicht flatterig werden soll. Ihre Ermahnung kam gerade wieder zur richtigen Zeit. Ich will nun vorerst die Theorie der hyperkomplexen Ordnungen weiter behandeln.

Ich fand

- 1.)  $(\mathfrak{E}_{\mathfrak{M}} : \mathfrak{E}_{\mathfrak{D}}) = \text{endlich}$  für die Einheitengruppen von ineinander enthaltenen Ordnungen  $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{M}$
- 2.) Die maximalen abelschen Untergruppen von Einheitengruppen von Divisionsalgebren sind stets von der Form  $\mathfrak{Z} \times \mathfrak{A}_1 \times \dots \times \mathfrak{A}_s$ ,  $\mathfrak{Z}$  ein endlicher Zyklus,  $\mathfrak{A}_i$  unendliche Zyklen. Die Anzahl  $s$  ist durch die unendlichen Primstellen vom Zentrum bestimmt und von deren Verzweigungen.
- 3.) Die Klassenzahlen mod den Führern sind endlich. Bestimmung von Klassenzahlquotienten.
- 4.) Ist  $\mathfrak{D}$  eine Ordnung der Algebra  $A = D_r$  und  $\mathfrak{a}$  ein in einer einseitigen Komponente  $L$  (mit dem Automorphismenschiefkörper  $S \cong D$ ) liegendes  $\mathfrak{D}$ -Linksideal:  $\mathfrak{D}\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{a} \subset L$ , so ist die Anzahl der  $S$ -Klassen endlich.  $\mathfrak{a}_1 \sim \mathfrak{a}_2 \iff \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1 s$  mit  $s \in S$ . Das war eine von Herrn Witt gestellte Frage. Ihre Beantwortung gibt einen neuen Beweis des Minkowski'schen Satzes in Speiser, Gruppentheorie II Aufl., § 65. Satz 186. p. 207. — Das will ich, wenn ich noch einige andere idealtheoretische Probleme erledigt habe, vielleicht zusammenfassen. —

Es ist möglich, dass ich ungefähr am 15. VIII (oder einige Tage später) in Göttingen sein kann. Vielleicht sind Sie dann schon zurück. Am 11. IX. will ich nach Princeton abfahren.

Mit den besten Grüßen  
Ihr sehr ergebener  
O. Schilling.

## 1.16 01.07.1935, Hasse to Schilling

1. 7. 1935

Lieber Herr Schilling,

Herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief. Die Sache mit den Normen aus Algebren interessiert mich jetzt sehr. Ihre zusätzliche Überlegung ist im Prinzip in Ordnung und erledigt zusammen mit dem, was schon da war, die ganze Frage zur vollen Zufriedenheit. Nur ist sowohl in dem, was ich Ihnen schrieb, als auch in dem, was Sie hinzufügten, noch ein kleiner Fehler, und zwar bei der expliziten Bestimmung der lokalen Kriterien. Ich war zu voreilig, wenn ich allein aus der Teilbarkeitsbedingung für die Ordnungszahl von  $\alpha$  auf die Existenz eines Charakters der verlangten Art schloss. Es kommt noch eine Bedingung hinzu, die die Ordnungszahl von  $\alpha$  mit dem Index (Exponenten der Primitivwurzel) von  $\alpha$  verbindet.

Ich will nun das Ganze noch einmal im Zusammenhang durchdenken und dann für den Druck aufschreiben. Ist es Ihnen recht, wenn wir daraus eine gemeinsame Veröffentlichung machen?

Der Hauptteil dessen, was ich Ihnen das letztmal schrieb, lässt sich noch erheblich kürzer und prägnanter sagen.

Sei  $k$  ein algebraischer Zahlkörper,  $A$  eine normale einfache Algebra über  $k$ ,  $n$  ihr Grad,  $m_p$  ihre  $p$ -Indizes,  $\alpha \neq 0$  eine Zahl aus  $k$ .

*Damit ein maximal-zyklischer Teilkörper  $K$  von  $A$  derart existiert, dass  $\alpha$  Norm aus  $K$  ist, ist notwendig und hinreichend, dass für jede Primstelle  $p$  von  $k$  ein Charakter  $\chi_p$  der Ordnung  $m_p$  von  $k_p$  existiert derart, dass  $\chi_p(\alpha) = 1$  ist.*

**Beweis.** a.) Existiert ein  $K$  der verlangten Art, so hat der zugeordnete Charakter  $\left(\frac{\varepsilon, K}{p}\right)$  von  $k_p$  ( $\varepsilon$  variabel in  $k_p$ ) für jedes  $p$  eine durch  $m_p$  teilbare Ordnung  $n_p = t m_p$ , und es ist  $\left(\frac{\alpha, K}{p}\right) = 1$ . Setzt man dann  $\chi_p(\varepsilon) \cong \left(\frac{\varepsilon, K}{p}\right)^t$ , so ist  $\chi_p$  ein Charakter der angegebenen Art.

b.) Ist  $\chi_p$  ein System von Charakteren der angegebenen Art, so existiert

nach Grunwald ein zyklischer Körper  $K$  über  $k$  vom Grade  $n$  derart, dass  $\left(\frac{\varepsilon, K}{p}\right) = \chi_p(\varepsilon)$  für alle endlich vielen  $p$  mit  $m_p \neq 1$  oder  $p|\alpha$  gilt, und dass zudem  $K$  entsprechend der Primzerlegung  $n = \prod_i \ell_i^{v_i}$  ausser bei diesen  $p$  nur noch an Primstellen  $q_{\ell_i}$  von den Ordnungen  $\ell_i^{v_i}$  verzweigt ist. Daraus folgt sofort

$$\left(\frac{\alpha, K}{p}\right) = 1 \quad \begin{array}{l} 1. \text{ für die genannten } p \text{ nach Konstruktion,} \\ 2. \text{ für die übrigen } p \neq q_{\ell} \text{ trivialerweise,} \\ 3. \text{ für die } p = q_{\ell} \text{ nach der Produktformel.} \end{array}$$

Es ist also in der Tat  $\alpha$  Norm aus  $K$ , d. h. es existiert ein  $K$  der verlangten Art.

Nach eben diesem Muster gedenke ich den von Ihnen hinzugefügten Teil anzulegen. Es wird allerdings noch einige Zeit hingehen, bis ich dazu komme.

Ihre Aufzeichnungen über den Regularitätsbereich bei zwei Veränderlichen habe ich mit Interesse angesehen. Stellen Sie doch bitte daraus selber eine kleine druckfertige Note zusammen.

Ich kann noch nicht genau sagen, ob ich Mitte August hier sein werde. Das hängt noch von Davenport ab, der eben, wie Sie vielleicht wissen, seinen Vater verloren hat. Dadurch werden sich wohl unsere gemeinsamen Reisepläne etwas verschieben. Es wäre schade, wenn ich Sie vor Ihrer Abreise nach Princeton nicht mehr sehen würde. Klappt es Mitte August nicht, so würde ich es begrüßen, wenn Sie auf dem Wege nach Amerika in Göttingen Station macht. Mit herzlichen Grüßen

stets Ihr  
H. Hasse

## 1.17 02.07.1935, Schilling to Hasse

DR. OTTO SCHILLING

DEN 2-VII 1935

Sehr geehrter Herr Professor,

Darf ich Sie um eine Gefälligkeit bitten? Um möglichst rasch ein Visum zur Einreise nach USA zu bekommen, brauche ich eine Anzahl „Führungszeugnisse“. Ich wäre Ihnen sehr dankbar, wenn Sie mir einen an das

American Consulate General

2 Harley Street, London W 1

gerichteten Brief (möglichst offizieller Briefbogen!) schicken könnten, in dem Sie bestätigen, dass ich Sie während der Zeit in der Sie mich kennen nicht bestohlen und betrogen habe, usf.

Mit den besten Grüßen

Ihr sehr ergebener

O. Schilling.

## 1.18 11.07.1935, Hasse to Schilling

Dr. Otto Schilling  
34, Jesus Lane  
C a m b r i d g e  
*England*

11. 7. 35

Lieber Herr Schilling,

Ihrem Wunsche entsprechend habe ich an American Consular Service, London geschrieben. Heute erhalte ich folgende Antwort: (File Nr. 811.11 – CCB|DP.)

The receipt is acknowledged of your letter of July 5 concerning Dr. O. Sch., who, it appears, contemplates going to Princeton as a research student. No record has been found to indicate that Dr. Sch. has yet made application at this office for a visa, but, when he does so, your letter will be given careful consideration in connection with his case.

(gez. CC. Broy, Amer. Consul)

Bei der Normenfrage bin ich noch auf eine Schwierigkeit gestossen. Ich hoffe bald darauf zurückzukommen.

Herzlichst Ihr  
H. Hasse

## 1.19 13.07.1935, Schilling to Hasse

13-VII-35

Sehr geehrter Herr Professor!

Ich danke Ihnen für die Auskunft an das amerikanische Konsulat. Die Karte des Konsulates findet ihre Erklärung darin, dass scheinbar mein Vorsprechen nicht registriert worden ist. Obgleich mir eine ganze Reihe von Papieren übergeben wurde zum Ausfüllen. Im Augenblick warte ich nur noch auf die offizielle Zulassungsbestätigung aus Princeton. —

Seit 14 Tagen ist auch Frl. Taussky in England. Sie wohnt im Girton-College. Wir wollen versuchen die Arbeiten von Rèdei, Reichardt und Janaga hyperkomplex zu deuten. Ob es gelingen wird erscheint aber noch zweifelhaft.

Am letzten Mittwoch habe ich in der study group von Herrn Hall über einen Abschnitt aus meiner Dissertation gesprochen. Ich bin zu meiner eigenen Überraschung mit der Sprache ganz gut fertig geworden. In den  $2\frac{1}{2}$  Monaten meines Aufenthaltes musste ich ja auch soviel gelernt haben!

Übrigens hat R. Brauer eine ständige Professur in Kanada bekommen. — Hoffentlich lässt sich die neue Schwierigkeit beim Normensatz überwinden. Es wäre eine große Freude für mich, wenn Sie bei der Publikation mich mit nennen könnten.

In der Theorie der hyperkomplexen Ordnungen bin ich auch ein Stück vorwärts gekommen. Ich glaube auch eine neue Einsicht in der Struktur der Einheitengruppen bekommen zu haben. Die endliche Anzahl der Erzeugenden ist in diesen freien Gruppen wohl gesichert.

Von Davenport hörte ich, dass Sie in die Schw. fahren. Ich bin wahrscheinlich am 6. VIII. in Zürich. Vielleicht könnte ich Sie dann treffen?

Beste Grüsse  
Ihr ergebener  
Otto Schilling.



## 1.20 26.08.1935, Hasse to Schilling

Prof. Dr. H. H a s s e .

Göttingen, den 26. August 1935.

-----  
Bunsenstr. 3-5

Herrn

Dr. Otto Schilling,

A p o l d a i. Th.  
-----

Lieber Herr Schilling!

Herzlichen Dank für die Zusendung Ihres Manuskriptes. Ich habe gefunden, dass man den Beweis noch kürzer machen kann, und lege Ihnen eine solche kürzere Fassung bei mit der Bitte, sie sich durchzusehen und mir dann mit Ihrem Einverständnis wieder zuzusenden.

Die Verallgemeinerung auf beliebige Gruppen scheint mir doch schwieriger als ich zunächst glaubte. Es würde sich aber sehr lohnen, wenn Sie in dieser Richtung weitergehen würden.

Mit herzlichen Grüßen und besten Wünschen

I h r

H. Hasse

## 1.21 28.08.1935, Schilling to Hasse

DR. OTTO SCHILLING

DEN 28–VIII 1935

Sehr geehrter Herr Professor,

Anbei schicke ich die von Ihnen in so liebenswürdiger Weise vermittelte neue klarere Fassung des Beweises zurück. Selbstverständlich wird sie so publiziert! In den nächsten Tagen hoffe ich die Bemerkungen zu der anderen Note auch fertig zu machen. Dann könnte ich Ihnen jenes Manuskript noch vor meiner Abreise schicken.

Mit Dankbarkeit

Ihr

O. Schilling.

## 1.22 26.09.1935, Schilling to Hasse

OTTO SCHILLING

DEN 26-9-1935.

Sehr geehrter Herr Professor,

Während der Überfahrt hatte ich Zeit, mich noch einmal mit dem Normensatz für einfache Algebren  $A$  über Zahlkörper  $k$  zu beschäftigen. Ich möchte Ihnen dazu noch folgendes mitteilen:

Wie früher festgestellt, genügt es Algebren  $A$  von Primzahlpotenzgrade  $\ell^n$  zu betrachten. Wir fragen nach Bedingungen, unter welchen ein Element  $\beta \in k$  sich als Norm aus einem maximalen zyklischen Teilkörper  $K$  von  $A$  darstellen lässt oder wann  $\beta$  als Faktorensystem zu einer zyklischen Darstellung von  $A$  brauchbar ist. Mit Hilfe des Grunwald'schen Existenzsatzes reduzieren sich bekanntlich beide Fragen auf eine Anzahl lokaler Probleme für die Verzweigungsstellen der Algebra  $A$ .

An den Stellen  $\mathfrak{P}|\ell$  und  $\mathfrak{p}|p_\infty$  ergeben sich wie früher festgestellt sehr einfache Bedingungen für beide Fragen. Speziell für das Normsein kam es auf die Lösung von  $xc+yd \equiv 0(\ell^n)$  an. Lösungen  $(x, y, \ell) = 1$  existieren immer bei gegebenem  $c, d$ . (Zur Bezeichnung vgl. Ihre Mitteilungen vom 19. 6.) Damit  $\beta$  Operatorpotenz sein kann, war für diese Stellen hinreichend, dass  $\beta$  nicht  $\ell$ -te Potenz ist.

Bleiben die verzweigten  $\mathfrak{p}$  mit  $\mathfrak{p} \nmid \ell, p_\infty$ . Hier lauten die Bedingungen:

I.) **Normsein:**  $\beta =_{(\ell^n)} \pi^c \omega^d$

$$\begin{array}{ll} n_0 \geq 1, \ell^v || d & - \ell^{n-n_0+v} | c \\ n_0 = 0 & - \ell^n | c. \end{array}$$

II.) **Faktorensystem zu  $A$  sein:**

Hinreichend jedenfalls  $(c, \ell) = 1$ . —

Aus I.) folgt, dass speziell zu Elementen  $\beta$ , die zu  $\mathfrak{p}$  prim sind ( $c = 0$ ), primitive  $\ell^n$ -te Charaktere  $\chi_{\mathfrak{p}}$  von  $k|k^{\ell^n}$  existieren mit  $\chi_{\mathfrak{p}}(\beta) = 1$ . Man

bestimme zuerst ein  $y$  mit  $yd^{\ell n - n_0} \equiv 0(\ell)$ , dann wähle man ein zu  $\ell$  primes  $x$ . Jeder solche Charakter erfüllt die Normbedingungen. Es zeigt sich so, dass Elemente  $\beta \in k$ , die zu  $P = \prod_{\mathfrak{p}|\ell, p_\infty} \mathfrak{p}$  prim sind, stets Normen aus passenden zyklischen Teilkörpern sind. (Für verzweigte  $\mathfrak{p}|\ell$  sind ja die Bedingungen stets erfüllbar.)

— Nun schliesse man so weiter; wir setzen aber noch  $(\ell, 2) = 1$  voraus:

Es existieren Elemente  $\beta_i = \mathfrak{p}_i \mathfrak{r}_i$  mit  $(\mathfrak{r}_i, P) = 1$  für die  $r$  Verzweigungsstellen  $\mathfrak{p}_i \nmid \ell, p_\infty$ , die reduzierte Normen aus  $A$  werden.

Dazu sei  $\beta'_i = \mathfrak{p}_1^{\lambda_1^{(i)}} \dots \mathfrak{p}_{i-1}^{\lambda_{i-1}^{(i)}} \mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_{i+1}^{\lambda_{i+1}^{(i)}} \dots \mathfrak{p}_r^{\lambda_r^{(i)}} \cdot \mathfrak{r}'_i$  und  $\beta''_i = \mathfrak{p}_1^{\lambda_1^{(i)}} \dots \mathfrak{p}_{i-1}^{\lambda_{i-1}^{(i)}} \mathfrak{p}_i^2 \mathfrak{p}_{i+1}^{\lambda_{i+1}^{(i)}} \dots \mathfrak{p}_r^{\lambda_r^{(i)}} \cdot \mathfrak{r}''_i$  wobei  $\mathfrak{r}'_i, \mathfrak{r}''_i$  zu  $P$  ( $\lambda_j^{(i)}$  zu  $\ell$  prim) prim sind und ausserdem  $\beta'_i, \beta''_i$  für die verzweigten  $\mathfrak{p}|\ell$  die Faktorensystembedingung erfüllen. (Das ist stets möglich.) Dann wird nach II.) und dem Grunwald'schen Existenzsatz:  $Nu'_i = \beta'_i$ ,  $Nu''_i = \beta''_i$ . Dann erfüllen  $\beta_i = \beta'_i \beta''_i^{-1} = \mathfrak{p}_i \frac{\mathfrak{r}'_i}{\mathfrak{r}''_i} = \mathfrak{p}_i \mathfrak{r}_i$  die Bedingung: es wird etwa

$$\beta_i = Nu''_i Nu'_i{}^{-1} = Nu''_i u'_i{}^{-1} = Nu'_i{}^{-1} u''_i = NB_i. —$$

Mit Hilfe dieser Elemente  $\beta_i$  transformieren wir nun jedes  $\beta \in k$  in ein Element  $\beta'$ , das zu  $P$  prim ist, also nach I.) als Norm aus einem maximalen zyklischen Teilkörper  $K$  darstellbar ist.

$$\begin{aligned} \text{Sei } \beta = \prod \mathfrak{p}_i^{\sigma_i} \cdot \mathfrak{r} &\longrightarrow \beta \prod \beta_i^{-\sigma_i} = \mathfrak{r} \prod \mathfrak{r}_i^{-\sigma_i} = \beta' = NB' \longrightarrow \\ &\longrightarrow \beta \prod (NB_i)^{-\sigma_i} = NB' \longrightarrow \underline{\underline{\beta}} = NB' \prod (NB_i)^{\sigma_i} = \underline{\underline{N(B' \prod_{i=1}^r B_i^{\sigma_i})}}. \end{aligned}$$

Ich hoffe, dass hierdurch die Frage zur Zufriedenheit beantwortet ist. Weiter kommt man mit den bisher bekannten klassenkörpertheoretischen Konstruktionsmethoden nicht, denn mit ihnen beherrscht man nur die Probleme I, II für zyklische Körper.

Leider versagen meine Schlüsse für  $\ell = 2$ . Hier erhalte ich nur, dass die Quadrate stets reduzierte Normen sind. Für  $u = 1$  ergibt sich natürlich immer noch die in Ihren frühen Arbeiten entwickelte Darstellungstheorie, da stets die 2-ten E. W. in  $k$  liegen.

Wenn die obigen Überlegungen richtig sind, möchte ich das Ganze zusammenschreiben. —

Nun noch eine Kleinigkeit zur Theorie der algebraischen Funktionenkörper.

$K = k(x, y)$ ,  $k$  vollkommen und relativ in  $K$  algebraisch abgeschlossen.

Sei  $\bar{k}$  über  $k$  zyklisch. Dann ist  $(\bar{K} : K) = (\bar{k} : k)$ ,  $\mathfrak{G}_{\bar{K}|K} \cong \mathfrak{G}_{\bar{k}|k} \cong \{\sigma\}$ .

Nun bezeichne  $\mathfrak{a}$  einen Divisor der Ordnung 0 aus  $K$ . Dann gilt der

**Satz:** Wenn  $\mathfrak{a}$  in  $\bar{K}$  Hauptdivisor ist  $\mathfrak{a} = (\bar{\alpha})$ , so ist  $\mathfrak{a}$  schon in  $K$

Hauptdivisor.

**Beweis:** Es ist  $\mathfrak{a}^\sigma = \mathfrak{a}$  als Divisor, folglich  $\bar{\alpha}^\sigma = E_\sigma \cdot \bar{\alpha}$ ,  $E_\sigma \in \bar{k}$ . Nun wollen wir normieren  $\bar{\alpha} : \bar{\alpha} \rightarrow x\bar{\alpha}$  mit  $[x\bar{\alpha}]^\sigma = [x\bar{\alpha}]$  (als Element). Hieraus ergibt sich:

$$[x\bar{\alpha}]^\sigma = x^\sigma \bar{\alpha}^\sigma = x^\sigma E_\sigma \bar{\alpha} = x\bar{\alpha} \rightarrow x^{1-\sigma} = E_\sigma \rightarrow N_{\bar{K}K} E_\sigma = N_{\bar{k}k} E_\sigma = 1.$$

Dies ist eine notwendige Bedingung für  $\mathfrak{a} \sim 1(K)$ . Ist umgekehrt  $NE_\sigma = 1$ , so existiert nach Hilbert ein  $H_\sigma \in \bar{k}$  mit  $E_\sigma = H_\sigma^{1-\sigma}$ . (Hinreichende Bed.) Das Element  $x = H_\sigma$  ist zur Normierung brauchbar. Nun ist aber stets  $NE_\sigma = 1$ , denn  $\bar{\alpha}^\sigma = E_\sigma \cdot \bar{\alpha}$  ergibt

$$N\bar{\alpha}^\sigma = N\bar{\alpha} = NE_\sigma N\bar{\alpha} \rightarrow NE_\sigma = 1.$$

Hiermit ist gezeigt, dass sich jedes  $\bar{\alpha}$  aus  $\mathfrak{a} = (\bar{\alpha})$  nach  $K$  normieren lässt. Fertig. (Mit Hilfe beliebiger gal. Erweiterungen von  $k$  lässt sich der Satz auf algebr. abgeschl.  $\bar{k}$  übertragen; man muss nur gal. Faktorensysteme heranziehen.)

Von diesem nach F.K. Schmidt von Herrn Reichardt für beliebige Erweiterungen  $\bar{k}$  bewiesenen Satze mache ich folgende Anwendung.

Sei  $Z$  über  $K$  zyklisch von Primzahlgrade  $\ell$ , der Konstantenkörper  $k$  von  $K$  enthalte nicht die  $\ell$ -ten Einheitswurzeln und  $\ell$  sei prim zur Charakteristik von  $k$ . Weiter bezeichne  $\mathfrak{K}$  die Gruppe der Divisoren 0-ter Ordnung aus  $K$ , die in  $Z$  zu Hauptdivisoren werden;  $\mathfrak{h}$  die Hauptdivisoren von  $K$ . Nun sei  $\bar{K} = K(\zeta)$ ,  $\zeta^\ell = 1$ . Dann ist  $\bar{Z} = Z(\zeta)$  auch zyklisch vom Grade  $\ell$  über  $\bar{K}$ .  $\bar{\mathfrak{K}}, \bar{\mathfrak{h}}$  die entsprechenden Gruppen in  $\bar{K}$  bezüglich  $\bar{Z}$ .

Nach Deuring ist  $\bar{\mathfrak{K}}/\bar{\mathfrak{h}} \cong \mathfrak{G}_{\bar{Z}/\bar{K}} \cong \mathfrak{G}_{Z/K}$ .

**Satz:**  $\mathfrak{K}/\mathfrak{h} \cong \mathfrak{G}_{Z/K}$  und  $\bar{\mathfrak{K}}/\bar{\mathfrak{h}} = \bar{\mathfrak{K}}$ ,  $\mathfrak{h}N\bar{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}$ , falls  $\mathfrak{K} \supset \mathfrak{h}$ .

**Beweis:**  $\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{K} \rightarrow \bar{\mathfrak{K}}/\bar{\mathfrak{h}} \subseteq \bar{\mathfrak{K}} \\ \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}\bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \end{array} \right\}$  ist ein Homomorphismus. Also wird (*Bitte die ' durch  $\bar{\quad}$  ersetzen*)

$(\mathfrak{K} : \mathfrak{h}) = (\bar{\mathfrak{K}}/\bar{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h}\bar{\mathfrak{h}})$ , wobei  $\bar{\mathfrak{K}}_1$  durch  $\bar{\mathfrak{K}}/\bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}\bar{\mathfrak{h}}$  bestimmt sind. Nach dem vorigen Satz wird aber  $\bar{\mathfrak{K}}_1 = \mathfrak{h}\bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}$ . Also  $(\mathfrak{K} : \mathfrak{h}) = (\bar{\mathfrak{K}}/\bar{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h}\bar{\mathfrak{h}}) | (\bar{\mathfrak{K}} : \mathfrak{h}\bar{\mathfrak{h}}) = \ell$ . Weiterhin ist, wenn  $\mathfrak{a}$  ein Divisor aus  $\mathfrak{K}$  ist,  $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{h}} \notin \mathfrak{h}\bar{\mathfrak{h}}$ , also  $\bar{\mathfrak{K}}/\bar{\mathfrak{h}} = \bar{\mathfrak{K}}$  und  $(\bar{\mathfrak{K}} : \bar{\mathfrak{h}}) = \ell$ . Und  $\bar{\mathfrak{K}}/\bar{\mathfrak{h}} \cong \mathfrak{G}_{\bar{K}/K}$ .

Es ist  $\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathfrak{K}} \rightarrow N\bar{\mathfrak{K}}/\bar{\mathfrak{h}} \\ \bar{\mathfrak{h}} \rightarrow N\bar{\mathfrak{h}}/\bar{\mathfrak{h}} \end{array} \right\}$  auch eine homomorphe Abbildung. Und dabei

wird  $\bar{\mathfrak{K}} \supseteq N\bar{\mathfrak{K}}/\bar{\mathfrak{h}} \supseteq \bar{\mathfrak{K}}^{\varphi(\ell)} \supseteq \bar{\mathfrak{h}} \rightarrow \bar{\mathfrak{K}} = N\bar{\mathfrak{K}}/\bar{\mathfrak{h}}$ . fertig.

Ich glaube, dass diese Untersuchungen noch fortgeführt werden sollten. —  
Die Überfahrt war sehr angenehm. Weyl hat mich überaus freundlich empfangen.

Mit den besten Grüßen  
Ihr sehr ergebener  
O. Schilling.

## 1.23 14.10.1935, Hasse to Schilling

14. Oktober 35.

Herrn

Dr. Otto Schilling,

Institute of advanced Study  
Princeton N. J. (USA)

-----

Lieber Herr Schilling!

Herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief. Ich freue mich sehr, dass die Normenfrage nunmehr zu einem gewissen Abschluss gebracht ist. Ihre Ueberlegungen dazu sind durchaus in Ordnung; die Darstellung lässt sich allerdings noch etwas glatter geben. Ich habe nun alles zusammengestellt und sende Ihnen beiliegend einen Durchschlag des Entwurfes für eine gemeinsame Veröffentlichung über diese Frage. Hoffentlich sind Sie damit einverstanden, sonst machen Sie bitte jeden Ihnen günstig scheinenden Aenderungsvorschlag.

Auch ich glaube, dass man mit dieser Methode an den Fall " $4|m$  ohne Einheitswurzeln" grundsätzlich nicht herankommt. Ich möchte trotzdem vermuten, dass auch in diesem Fall allein die Vorzeichenbedingungen für das Normensein hinreichen.

Was Sie über die Klassenzahlgruppe in Funktionenkörpern einer Veränderlichen mitteilen, ist wohl für eine Veröffentlichung nicht aufregend genug. All dies wird man als Handwerkszeug für tiefere Untersuchungen gelegentlich gebrauchen müssen und kann es dann bei einer solchen Gelegenheit mit bringen. Im übrigen ist ja, wie Sie selbst schreiben, der Satz über den Rückschluss auf Hauptdivisor aus einer Konstantenerweiterung nach unten schon von F. K. Schmidt und Reichardt bewiesen.

Es freut mich sehr, dass Sie eine angenehme Ueberfahrt hatten und von Weyl freundlich empfangen wurden. Hoffentlich finden Sie in Princeton viel Anregung und auch viel Musse zu fruchtbarer Tätigkeit.

Ich möchte Sie doch noch wissen lassen, dass nach Mitteilungen von F. K. Schmidt in Stuttgart der Fall Grell sich für diesen wesentlich günstiger darstellt, als das bisher umlaufende Gerede erkennen liess. Ich bin froh, dass ich nicht mehr denken muss, dass ich mich in Grells Charakter getäuscht habe.

Mit herzlichen Grüssen  
stets Ihr  
H. Hasse



## 1.24 18.10.1935, Schilling to Hasse

OTTO SCHILLING

DEN 18-X 1935

Sehr geehrter Herr Professor,

Ich möchte Ihnen eine Skizze über kürzlich angestellte Untersuchungen schicken. Lesen Sie die Blätter sehr kritisch durch. Ich habe versucht, auf einem neuen Wege an die Struktur der Divisorengruppe heranzukommen. Wie mir scheint kann diese Methode erfolgversprechend sein. Es sei denn, dass ich einen fundamentalen Fehlschluss gemacht habe. Da ich hier ganz allein mit diesen Fragestellungen dastehe, wäre das sehr leicht möglich. Deshalb ist mir gerade Ihre Kritik so erwünscht. —

In einem Seminar über Algebra, das von 2 jungen Amerikanern geleitet wird, habe ich die nicht kommutative Arithmetik übernommen. In dem Weyl'schen Seminar über aktuelle Literatur werde ich einen Bericht über die Lösung des Strukturproblems der endlichen Algebren über dem  $\text{rat. Körper}$  geben. Denn ich glaube, dass es wenig Zweck hat, über einige spezielle Arbeiten vorzutragen. Es fehlen eben gewisse Vorkenntnisse.

Mit den besten Grüßen

Ihr

O. Schilling.

## 1.25 24.10.1935, Schilling to Hasse

OTTO SCHILLING

DEN 24-X 1935

Sehr geehrter Herr Professor,

Vielen Dank für die Übersendung des Durchschlags über den Normensatz. Ich glaube, dass Sie die konzentrierteste Form der Darstellung gefunden haben. So wollen wir es dann veröffentlichen.

Inzwischen habe ich noch über Divisorenklassengruppen von Funktionenkörpern beliebigen Geschlechts über dem komplexen Körper nachgedacht. Ich möchte dazu noch mitteilen:

Sei  $k(x, y) = K$  ein Körper vom Geschlecht  $g$ ;  $u_1, \dots, u_g$  eine Basis der Integrale erster Gattung;  $\Omega$  das Periodenparallelogramm, bzw. die Periodenmatrix. Nach Jakobi ist die Beziehung zwischen den Vektoren  $\mathbf{v}$  aus  $\Omega$  und den Klassen der Ordnung Null eineindeutig. Die explizite Lösung des Umkehrproblems mit Hilfe abelscher Funktionen besagt:

es existieren  $2g$  Funktionen  $\varphi_i, \psi_i$  von  $g$  Variablen mit  $\Omega$  als Perioden, sodass i. a. jedem Vektor  $\mathbf{u}$  ein Punktesystem  $(\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_g)$  entspricht, das

durch  $\left. \begin{array}{l} x_i = \varphi_i(\mathbf{u}) \\ y_i = \psi_i(\mathbf{u}) \end{array} \right\}$  erhalten wird. Dabei ist  $\left. \begin{array}{l} x \equiv x_i \\ y \equiv y_i \end{array} \right\} \pmod{\mathfrak{P}_i}$ .

Die Paare  $(x_i, y_i)$  entsprechen den Konstantenlösungen einer definierenden Gleichung  $f(x, y) = 0$  von  $K$ .

Nun gestatten diese abelschen Funktionen als Thetaquotienten eine Multiplikations bzw. Transformationstheorie in den Perioden. Diese ermöglichen einen Einblick in die Struktur des Homomorphismenringes auf  $\mathfrak{D}$ . Es stellt sich dabei das Analogon zu der von Ihnen rein algebraisch erhaltenen Theorie heraus.

Eine Transformation  $C$  allgemeiner  $\vartheta$ -Funktionen muss bestimmten Bedin-

gungen genügen:

$$\sum_{j=1}^g (c_{jk}c_{g+j,k'} - c_{g+j,k}c_{j,k'}) = \begin{cases} \eta & k' = g + k \\ 0 & k' \neq g + k \end{cases}$$

$$k, k' = 1, \dots, 2g, \quad k' < k.$$

Die Forderung, dass auch  $\varphi(m_1u_1, \dots, m_gu_g)$  eine abelsche Funktion mit  $\Omega$  als Perioden ist, drückt sich als Transformation geschrieben aus als

$$m_i\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{2g} c_{jk}\omega_{ik}.$$

Eine solche Transformation heisst bekanntlich prinzipal. Bei gegebenem  $\Omega$  bleiben 2 Fälle:

- 1.)  $m_i = m$  natürliche Multiplikation
- 2.)  $m_i$  imaginäre ganze algebraische Zahlen: komplexe Multiplikation.

Wenn  $n$  die oben erklärte Zahl ist, der Grad der Transformation  $C$ , so sind  $m_i$  im Falle 2 Wurzeln der Gleichung  $|C - Ez| = 0$  und es ist  $|z| = \sqrt{n}$ . Weiter ergibt die allgemeine Theorie, dass diese Transformationen eine Gruppe bilden. Ausserdem gehört zu jeder komplexen Multiplikation  $\mathfrak{m}$  eine adjungierte  $\mathfrak{m}'$  mit  $\mathfrak{m}\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}'\mathfrak{m} =$  natürliche Multiplikation.

Die abelschen Funktionen bilden einen Körper  $\mathfrak{K}$  und haben Additionstheoreme;  $\varphi(\mathfrak{m}\mathbf{u})$ ,  $\varphi(m\mathbf{u})$  lassen sich als rationale Funktionen aus Fkt. mit  $\mathbf{u}$  als Argument darstellen. Wir erhalten also Körper  $\mathfrak{K}_m \subseteq \mathfrak{K}_{\mathfrak{m}} \subseteq \mathfrak{K}$ .

Das waren bisher alles bekannte Tatsachen. Ich möchte die Vermutung aussprechen, dass diesen Körpern eine Reihe  $K_m \subseteq K_{\mathfrak{m}} \subseteq K$  entspricht. Wobei  $K_m, K_{\mathfrak{m}}$  zu  $K$  isomorph sind und  $K_m$  den Grad  $m^{2g}$  hat und  $2g$ -zyklisch ist. Doch konnte ich das nicht beweisen. Dafür habe ich aber dies gefunden: Auf Grund des Jacobi'schen Umkehrsatzes kann man die Multiplikationen als Homomorphismen auf  $\mathfrak{D}$  deuten: (bezw. der Gruppe zu Div. vom Grade  $g$ )

$\mathbf{u} \longrightarrow \mathfrak{A}(\mathbf{u})$  vom Grade  $g$  nach 
$$\begin{aligned} x_i &= \varphi_i(\mathbf{u}) \\ y_i &= \psi_i(\mathbf{u}) \end{aligned} \longrightarrow \mathfrak{P}_i, \quad \mathfrak{A}(\mathbf{u}) = \mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_g.$$
 Dann ordne man zu  $m\mathbf{u} \longrightarrow \mathfrak{A}(m\mathbf{u})$  und  $\mathfrak{m}\mathbf{u} \longrightarrow \mathfrak{A}(\mathfrak{m}\mathbf{u})$ , wobei in  $\varphi_i, \psi_i$  nur die Argumente geändert werden. Wir schreiben  $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{(m)}, \mathfrak{A}^{(\mathfrak{m})}$ . Wegen des Additionstheorems können wir  $\mathfrak{A}^{(m)} = \mathfrak{A}^m$  setzen, denn  $\mathbf{u}_1 +$

$u_2 \longrightarrow \mathfrak{A}(u_1)\mathfrak{A}(u_2) = \mathfrak{A}(u_1 + u_2)$ . Es wird  $amv \longrightarrow \mathfrak{A}^{(m)a}$  mit  $a \in \Gamma^{(0)}$ . Wir erhalten also wirklich Homomorphismen, speziell auf  $\mathfrak{D}$ .

Wenn  $\mathfrak{m}_1\mathfrak{v} \longrightarrow \mathfrak{A}^{(\mathfrak{m}_1)}$  ( $\mathfrak{v}$  variabel) und  
 $\mathfrak{m}_2\mathfrak{v} \longrightarrow \mathfrak{A}^{(\mathfrak{m}_2)}$ , so legt das abelsche

Theorem eine Addition der Homomorphismen fest:

$\mathfrak{m}_1\mathfrak{v} + \mathfrak{m}_2\mathfrak{v} = ((\mathfrak{m}_1^1 + \mathfrak{m}_2^1)v_1, \dots, (\mathfrak{m}_1^g + \mathfrak{m}_2^g)v_g) \longrightarrow \mathfrak{A}^{(\mathfrak{m}_1)} \cdot \mathfrak{A}^{(\mathfrak{m}_2)}$ , also  $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$  hierdurch erhalten. Skalarmultiplikation und  $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$  sind trivial. Also: die Multiplikationen erzeugen einen Homomorphismenring auf  $\mathfrak{D}$ .

Zu jedem Homomorphismus  $\mathfrak{m}$  gehört eine Untergruppe  $\mathfrak{U}_{\mathfrak{m}}$  von  $\mathfrak{D}$  mit  $\mathfrak{U}_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{m}} = 1$ . Es sind  $\mathfrak{U}_{\mathfrak{m}}$  für Multiplikationen wegen  $\mathfrak{m}\mathfrak{m}' = m$  stets endliche Untergruppen. Zu ihnen gehören die abelschen unverzweigten Oberkörper von  $K$ . Wegen der Endlichkeit der  $\mathfrak{U}_{\mathfrak{m}}$  ergibt sich nun, dass  $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$  auch Multiplikationen sind. Da alle eine Gruppe bilden, ist der Homomorphismenring  $\mathfrak{H}$  nullteilerfrei. (Die Erklärung der 0 aus  $\mathfrak{H}$  bedarf wie im Falle  $g = 1$  einer Normierung der Nenner von  $\mathfrak{D}$ ; da die abelschen Funktionen aber keine ganzen Transzendenten sind, so liegt die Deutung der Null als  $\infty$ -Lösung auf der Hand.). Das abelsche Theorem ergibt noch:

der Addition der  $g$ -Tupel von Lösungen in Konstanten entspricht i. a. eindeutig die Multiplikation der Klassen von  $\mathfrak{D}$ .

Man kann nun zeigen:

Jedem Meromorphismus von  $K$  auf einen endlichen Unterkörper  $K_{\mathfrak{m}} \cong K$  entspricht eine Multiplikation.

Das ist zu erwarten, denn aus  $K_{\mathfrak{m}} \cong K$  folgt doch, dass die Perioden  $\Omega$  die gleichen sind, das deutet schon auf Multiplikation.

Man zeigt:

1.) Jedem Homomorphismus  $\mu$  auf  $\mathfrak{D}$ , bei dem  $\mathfrak{U}_{\mu}$  endlich ist, entspricht eine Multiplikation.

Sei dann  $\mathfrak{v}_i \longrightarrow \mathfrak{A}_i \longrightarrow \mathfrak{A}_i^{\mu} \longrightarrow \mathfrak{v}_i^{\mu}$ . Das abelsche Theorem ergibt:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 & \longrightarrow & \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \longrightarrow (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2)^{\mu} \quad \equiv \quad \mathfrak{A}_1^{\mu}\mathfrak{A}_2^{\mu} \\ & & \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ & & (\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2)^{\mu} \quad \equiv \quad \mathfrak{v}_1^{\mu} + \mathfrak{v}_2^{\mu}. \end{array}$$

Einem Homomorphismus in  $\{\mathfrak{v}\}$  entspricht eine Periodentransformation unter Erhaltung von  $\Omega$ .  $\mathfrak{U}_{\mu} =$  endlich heisst, dass  $\mathfrak{v}_{\mu}$  einen endlichen  $\Gamma^{(0)}$ -Modul bilden mod  $\Omega$ . Ausserdem ist  $\mathfrak{U}_{\mu}$  in einer kleinsten  $\mathfrak{U}_m$  enthalten; einer  $\mathfrak{U}_m$ , die  $m$ -ten Teilpunkten entspricht. Wegen der Endlichkeit von  $\mathfrak{v}_{\mu}$

ist  $m$  eine endliche ganze Zahl.  $\mathfrak{U}_m$  entspricht nun eine natürliche Multiplikation  $m\mathfrak{v}$ . Die zu  $\mu$  gehörige Transformationsmatrix ist aber Teiler von  $m$ . Da die Perioden erhalten bleiben also eine Multiplikation  $\mathfrak{m}$ .

2.) Jedem  $K_\mu \subseteq^{\text{endlich}} K$ ,  $K_\mu \cong K$  entspricht ein Homomorphismus  $\mu$  auf  $\mathfrak{D}$ , der eine endliche Gruppe  $\mathfrak{U}_\mu$  hat.

Wir gehen von einer festen Darstellung der Klassen von  $\mathfrak{D}$  aus:  $\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_g}{O_1 \dots O_g}$ .

Wenden Normbildung  $N_\mu$  von  $K$  nach  $K_\mu$  an:

$$\mathfrak{A} \longrightarrow N_\mu \mathfrak{A} = \frac{N_\mu \mathfrak{P}_1 \dots N_\mu \mathfrak{P}_g}{N_\mu O_1 \dots N_\mu O_g} = \frac{* \dots *}{o_1 \dots o_g}.$$

Aufgrund des Isomorphismus  $K_\mu \cong K$  ordnen wir den Primstellen aus  $K_\mu$  die isomorphen zu:

$$N_\mu \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}^\mu = \frac{\mathfrak{P}_1^\mu \dots \mathfrak{P}_g^\mu}{O_1^\mu \dots O_g^\mu}. \quad \text{Es ist } \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}^\mu$$

offenbar ein Homomorphismus auf  $\mathfrak{D}$ . Hierbei können nur endlichviele  $g$ -Divisoren äquivalent werden. Da  $(K : K_\mu)$  galoissch ist, kann  $N_\mu(\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_g)$  nur noch aus endlich vielen  $\mathfrak{P}_1^\sigma \dots \mathfrak{P}_g^\sigma$  hervorgehen. Und der Schritt  $K_\mu \longrightarrow K$  ist eindeutig.

Würden nun bei  $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}^\mu$  unendlich viele Klassen in die 1 übergehen, so ergäben sich unendlichviele zu  $O_1^\mu \dots O_g^\mu$  äquivalente Divisorenklassen  $\mathfrak{P}_1^\mu \dots \mathfrak{P}_g^\mu$ , wo  $\mathfrak{P}_1^{*\mu} \dots \mathfrak{P}_g^{*\mu} \not\sim \mathfrak{P}_1^\mu \dots \mathfrak{P}_g^\mu$ . Das steht im Widerspruch zur endlichen Dimension  $\{O_1^\mu \dots O_g^\mu\}$ . —

Soweit bin ich bis jetzt. Besonderes Kopfzerbrechen macht mir umgekehrt die Bestimmung der  $K_\mu \subseteq K$  zu gegebenem  $\mu$ . Denn für  $g > 1$  hat man es mit  $g$  Paaren von abelschen Funktionen zu tun. Bei  $\mu$  können diese sich nun überkreuzen und man kann nicht mehr von den rationalen Verbindungen auf *ein* Paar schliessen, um  $K_\mu$  zu definieren. Aber auch das muss schliesslich zu schaffen sein, wenn man das Produkt von  $g$  Riemannschen Flächen aufspaltet  $[\{(\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_g)\}$  durchlaufen offenbar das Produkt; die Ausnahmestellen durch Abschliessen erhalten, da ein Konvergenz und Umgebungsbegriff auf der kompakten Divisorenklassengruppe einföhrbar.]

Ich glaube, dass hiermit einiges Neues über  $\mathfrak{D}$  und  $K$  festgestellt ist. Man müsste nur alles noch mehr ins Algebraische wenden. Daran zweifle ich aber ein wenig, da für  $f(x, y) = 0$  bei  $g > 1$  i. a. keine Normalform zu erhalten

ist, von der man aus starten kann.

Bleibt zu untersuchen der „Übergang“ zu einem Zahlkörper als Konstantenbereich und dann die Restklassenbildung. Ob man wohl einer Serie  $\overline{K}_i \subseteq \overline{K}_{i-1} \subseteq \dots \subseteq \overline{K}$  eine Serie  $K_i \subseteq K_{i-1} \subseteq \dots \subseteq K$  zuordnen kann? ( $\overline{K}_i \cong \overline{K}$  mit endlichem Galoisfeld,  $K_i \cong K$  die Urbilder mod  $g$  von 2<sup>ter</sup> Art.) Sicher ist die Potenzierung mit  $q^f$  in  $\overline{K}$  ein Meromorphismus. Wenn diesem in  $K$  ein Meromorphismus mit einer Multiplikation des Grades  $q^f$  entspräche, so läge nach dem Satz über prinzipale Transformationen ein Hinweis zur R. V. für  $\overline{K}$  vor! Das ist aber Zukunftsmusik. Immerhin will ich versuchen, den Fall  $g = 1$  so zu behandeln. —

Wieder muss ich Sie um Ihre Meinung bitten, denn von diesen Überlegungen getraue ich mich sonst niemandem etwas zu erzählen.

Es sollte mich freuen, wenn Herr Grell sich rehabilitieren kann. Mir waren die Nachrichten ein Schlag ins Gesicht.

Mit den besten Grüßen  
Ihr ergebener  
O. Schilling.

## 1.26 28.10.1935, Hasse to Schilling

28. Oktober 35.

Herrn

Dr. O. S c h i l l i n g  
Institute of advanced  
Study  
Princeton N.J.  
USA~.

Lieber Herr Schilling!

Ohne die Antwort auf Ihren wahrscheinlich unterwegs befindlichen Brief abzuwarten, möchte ich Ihnen heute Ihre Arbeit über die Funktionenkörper mehrerer Variablen noch einmal zurückschicken. Ich hatte das Manuskript Herrn Deuring zur Durchsicht gegeben und dieser schreibt mir nun folgendes:

“Auf Seite 4, im letzten Absatz von Abschnitt 1, muss noch gesagt werden, dass ein Element von  $k$  durch seinen Divisor bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist, was keineswegs selbstverständlich ist. Es wird in der zweiten der unter (5) zitierten Arbeiten von van der Waerden in der nötigen Allgemeinheit bewiesen. Vielleicht meint Herr Schilling dies in dem Satz: “Jedes Element  $\alpha$  aus  $k$  besitzt...” und hat sich nur in der Formulierung vertan. Abschnitt 2 ist eine schöne Zusammenfassung der Sätze in meiner Arbeit, die Beweise auszuführen war natürlich nicht nötig.

Das Zerlegungsgesetz auf Seite 10 ist leider auf die angegebene Weise nicht begründbar. Denn der zitierte (falsche, aber korrigierbare) Beweis von Satz 10 auf Seite 122 in meinen “Algebren” ist nicht übertragbar. Ich halte es auch nicht für wahrscheinlich, dass es ein Zerlegungsgesetz in dieser einfachen Form überhaupt gibt, weil zu dem Zerlegungstypus eines Primdivisors die Struktur der Zerlegungsgruppe gehört, die im Zahlkörperfall, aber nicht hier, schon durch den Grad gegeben ist. Das ergibt sich ja daraus, dass *alle* Untergruppen der galoisschen Gruppe als Zerlegungsgruppen auftreten.”

Sie müssen also Ihr Manuskript diesen Bemerkungen entsprechend richtigstellen. Bitte senden Sie es mir dann bald wieder zurück.

Mit freundlichen Grüßen  
Ihr  
H. Hasse



## 1.27 04.11.1935, Hasse to Schilling

4. November 35.

Herrn

Dr. S c h i l l i n g

Institute for advanced Study  
Princeton (N. J.) USA.

-----

Lieber Herr Schilling!

Durch eigenes intensives wissenschaftliches Arbeiten und das gerade beginnende Semester bin ich leider genötigt, Ihre beiden wissenschaftlichen Zusendungen nach kurzem Durchfliegen erst einmal zurückzulegen, bis ich mehr Musse habe. In beiden scheint mir ein gesunder Kern zu stecken, mehr kann ich im Augenblick nicht sagen, ich werde, sobald es mir möglich ist, darauf zurückkommen. Heute möchte ich nur sagen, dass ich selbst im vorigen Monat einen sehr einfachen Beweis für die Struktur der Divisorenklassengruppe endlicher Ordnung bei Geschlecht 1 und beliebigem algebraisch-abgeschlossenen Konstantenkörper gefunden habe. Ist  $o$  ein Primdivisor 1ten Grades, so sind die Klassen  $C$  mit  $C^n = 1$  eindeutig durch die Primdivisoren  $p$  mit  $p^n \sim o^n$  gekennzeichnet. Diese  $p$  sind aber genau die Zählerprimeiler des Divisors

$$\text{Det} \left| \frac{1}{k!} D^{(k)} y_i \right|, \quad (i, k = 1, \dots, n-1)$$

wo die  $y_i$  eine Basis<sup>1</sup> der ganzen Multipla von  $\frac{1}{o^n}$  (ohne die 1) sind und  $D^{(k)}$  das Differentiationssymbol  $\frac{1}{k!} d^k$  bedeutet, das auch bei Primzahlcharakteristik für alle  $k$  sinnvoll mit den bekannten Gesetzen definierbar ist. Dieser Dif-

---

<sup>1</sup>Im Original heißt es versehentlich „ein Beweis“.

ferentialdivisor gehört der Hauptklasse an (Geschlecht 1), hat also den Grad 0, d. h. die Anzahl seiner Zählerprimdivisoren ist gleich der Anzahl der Nennerprimdivisoren. Der Nenner ist nur eine Potenz von  $o$ , die sich leicht angeben lässt, und der Zähler enthält seine verschiedenen Primdivisoren in einer leicht angebbaren durch die Charakteristik und die Invariante  $A$  bestimmten Vielfachheit. So kommen auf wenigen Zeilen meine Sätze aus Hamburger Abhandlungen 10 heraus und zwar ohne die dortige Beschränkung  $p \neq 2$  und ohne Benutzung einer Normalform und des Additionstheorems. Ohne Beweis möchte ich ferner folgende Sätze mitteilen: Ist  $K$  ein elliptischer Körper mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper  $k$ , so entsprechen die nicht-konstanten Teilkörper  $L$  von  $K$  über  $k$  umkehrbar eindeutig den endlichen Untergruppen  $U$  der Automorphismengruppe von  $K$  über  $k$  derart, dass  $K$  über  $L$  die Galoisgruppe  $U$  hat. Ich vermute, dass das auch bei höherem Geschlecht gilt und nenne es Klassenkörpertheorie nach unten, da die Automorphismengruppe im wesentlichen durch die Translation und Spiegelungen der Divisorklassengruppe gegeben ist. (Für Geschlecht 1).

Unsere gemeinsame Arbeit gebe ich dann also zum Druck.

Herzlichst Ihr  
H. Hasse

## 1.28 07.11.1935, Schilling to Hasse

7 – XI – 1935

Sehr geehrter Professor,

Ich bin Ihnen und Herrn Deuring sehr zu Danke verpflichtet, dass Sie mich auf einen verhängnisvollen Fehler aufmerksam gemacht haben. Ich habe die betreffende Stelle gestrichen. An der anderen Stelle hatte ich mich nur ungenau ausgedrückt; ich habe entsprechend den Wortlaut abgeändert, so dass die Analogie zu den Funktionen einer Variablen evident ist. (Vgl. die betreffenden Ausführungen)

Ausserdem schicke ich ein Manuskript zur Theorie der Einheiten im Hyperkomplexen. Ich möchte Sie bitten besonders die Anmerkung 5 zu vervollständigen. Denn ich kenne den Titel und genauen Inhalt der Arbeit von Herrn Eichler nicht. Deshalb auch die "Bemerkungen", die unter Umständen ganz überflüssig sind. Vielleicht reichen Sie diese Arbeit an irgend eine Zeitschrift weiter, wenn Sie sie nicht in Crelle aufnehmen können. Ich möchte, dass sie möglichst rasch erscheint. Die Darstellung ist wohl klar und übersichtlich?

Mit den besten Grüßen  
Ihr sehr ergebener  
O. Schilling.

## 1.29 14.11.1935, Schilling to Hasse

Princeton, den 14–XI–1935

Sehr geehrter Herr Professor,

Haben Sie recht herzlichen Dank für Ihre wertvollen Mitteilungen zur Theorie der Körper vom Geschlecht eins. Die Klassenkörpertheorie nach unten lässt sich (teilweise) auch bei höherem Geschlecht durchführen. Nämlich *dann* kommt man zu Aussagen über die Divisorenklassengruppe, wenn man annimmt, dass die übliche Klassenkörpertheorie für die Körper mit einem bezüglich des Primkörpers endlichen Unterkörper des algebraisch abgeschlossenen als Konstantenkörper gültig ist. Man kann in diesem Falle mit Hilfe des Umkehrsatzes usf. aus der Existenz von Meromorphismen auf die Struktur der Klassengruppe mit endlichem Konstantenkörper schliessen. Dann gehe man zum algebraisch-abgeschlossenen Körper über. Wenn es sich nicht um triviale Konstantenerweiterung bei dem betrachteten Meromorphismus gehandelt hat, so erhält man eine entsprechende Aussage für die Gruppe durch den Satz von Reichardt. Durch richtige Interpretation des Existenzsatzes der Klassenkörpertheorie müsste man auch diesen Gedankengang zurücklaufen können. Leider habe ich mir das nicht überlegen können.

Gelegentlich, im Augenblick ärgert mich meine Leber, werde ich das genauer ausführen. Sie werden aber, wenn Sie die anderen Mitteilungen passend interpretieren und die Grundgedanken daraus verwenden, sich aus obigen Andeutungen ein ungefähres Bild zusammenstellen können!

Könnten Sie mir einen Sonderdruck Ihrer Arbeit mit Davenport über spezielle Körper schicken? Vielleicht kann auch Herr Witt einen Sonderdruck seines Existenzsatzes beifügen?

Beste Grüsse  
Ihr sehr ergebener  
O. Schilling.

## 1.30 28.11.1935, Schilling to Hasse

28 – 11 – 1935

Sehr geehrter Herr Professor,

Leider gilt die Klassenkörpertheorie nach unten nur in den Körpern vom Geschlecht eins. Einige der in vorhergehenden Briefen ausgesprochenen Vermutungen sind also hinfällig; soweit sie sich nämlich auf Körper von höherem Geschlecht beziehen. Es gilt nämlich der **Satz**: Jeder Meromorphismus eines Körpers vom Geschlecht  $g > 1$  ist ein Automorphismus (birationale Transformation). Mit Sicherheit scheiden für eine Klassenkörpertheorie nach unten die hyperelliptischen Körper aus. Wahrscheinlich auch alle übrigen Körper von höherem Geschlecht; denn ich vermute, dass auch sie nur eine endliche Anzahl von Weierstrasspunkten besitzen. Immerhin erhält man durch Anwendung der Abzählungen der Klassenkörpertheorie auf Meromorphismen elliptischer Körper Aussagen über das Verhalten der Klassengruppe. Man kann nämlich die wesentlichen Eigenschaften eines Meromorphismus schon bei Zugrundelegung endlicher Konstantenkörper studieren. (Zur rationalen Funktionsbildung  $\mu$  werden ja nur endlich viele Konstante benutzt). Dann kann man diesen Konstantenkörper sukzessive erweitern und das Verhalten der Klassengruppe studieren. Das geht mit den bekannten Abzählungen leicht zu machen. Ich will aber dies nicht hier niederschreiben, da Sie eine viel elegantere Behandlung der Klassengruppe gefunden haben.

Etwas bleibt immerhin von den Vermutungen über die Körper von höherem Geschlecht bestehen. Nämlich, dass zwischen den komplexen Multiplikationen (falls sie in dem betreffenden Körper existieren) und den Automorphismen eine Beziehung besteht. Sie ist aber uninteressant, wenn einem als Vorbild die elliptischen Körper vorschweben! Die Sachlage ändert sich aber, wenn man die Korrespondenzen von  $g$ -Tupeln (und den Zusammenhang mit den Divisorenklassen der Ordnung  $2g$ ) untersucht. Das ist im Falle der algebraischen Funktionen im klassischen Sinne durch Hurwitz in den Math. Ann. 28

geschehen. Besonders bemerkenswert ist, dass die singulären Korrespondenzen nur in Körpern mit gebundenen Moduln, also in Körpern mit komplexer Multiplikation auftreten. Da im abstrakten Falle die analytischen Hilfsmittel, die in dem abelschen Theorem vereinigt sind, fehlen, muss man nach einem Ersatz suchen. Und den glaube ich, aus den geometrischen Arbeiten der italienischen Schule herausfinden zu können. Diese Arbeiten dürften zu einer reichen Fundgrube für nützliche Hinweise werden. Z. B. zeigt G. Castelnuovo, dass eine enge Verbindung zwischen dem abelschen Theorem und der Theorie der Korrespondenzen von  $g$ -Tupeln besteht. Vgl. die betreffende Arbeit in *Lomb. Ist. Rend.* 25 (1892). Die dortigen Untersuchungen sind allein auf dem Riemann-Rochschen Satz und dem Äquivalenzbegriff aufgebaut. Sie gestatten deshalb mühelos die Übertragung auf die abstrakten Funktionenkörper. Besonders wichtig ist die Methode zur expliziten Erzeugung von Korrespondenzen. Und für den abstrakten Fall ist bemerkenswert, dass schon diese Korrespondenzen ein abelsches Theorem ergeben. Man braucht also nicht zu wissen, dass sie für Körper mit „allgemeinen Moduln“ schon die allgemeinsten Korrespondenzen von  $g$ -Tupeln sind. Also fällt in gewisser Hinsicht die Notwendigkeit der Deutung des Begriffs „allgemeine Moduln“ heraus. Wegen der fehlenden transzendenten Theorie kann man im abstrakten Falle nicht zeigen, dass man mit den explizit angegebenen Korrespondenzen die allgemeinsten erhält. Im Augenblick stört das mich nicht, denn ich bin froh, eine erste Entwicklungsmöglichkeit einer rein algebraischen Theorie für Körper von höherem Geschlecht gefunden zu haben. Ich habe mir vorgenommen, in den nächsten Monaten alle erreichbaren geometrischen Arbeiten nach derartigen Hinweisen durchzusehen. Es wird eine mühsame Arbeit sein, denn neben der Sprache ist die geometrische Ausdrucksweise ungewohnt. Ich bin aber der Meinung, dass man nichts unausgenutzt beiseite lassen soll! Überdies gibt jene Arbeit von Castelnuovo durch die Beherrschung der zyklischen Korrespondenzen zweiter Art implizit die Struktur der Klassen- $g$ -gruppe. ( $u \rightarrow u + \alpha$  für die Argumente der  $\varphi$ -Fktion ist das Analogon) Nun kann man jene Korrespondenzen als Homomorphismen auf der Jakobischen Mannigfaltigkeit deuten. Letztere wird am besten als das Produkt von  $g$  zu dem betrachteten Körper isomorphen Körpern definiert. In diesem Körper von  $g$  Variablen ist eher eine „Klassenkörpertheorie nach unten“ zu erwarten. Dann wird man die Sätze über Funktionenkörper mehrerer Variablen benutzen können. Vorher muss man aber zeigen, dass überhaupt eine den unendlich vielen Korrespondenzen entsprechende „Meromorphis-

men"menge existiert.<sup>1</sup> Im Laufe der Zeit wird auch diese Frage geklärt werden können. Nur bin ich sehr misstrauisch geworden! Z. B. muss eine Beziehung zwischen den Primdivisoren der Höchstdimension (die ja zur Charakterisierung der Überlagerungsmannigfaltigkeiten ausreichen) und den Primstellen der Dimension Null (die Stellen der Komponentenkörper) hergestellt werden. Ich habe wenig Hoffnung, dass man einen R. R. Satz für letztere Stellen finden kann. Z. B. stehen nicht die Beziehungen zu Elementen des Körpers zur Verfügung. Greift man aber eine *bestimmte* Menge von Primdivisoren der Dimension Null heraus, etwa die Stellen der (festen) Komponentenkörper, so gilt für jene ein R. R. Satz. Hier liegt ein Hinweis, wie man vorgehen muss: man muss die Menge von Stellen auf die möglichen Darstellungen des Körpers mehrerer Variabler beziehen. So wird man notwendig zu den Schmeidler'schen Untersuchungen über eine verallgemeinerte gal. Theorie geführt. (Aus jenen ergibt sich, dass *höchstens* die möglichen Zerlegungen des Kprs. von  $g$  Variablen etwas Neues zu leisten vermögen. Die Meromorphismen wie sie für  $g = 1$  existieren sind auch in der Jakobischen Mannigfaltigkeit für  $g > 1$  komponent[...] unmöglich)

Nach der überraschenden Mitteilung von Chevalley in den C. R. kann also jetzt die Klassenkörpertheorie der Zahlkörper mit rein algebraischen Methoden aufgebaut werden. Das ist wundervoll! So erscheint die gesamte Klassenkörpertheorie in neuem Lichte. Die benötigten Abzählungen sind gar nicht so schlimm, zum Teil wurden sie bei dem früheren Aufbau der Theorie benutzt. Für die Funktionenkörper wird alles einfacher wegen des Wegfallens der Teiler des Körpergrades. Andererseits muss man aber wegen der algebraischen Verschiedenheit der Erzeugungen von zyklischen Relativkörpern zwei Fälle unterscheiden:

- 1.) Körpergrad prim zur Charakteristik,
- 2.)        "        "        gleich 2.

Das liegt in der Natur der Sache. Im ersten Fall zieht man die arithmetische Fundamentalsatz (vgl. etwa F. K. Schmidt in den Erlanger Berichten) und zur Vereinfachung die Sätze von Deuring über Funktionenkörper (Math. Ann. 106) heran. Im zweiten Falle geht man von der Summenrelation der Invarianten aus, wie es H. L. Schmid in seiner Dissertation getan

---

<sup>1</sup> Written on the left margin:

“„Meromorphismen"menge hätte also die möglichen Zerlegungen der Jakobischen Mannigfaltigkeit zu umfassen"

hat. Dann fasst man 1.) und 2.) zusammen. Hier kann die Wittsche Arbeit über den Existenzsatz benutzt werden. Hiermit ist auch die gesamte Theorie der Algebren über Funktionenkörpern auf algebraischem Wege begründet. Natürlich ist der doppelte Zugang nicht befriedigend. Besonders verstößt das Zurückgreifen auf Ihre ersten Arbeiten zur Strukturuntersuchung der Algebren gegen das Prinzip, das Sie in den Math. Ann. 107 aufstellten. Ich sehe aber im Augenblick keinen Weg, die Summenrelation hyperkomplex ohne Zetafunktion zu beweisen.

In der Theorie der Zahlkörperalgebren bleibt nur noch der Satz von der zyklischen Darstellbarkeit übrig. Zu seinem Beweise braucht man Existenzsätze über zyklische Körper. Wenn man aber die Theorie der unendlichen Erweiterungen von Zahlkörpern rein algebraisch begründet hat, was nun nach der Chevalleyschen Note auch möglich ist, so folgt nach Chevalley sofort ein arithmetischer Beweis des Grunwaldschen Existenzsatzes. Nachdem man so eingesehen hat, dass die Dichtigkeit der Primstellen nicht berücksichtigt zu werden braucht bei dem Aufbau der Klassenkörpertheorie über jenen speziellen Grundkörpertypen, kann man daran gehen, nach *notwendigen* Bedingungen für die Gültigkeit gewisser Sätze der Klassenkörpertheorie zu fragen. Man kann also den Anschluss an den Gedankenkreis der Untersuchungen von F. K. Schmidt suchen. Wenn man also einen Körper vorgegeben hat und in ihm die Existenz einer Menge von Stellen voraussetzt, die zu einer regulären Idealtheorie Anlass geben, und weiterhin annimmt, dass eine Anzahl von klassenkörpertheoretischen Theoremen gelte, so frage man nach der Struktur der Primstellen. Also nach dem Typus der Restklassenkörper usf. Da höchstwahrscheinlich die Dichtigkeiten ohne Belang sind, so dürfte heute diese Fragestellung nicht mehr zur Aussichtslosigkeit verurteilt sein.

Auf der Suche nach charakteristischen Eigenschaften von Körpern bin ich zum Studium der unendlichen vollständig normalen Algebren über Zahlkörpern geführt worden. Ich konnte unter Voraussetzung solcher Zentren die von G. Köthe in den Math. Ann. 105 gefundenen Sätze verschärfen.<sup>2</sup> Es existieren in diesem Falle keine echten unendlichen Divisionsalgebren, deren Indexmenge aus den Potenzen einer einzigen Primzahl besteht. Das sieht man leicht mit den Sätzen über Invarianten endlicher Algebren ein. Dann kann man eine Darstellung der teilerfremden Algebren in der Form von unendlichen zyklischen Produkten finden. Natürlich darf man nicht die ganze (kompakte) Automorphismengruppe des unendlichen zyklischen Körpers benutzen. Die

---

<sup>2</sup> Written on the left margin: "(Indizes der direkten Komponenten)"



Approximation der Gruppe durch die zyklischen Gruppen der Komponentenkörper reicht aus. Ausserdem ergibt sich so, dass man auf diesem Wege die allgemeinsten Algebren dieses Typus erhält. Weiterhin, dass umgekehrt jene verschränkten Produkte die allgemeinsten abzählbaren vollständig normalen sind. Die Untersuchung der Idealtheorie in solchen Algebren führt zu einigen neuen Resultaten. Z. B. hat i. A. ein zweiseitiges Primideal kontinuierlich viele einseitige Teiler. Hiermit wird die Idealtheorie sehr einfach, denn nach Durchschnittsdarstellungen von kontinuierlich vielen Idealen zu fragen hat wohl wenig Zweck. Wahrscheinlich werde ich diese Ergebnisse in einer Note für eine amerikanische Zeitschrift zusammenfassen. Hier wird nicht viel auf dem Gebiete der Algebra getan. Ich merkte das (in fast unangenehmer Weise) während eines Seminarvortrages. Ich werde mich aber entsprechend umstellen und mich auf Erklärung von Begriffen und des Inhaltes von Sätzen in Zukunft beschränken.

Schicken Sie mir doch bitte 3–4 Korrekturen zu den verschiedenen Noten. Ich kann sie dann einigen Leuten hier geben.

Mit den besten Grüßen  
Ihr sehr ergebener  
O. Schilling.

## 1.31 03.12.1935, Hasse to Schilling

3. 12. 1935<sup>1</sup>

Lieber Herr Schilling,

Heute endlich bin ich dazu gekommen, mich etwas genauer mit Ihren beiden wissenschaftlichen Briefen zu beschäftigen. Ihr Gedanke, Wahrheiten in Funktionenkörpern mit Primzahlcharakteristik aus der klassischen Theorie durch Restklassenbildung herzuleiten, ist sehr nett. Ob Ihre Schlüsse im einzelnen in Ordnung sind, kann ich naturgemäss bei der knappen mir zur Verfügung stehenden Zeit nicht nachprüfen, und darin sehe ich wohl auch nicht die Aufgabe, die Sie mir zgedacht haben. Der Ansatz ist jedenfalls sehr vernünftig, und es scheint ja auch, als ob man damit zu neuen Resultaten kommt.

Nun muss ich allerdings sagen, dass ich mir als idealen endgültigen Aufbau der Theorie bei endlichem Konstantenkörper einen Aufbau vorstelle, der *nicht* den Umweg über Körper der Charakteristik 0 nimmt. Denn meine Erfahrungen auf allen möglichen Gebieten haben mir gezeigt, dass die Gesetzmässigkeiten in Funktionenkörpern mit endlichem Konstantenkörper von elementarerer Natur sind, als die bei irgendwelchen anderen Konstantenkörpern vorliegenden Gesetzmässigkeiten, und selbst einfacher als in gewöhnlichen Zahlkörpern, letzteres wegen der Nichtarchimedizität *aller* Bewertungen. So bin ich denn in der letzten Zeit den bisher eingeschlagenen Weg weitergegangen, der darin besteht, die Schlussweisen der klassischen algebraischen Funktionentheorie und ihrer abelschen Funktionen zu algebraisieren und so auf abstrakte Konstantenkörper zu übertragen. Ich bin damit in der letzten Zeit ein gutes Stück weitergekommen, allerdings noch nicht so weit, dass ich bereits heute schon zum entscheidenden Angriff auf die Riemannsche Vermutung ausholen könnte. Immerhin sehe ich hier meinen Weg schon ziemlich klar vor Augen und denke, dass ich in absehbarer Zeit die noch fehlenden

---

<sup>1</sup> The date printed on the top margin of the original letter is "3. 12. 1359"

Einfälle haben werde. Dies alles soll Sie nun aber keineswegs hindern, Ihren Weg weiterzugehen. Einmal sind die auf diese Weise gewonnenen Erkenntnisse für den Augenblick sehr wertvolle Fingerzeige für den mir vorschwebenden Algebraisierungsprozess. Dann aber — und das halte ich für das Entscheidende — scheint mir gerade die *umgekehrte* Verwendung Ihres Ansatzes für die Zukunft sehr viel zu versprechen. Ich denke ja, wie Sie wissen, immer an einen Ausbau der bisherigen Theorie bei endlichem Konstantenkörper nach *der* Richtung, dass man Funktionenkörper mit einem Zahlkörper endlichen Grades als Konstantenkörper untersucht, wobei die Funktionenkörper mit endlichem Konstantenkörper als Restklassenkörper nach den Primdivisoren zweiter Art auftreten, so wie Sie es bei Ihrem Schlussverfahren zugrunde legen. Jede Erweiterung der Kenntnis über den Zusammenhang zwischen einem Funktionenkörper mit Zahlkörperkonstanten und seinen Restklassenkörpern zweiter Art scheint mir von ausserordentlicher Wichtigkeit zu sein.

Ich habe allerdings das starke Bedürfnis hier erst einmal einen schönen und runden Aufbau der arithmetischen Theorie vor mir zu sehen, der etwa das Analogon zu der F. K. Schmidtschen Arbeit in M. Z. 30 darstellt, und den man dann für die weiteren spezielleren und höheren Forschungen als gesicherte Grundlage verwenden kann. Vorläufig fällt es mir, gerade in Ermangelung eines solchen Aufbaus, reichlich schwer, Ihren Entwicklungen in den Einzelheiten zu folgen. Wollen Sie sich nicht der in hohem Grade dankenswerten Aufgabe unterziehen, und einmal eine solche Begründung in aller Ausführlichkeit geben?

Nun einige Bemerkungen zur Sache. Sie sprechen in Ihrem zweiten Brief die Vermutung aus, dass für einen algebraischen Funktionenkörper  $K$  mit algebraisch-abgeschlossenem Konstantenkörper  $k$  die komplexen Multiplikationen der zugehörigen abelschen Funktionen sich als Meromorphismen von  $K$  deuten lassen. Ich halte dies nicht für richtig, und ich glaube, dass die Schwierigkeit, die Sie bisher für den Beweis hatten, in der Natur der Sache begründet liegt. Was man billigerweise allein erwarten kann, ist: Die komplexen Multiplikationen finden sich als Meromorphismen des zu  $K$  gehörigen Körpers abelscher Funktionen, aber nur in ganz besonderen Spezialfällen finden sich diese als Meromorphismen von  $K$  selbst wieder. Der zu  $K$  gehörige Körper abelscher Funktionen ist bekanntlich rein-algebraisch definierbar. Es ist der Körper der symmetrischen rationalen Funktionen in  $g$  unabhängigen Lösungspaaren  $x_i, y_i$  der  $K$  definierenden Grundgleichung, oder invariant ausgesprochen so: Man bilde das Kompositum von  $g$  unabhängigen Exemplaren  $K_1, \dots, K_g$  des Körpers  $K$  und darin denjenigen Unterkörper, der

aus allen in einander isomorph entsprechenden Elementsystemen symmetrischen Bildungen besteht. Obwohl ich es nicht präzise fassen kann, habe ich das bestimmte Gefühl, dass sich ein zu diesem abelschen Funktionskörper  $A$  isomorpher Teilkörper  $A_0$  von  $A$  nicht notwendig als eine entsprechende Bildung aus einem zu  $K$  isomorphen Teilkörper  $K_0$  von  $K$  darstellt, sondern dass dies etwa dem Spezialfall entspricht, dass die Periodenmatrix diagonal zerfällt.

Es wird sie interessieren, den folgenden Ansatz kennen zu lernen, der mir als der Schlüssel zur Verallgemeinerung meiner Theorie in der letzten Zeit vor Augen steht.

Sei jetzt  $k$  ein beliebiger algebraisch-abgeschlossener Körper und  $K$  ein Funktionenkörper vom Geschlecht  $g$  über  $k$ . Bekanntlich existiert in  $K$  ein *nicht-speziales Primdivisorensystem*  $o_1 \dots o_g$ , d. h. ein solches für welches die folgenden beiden miteinander gleichwertigen Tatsachen richtig sind:

$\dim(o_1 \dots o_g) = 1$ , d. h. es existiert kein nicht-konstantes ganzes Multiplum von  $(o_1 \dots o_g)^{-1}$  in  $K$

$\dim \frac{W}{o_1 \dots o_g} = 0$ , d. h. es existiert kein nicht-verschwindendes ganzes durch  $o_1 \dots o_g$  teilbares Differential von  $K$ , oder auch: die Determinante aus den Werten der ganzen Differentialbasis an den Stellen  $o_i$  ist nicht Null.

Siehe dazu den Existenzbeweis in Hensel-Landsberg, S. 317-319.

Für ein solches System

$$o = o_1 \dots o_g$$

gelten dann nach dem Riemann-Rochschen Satz folgende Dimensionsrelationen:

$$\dim og = 1 + n, \quad \text{für jeden ganzen Divisor } g \text{ vom Grad } n.$$

Hiernach kann man eine Basis der nicht-konstanten ganzen Multipla von  $o^{-2}$ , deren Anzahl gerade  $g$  ist, so finden, dass ihre  $g$  Elemente  $x_i$  jeweils genau  $o_i^2$  im Nenner haben, die übrigen  $o_j$  aber höchstens zur ersten Potenz. Ebenso kann eine  $g$ -gliedrige Zusatzbasis der ganzen Multipla von  $o^{-3}$  (die nicht schon solche von  $o^{-2}$  sind) so finden, dass ihre  $g$  Elemente  $y_i$  jeweils genau  $o_i^{-3}$  im Nenner haben, die übrigen  $o_j$  aber höchstens zur ersten Potenz.

Man zeigt dann leicht, ganz analog wie für  $g = 1$ , dass zwischen den Spaltenvektoren  $x$  und  $y$ , die aus diesen Basen zusammengestellt sind, eine Gleichung der folgenden Form besteht:

$$y^2 = A_0x^3 + A_1xy + A_2x^2 + A_3y + A_4x + a_5.$$

Dabei sind die Potenzen und Produkte der  $x, y$  gliedweise verstanden, ferner sind  $A_0, \dots, A_4$   $g$ -reihige Matrizen, davon  $A_0, A_1, A_2$  Diagonalmatrizen und  $A_0$  sogar regulär, schliesslich  $a_5$  eine Spalte, alles mit Koeffizienten in  $k$ .

Ist die Charakteristik von  $k$  nicht gerade 2 oder 3, so kann man durch Ausnutzung der noch bestehenden Freiheit in der Wahl von  $x, y$  erreichen, dass  $A_0 = E, A_1 = 0, A_2 = 0$  wird.

$K$  selbst ist jedenfalls gleich  $k(x_1, \dots, x_g; y_1, \dots, y_g)$ . Ferner ist der Polynombereich in den  $x_1, \dots, x_g; y_1, \dots, y_g$  über  $k$  gerade die Gesamtheit der höchstens bei  $o_1, \dots, o_g$  gebrochenen Elemente von  $K$ , oder auch die Gesamtheit der von dem Element

$$x = x_1 + \dots + x_g$$

ganz-algebraisch-abhängigen Elemente von  $K$ .\*)  $K$  selbst ist über dem Körper  $k(x)$  vom genauen Grade  $2g$ , da  $x$  den genauen Nenner  $o^2$  hat. Ich sehe diese Art der Erzeugung von  $K$  als einen Ersatz der Weierstrassschen Normalform im Falle  $g = 1$  an.

Ich vermute ferner: Löst man die zwischen  $x_1, \dots, x_g$  noch bestehenden algebraischen Abhängigkeiten, betrachtet also nur den Körper, der durch obige Matrizengleichung für  $y$  über dem Körper der  $g$  unabhängigen Variablen  $x$  erzeugt wird, und nimmt darin die in den Koordinaten  $x_i, y_i$  symmetrischen Funktionen, so erhält man den Körper der abelschen Funktionen zu  $K$  in obigem Sinne.

Diese Vermutung stützt sich auf den bekannten Ausdruck des Abelschen Theorems (Additionstheorems) in dieser Sprache:

Seien  $p$  und  $q$  zwei ganze Divisoren vom Grade  $g$  und sei  $r$  der i. a. eindeutig durch  $p$  und  $q$  bestimmte ganze Divisor vom Grade  $g$  mit

$$\frac{pqr}{o^3} \approx 1$$

---

\*) [...] der  $\mathfrak{p} \neq o_i$  durch die konst. Reste der  $x_i, y_i \bmod \mathfrak{p}$ .

Sind dann  $P$  und  $Q$  die Matrizen aus je  $g$  Zeilen und  $2g$  Spalten, die aus den konstanten Resten der  $x, y$  nach den je  $g$  Primdivisoren von  $p, q$  zusammengestellt sind (die  $i$ -te Zeile von  $P$  besteht aus den  $2g$  konstanten Resten der  $x_i, y_i$  nach dem  $i$ -ten Primdivisor  $p_i$  von  $p$ ), so gilt die Determinantenrelation

$$\begin{vmatrix} 1 & P \\ 1 & Q \\ 1 & r \end{vmatrix} = 0,$$

wo  $r$  jede beliebige Zeile der entsprechend für  $r$  gebildeten Restmatrix  $R$  bedeutet. Fasst man hier die konstanten Reste als Unbestimmte auf, so liefert diese Gleichung die symmetrischen Funktionen der Zeilen von  $R$  als rationale Funktionen der symmetrischen Funktionen der Zeilen von  $P$  und der von  $Q$ , und zwar dadurch dass man die Determinantenrelation in der üblichen Weise mit der obigen Matrizenungleichung kombiniert. Siehe das bekannte Verfahren für  $g = 1$  etwa in Weber, Algebra III, § 13, oder auch allgemeiner Hensel–Landsberg, S. 682.

Ich wollte Sie alles dies wenigstens wissen lassen, damit Sie einen Begriff bekommen, auf welchem Wege ich mir einen weiteren Verlauf der Theorie denke, und auch, was ich bisher noch *nicht* kann. Hier ist nämlich meine Weisheit zunächst am Schluss angelangt.

Dagegen wird es Sie interessieren, noch den folgenden Tatbestand zu erfahren, den Witt und ich kürzlich bewiesen haben:

Sei  $k$  algebraisch-abgeschlossen von Primzahlcharakteristik  $p$ . Sei  $o_1 \dots o_g = o$  wie eben verstanden. Dann existiert auch eine Basis  $v_1, \dots, v_g = v$  der ganzen Multipla von  $o^{-p}$ , die nicht schon ganze Multipla von  $o^{-p+1}$  sind, derart, dass  $v_i$  den genauen Nenner  $o_i^{-p}$  hat und die übrigen  $o_j$  höchstens zur ersten Potenz im Nenner hat. Ist  $t_i$  ein Primelement zu  $o_i$ , so bestehen also Entwicklungen

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{1}{t_i^p} - \frac{a_{ii}}{t_i} + \dots \text{ bei } o_i \\ v_i &= -\frac{a_{ij}}{t_j} + \dots \text{ bei } o_j. \end{aligned}$$

Sei  $A$  die  $g$ -reihige Matrix der Koeffizienten rechts. Dann und nur dann existieren zyklische unverzweigte Erweiterungskörper vom Grade  $p$  über  $K$ , wenn das quasilineare Gleichungssystem

$$Ac^p = c$$

nicht-identische Lösungsvektoren  $c$  in  $k$  hat. Die Anzahl der linear-unabhängigen  $c$  ist gleich der Anzahl der unabhängigen solchen Erweiterungskörper von  $K$ . Diese Anzahl berechnet sich durch ein der Elementarteilerttheorie nachgebildetes, auch an sich recht amüsanter Verfahren als der Rang der Matrix

$$A^{(n)} = A A^p A^{p^2} \dots A^{p^n}$$

für hinreichend hohes  $n$ . Dabei bedeutet  $p$  im Exponenten von  $A$  nicht die Potenz nach dem Matrizenprodukt, sondern die elementweise Potenzierung von  $A$  mit  $p$ . Die Ränge der  $A^{(n)}$  nehmen mit wachsendem  $n$  monoton ab und werden von einem  $n$  an konstant. Dieser Grenzwert ist dann eben die gesuchte Anzahl. Insbesondere ist die fragliche Anzahl im allgemeinen genau gleich  $g$ , und nur dann kleiner als  $g$ , wenn  $A$  singular ist. Das ist das genaue Analogon meiner früheren Resultate im Falle  $g = 1$ .

Man sieht auch hieraus, dass die  $g$ -reihigen Matrizen für die Behandlung des Falles  $g > 1$  eine ausschlaggebende Rolle spielen. Das geht ja übrigens in anderer Weise auch aus der schönen Arbeit von Siegel in den *Annals of Mathematics* über quadratische Formen hervor, deren wuchtiger letzter Teil ganz den algebraischen Funktionenkörpern gewidmet ist. Sie sollten sich diese Arbeit, oder mein Ref. darüber, das sehr bald in den *F. d. M.* erscheinen wird einmal ansehen, das ist etwas ganz epochemachendes.

Nun zum Schluss noch einige andere Dinge.

Herzlichen Dank für die Zusendung Ihrer Note zu der Eichlerschen Arbeit. Diese Arbeit habe ich noch nicht endgültig zum Druck in *Crelle* angenommen. Sie war so entsetzlich kompliziert geschrieben, dass ich das Ms. erst einmal an Chevalley geschickt habe, mit der Bitte es einmal gründlich durchzuprüfen und eine Anweisung an den Autor für eine bessere Darstellung zu geben. Ich lasse daher Ihre Note einstweilen bei mir liegen, und werde darauf zurückkommen, wenn über das Schicksal des Eichlerschen Ms. Klarheit gewonnen ist. Kommt es zu einer Veröffentlichung in *Crelle*, so werde ich gerne Ihre Note gleich im Anschluss daran abdrucken. Sie gestatten mir dann wohl die Freiheit, noch einige redaktionelle Änderungen vorzunehmen, die mir für das Verständnis vorteilhaft erscheinen.

Herr Grell ist nun leider doch sehr schlecht weggekommen. Sie werden ja wohl davon unterrichtet sein. Er hat seine Stellung in Halle endgültig verloren, und es besteht nicht die geringste Möglichkeit, ihn jetzt in irgendeine andere Stelle zu nehmen.

Herrn Witt habe ich um einen Sonderabdruck seiner Existenzarbeit gebe-

ten. Er geht Ihnen mit gleicher Post zu. Ich lege noch drei bei mir überzählige Abzüge Ihrer Dissertation bei, über die Sie wohl gerne selber verfügen. Von meiner Arbeit mit Davenport hatte ich leider nur 25 Abdrucke, und die sind alle weg. Ich kann Ihnen also zu meinem Bedauern keinen mehr schicken, selbst einen Korrekturabzug habe ich nicht mehr.

Ich muss Ihnen noch berichten, dass ich eine endgültige Darstellung meiner Ergebnisse aus Hamb. Abh. 10 in vier Crelle–Abhandl. erscheinen lassen werde, die ich eben zum Druck gegeben habe. Ich habe eine ausserordentliche Vereinfachung in den Beweisen erzielt. Insbesondere habe ich bewiesen, dass *alle* Meromorphismen imaginär–quadratisch sind, bei beliebigem alg–abgeschl. Konstantenkörper, und ganz ohne jede Abschätzung, und ohne Dirichletschen Einheitensatz. All dies ersetze ich durch Anwendung des bisher niemals fruchtbar gemachten schönen Satzes von Ostrowski, dass ein archimedisch–bewerteter Körper stets als Unterkörper des Körpers aller komplexen Zahlen darstellbar ist, und zwar so, dass dabei der Bewertung des Körpers der gewöhnliche absolute Betrag der komplexen Zahlen entspricht.

Ich zeige, dass der Meromorphismenring durch die Quadratwurzel aus der Norm archimedisch bewertet wird. Norm eines Meromorphismus nenne ich den Grad von  $K$  über dem betr. Teilkörper. Ich beweise dann die grundlegende Normenformel:

$$N(u + v) + N(u - v) = 2N(u) + 2N(v),$$

indem ich eine entsprechende Divisorengleichung beweise:

$$\frac{o(u + v) o(u - v)}{(ou)^2 (ov)^2} = xu - xv.$$

Hier bezeichnen  $u, v$  normierte Meromorphismen, hintere Anhängung bedeutet die Anwendung als isomorphe Abbildungen von  $K$ , also  $ou$  z. B. den  $o$  entsprechenden und  $o$  enthaltenden Primdivisor von  $Ku$ .  $x$  bedeutet irgendein nicht–konstantes ganzes Multiplum von  $o^{-2}$  in  $K$ . Die rechte Seite ist also das abstrakte Analogon von  $\wp(xu) - \wp(xv)$ . Und der Beweis der Divisorengleichung erfolgt durch Algebraisierung des Verfahrens der Abzählung der Nullstellen und Pole dieser Funktionsdifferenz. Die Divisorengleichung liefert durch Gradvergleich ohne weiteres die obige Normenformel. Diese ist erheblich schärfer, als die im letzten Abschnitt meiner Hamb. Arbeit benutzte Gradabschätzung

$$N(u + v) \leq 2N(u) + 2N(v),$$



aus der ich dort die Riemannsche Vermutung gefolgert hatte. Sie liefert durch vollständige Induktion die Formel

$$N(mu + nv) = m^2N(u) + mn(N(u + v) - N(u) - N(v)) + n^2N(v),$$

$m, n$  beliebig ganzrational. Da die linke Seite stets  $\geq 0$  ist, ist die Diskriminante der quadratischen Form rechts negativ. Man erhält also die Normenungleichung:

$$(N(u + v) - N(u) - N(v))^2 \leq 4N(u)N(v),$$

und diese ist gleichwertig damit, dass die Quadratwurzel aus der Norm eine archimedische Bewertung ist. Weiss man damit nach Ostrowski einmal, dass die Meromorphismen  $u$  als komplexe Zahlen auffassbar sind, so folgt aus der Ganzrationalität von  $N(u)$  und  $N(u + 1)$  ohne weiteres, dass sie sogar imaginär-quadratische Irrationalitäten sind.

Der Beweis der Riemannschen Vermutung kann daraus in wenigen Zeilen gefolgert werden. Ich fasse diesen jetzt so, dass er als Folge der Tatsache erscheint, dass die  $L$ -Funktion von  $K$  bei endlichem Konstantenkörper an der Stelle  $s = 0$  als Wert die Klassenzahl  $h$  von  $K$  ergibt.

Eine vorläufige Mitteilung über alles dies wird in den nächsten paar Wochen in den Göttinger Nachrichten erscheinen.

So nun aber endgültig Schluss. Ich hoffe, dass Sie nicht weiter ernstlich mit Ihrer Leber zu tun haben. Bitte grüssen Sie alle Bekannten herzlichst von mir. Und dann ein frohes Weihnachtsfest und a Happy New Year.

Stets Ihr  
H. Hasse

## 1.32 11.12.1935, Schilling to Hasse

Princeton, den 11–XII–1935.

Sehr geehrter Herr Professor,

Darf ich Ihnen einige Mitteilungen zur Theorie der komplexen Multiplikation der Funktionenkörper einer Variablen im klassischen Sinne machen? Sie fließen aus dem Studium einiger italienischer Arbeiten. Da ich die dort erhaltenen Ergebnisse zum Teil viel eleganter und schneller ableiten kann, halte ich ihre Mitteilung nicht für überflüssig. Ausserdem ergeben sich einige Hinweise auf allgemeine Funktionenkörper. Sei also  $k$  ein Funktionenkörper einer Variablen vom Geschlecht  $g$ . Zu seiner Periodenmatrix gehört eine gewisse Kommutatoralgebra  $A$  von endlichem Rang über dem Körper der rationalen Zahlen. Es werden nun allgemeine Korrespondenzen  $T_{rs}$  der Divisorengruppe von  $k$  betrachtet, d. h. Zuordnungen, bei denen einem Primdivisor  $p$  ein Divisor  $a$  vom Grade  $r$  eindeutig zugeordnet ist, während einem Teiler  $q$  von  $a$  umgekehrt ein Divisor  $b$  vom Grade  $s$  entspricht. Wenn bei  $T_{rs}$  die Zuordnungen  $p \rightarrow a$  und  $p' \rightarrow a'$  gelten, so wird durch die Äquivalenz  $a.p^\gamma \cong a'.p'^\gamma$  eine ganze rationale Zahl  $\gamma$  festgelegt, die charakteristisch für  $T_{rs}$  ist, sie heisst die *Wertigkeit* von  $T_{rs}$ . Die Gesamtheit aller Korrespondenzen bildet einen Ring  $o$ . Ein Teil der Theorie der komplexen Multiplikation in Körpern von höherem Geschlecht besteht nun in der Untersuchung dieses Ringes  $o$ . Wenn nun  $k$  ein klassischer Funktionenkörper ist, so können die  $T_{rs}$  durch Elemente der Kommutatoralgebra mit Hilfe des abelschen Theorems dargestellt werden. Vgl. etwa die Arbeit von Weyl Seite 715 unten. Da die Struktur der Kommutatoralgebren heute völlig bekannt ist, so kann man weitgehend diese Ergebnisse ausnutzen. Zuerst folgt dass der Ring der Korrespondenzen isomorph als hyperkomplexe Ordnung in  $A$  dargestellt werden kann; die Charakteristik ist Null. Hieraus folgt sofort, dass eine endliche Zahl  $\mu$  von Basis-korrespondenzen existiert, aus denen sich alle übrigen mit ganzen rationalen Zahlen kombinieren lassen, weiter, dass jede Korrespondenz einer Gleichung

endlichen Grades  $\rho$  genügt. Für die Zahlen  $\mu$  und  $\rho$  ergeben sich sofort aus der als bekannt angenommenen Struktur von  $A$  obere Abschätzungen. Weiterhin lassen sich aus der Albert'schen Theorie sofort die Fälle angeben, in denen die Grenzen wirklich erreicht werden. Dann gilt noch, dass dann und nur dann von der Einheit unabhängige Korrespondenzen existieren, wenn  $k$  wirklich komplexe Multiplikationen besitzt. Und das ist nur im Falle allgemeiner Moduln möglich. Berücksichtigt man ferner, dass allein die Wertigkeitskorrespondenzen ( $\neq 0$ ) von der Identität abhängen, so erhält man sofort, dass nur Körper mit allgemeinen Moduln frei von singulären Korrespondenzen sind. Alle diese Resultate sind in den italienischen Arbeiten verstreut zu finden, aber die dortigen Beweise sind viel umständlicher. Es fehlt aber völlig die Ausnutzung der Albertschen Strukturuntersuchungen. Weiterhin ergibt sich, dass nur an einer Stelle transzendente Hilfsmittel benutzt werden. Nämlich: Die Darstellung der Ordnung der Korrespondenzen in der Kommutatoralgebra. Dies war nötig, um die Endlichkeit der Basis einzusehen. Ich vermute aber, dass man auch aus den italienischen Arbeiten einen rein algebraischen Beweis, der von der Theorie der Riemannschen Matrizen unabhängig ist, herausdestillieren kann. Der würde für beliebige Körper gelten, denn die Ordnung der Korrespondenzen kann unabhängig von der Theorie der RM definiert werden. Hier dürfte der Ansatzpunkt für die allgemeine Theorie liegen. Alle weiteren oben angewandten Schlussweisen sind rein algebraisch und daher allgemein. Im Falle der klassischen Körper kommt man aber noch einen Schritt weiter. Es handelt sich um die Untersuchung der zugeordneten Jakobischen Mannigfaltigkeit  $V_g$ . Zur Vereinfachung will ich annehmen, dass die RM zu  $k$  irreduzibel ist, d. h. also auch die Integrale erster Gattung irreduzibel sind. Der allgemeine Fall ergibt sich dann durch Zusammensetzung. Aus der Arbeit von Castelnuovo, die ich in einem früheren Brief erwähnte, folgt, dass die Korrespondenzen zweiter Art zwischen Divisoren der Ordnung  $g$  als birationale Transformationen auf der  $V_g$  gedeutet werden können. Diese Gruppe ist abelsch und  $g$ -fach kontinuierlich. Es handelt sich jetzt um die Struktur der gesamten Gruppe der birationalen Transformationen von  $V_g$  modulo der Untergruppe der birationalen Transformationen zweiter Art. Mit Hilfe der Theorie der abelschen Funktionen, die zu  $V_g$  gehören, ergibt sich sogleich eine Übersetzung in die zugehörige Kommutatoralgebra  $A$ . Rosati hat aber gezeigt, dass man auch auf rein algebraischem Wege eine Deutung jener Gruppe (Multiplikabilitätsgruppe) geben kann. Er zeigt nämlich, dass den Einheiten der durch *eine* Korrespondenz  $T_{rs}$  erzeugten kommutativen Ordnung birationale Transformationen von  $V_g$

entsprechen. Dies verallgemeinert man sofort zu dem Satz, dass die Multiplikabilitätsgruppe isomorph zur Einheitengruppe der Ordnung der Korrespondenzen ist. Von dieser weiss man, dass sie eigentlich diskontinuierlich ist. Da nun noch die Albertsche Theorie zur Verfügung steht, so erhält man auch Aussagen über die abelschen Untergruppen. Hierdurch wieder eine Erweiterung und Vereinfachung gegenüber den italienischen Arbeiten. Ausserdem ist so auf rein algebraischen Wegen gezeigt, dass die Multiplikabilitätsgruppe dann und nur dann sich auf die zyklische Gruppe von 2 Elementen reduziert, wenn der Körper  $k$  allgemeine Moduln hat. Ausserdem wird durch die Ordnung der Korrespondenzen vollständig die Gruppe der birationalen Transformationen von  $V_g$  beschrieben.

Nun wird die Klassenkörpertheorie nach unten zu entwickeln sein. Ich vermute die Gültigkeit der folgenden Sätze:

- 1.) Ein isomorpher Unterkörper  $K'$  des zu  $V_g$  gehörigen algebraischen Körpers  $K$  von  $g$  Variablen ist galoissch. Das muss aus der Zerlegung der Primdivisoren der Höchstdimension  $g - 1$  folgen.
- 2.) Jeder zu einer komplexen Multiplikation (die nur bei speziellen Moduln möglich ist) ist Oberkörper eines Körpers, der durch natürliche Multiplikation entsteht.
- 3.) Körper natürlicher Multiplikation sind abelsch mit einer  $2g$ -zyklischen Gruppe.
- 4.) Die Gruppen der isomorphen Unterkörper entsprechen endlichen Untergruppen der Gruppe der birationalen Transformationen. Letztere sind durch die Multiplikabilitätsgruppe und die speziellen endlichen birationalen Transformationen erster und zweiter Art bestimmt.
- 5.) Zu jeder endlichen Untergruppe existiert ein Körper.

Leider habe ich nur Stücke zu den Beweisen. Ich glaube aber, mit ziemlicher Sicherheit die richtige Verallgemeinerung der Resultate des Falles  $g = 1$  ausgesprochen zu haben. Die Stellen des Körpers  $k$  spielen eine Rolle zur algebraischen Bestimmung der endlichen Untergruppen, vgl. die Arbeit von Castelnuovo. Die Stellen von der Höchstdimension sind nötig zur Beschreibung der Klassenkörpereigenschaft der Funktionenkörper von  $g$  Veränderlichen. Es ergibt sich, dass die Divisorenklassengruppe in  $K$  die von  $g = 1$  her bekannte Struktur hat. Die Struktur der Klassengruppe von  $k$  ist mit Hilfe der Schlüsse bei C. zu erhalten. Es ist im Augenblick nicht nötig, das noch einmal auszubreiten. Zu Satz 5 habe ich noch gar keine Hinweise, vielleicht schafft man ihn, wenn man "skrupellos" mit abelschen Funktionen arbeitet. Zum Beweis von Satz 1–4 reichen — soweit ich gekommen bin — die

in der Note über algebraische Funktionen mehrerer Variabler angegebenen Sätze aus. Wenn der Beweis für die Endlichkeit der Basis der Ordnung der Korrespondenzen möglich ist, kann man auch auf eine Verallgemeinerung auf abstrakte Konstantenkörper erwarten. Die Teiler der Körpergrade, die prim zur Charakteristik sind, werden wie im klassischen Falle behandelt. Die Charakteristik spielt wegen der Klassenkörpertheorie wieder die Ausnahmestelle. Mit Sicherheit steht heute schon fest, dass der elliptische Fall eine Ausnahmestelle spielt, weil es nur einen Typus von Stellen gibt. Für die höheren Fälle werden durch die beiden Extreme verschiedene Eigenschaften der betrachteten Körper beschrieben. Zum Schluss möchte ich eine Reduktion des Schurschen Problems angeben.  $G$  die Gruppe der Ordnung  $n$ ,  $Z$  der Körper der  $n$ -ten E. W. Dann ist  $G_Z = S_1 \dot{+} \dots \dot{+} S_h$ , wobei  $S_i$  über  $Z$  einfach und normal vom Grade  $n_i$ . Sei  $P$  eine Sylowgruppe zur Primzahl  $p/n$ .  $P_Z$  ist in  $G_Z$  enthalten. Entsprechend den zweiseitigen Idempotenten  $e_i$  zu den  $S_i$  ergeben sich normale Systeme  $P_i = e_i.P_Z$ , die in den  $S_i$  enthalten sind. Die  $P_i$  können gleich  $Z$  sein. Für die wirklich auftretenden  $P_i$  ist der Grad eine Potenz der Primzahl  $p$  und ein Teiler von  $n_i$ . Wenn ich nun *annehme*, dass diese Grade von  $P_i$  genau gleich den maximalen  $p$ -Potenzen in  $n_i$  sind, so spaltet  $S_i$  wegen der Normalität die Algebra  $P_i$  als direkten Faktor ab. Nimmt man dies für alle Primzahlen  $p/n$  an, so erhält man eine direkte Produktdarstellung der  $S_i$  durch teilerfremde normale Algebren. Letztere sind aber nach der Darstellungstheorie durch die einfachen Darstellungen der Sylowgruppen bestimmt. Nach dem früher bewiesenen Satze über  $Z$  absolut irreduzibeln, d. h. zu vollständigen Matrizenringen isomorphen. Demnach sind die  $S_i$  unter der obigen Annahme sämtlich Matrizenringe. Fertig. Es fragt sich nun, ob diese Annahmen a priori erfüllt sind. Ob sie aus dem Satz folgen, dass der Index einer Sylowgruppe stets teilerfremd zur Primzahl der Sylowgruppe ist? Diese Maximalitätsaussage müsste sich also in die einfachen Bestandteile fortsetzen?

Mit vorzüglicher Hochachtung  
Ihr O. Schilling.

### 1.33 16.12.1935, Hasse to Schilling

Prof. Dr. Hasse

Göttingen, den 16. Dezember 1935.

---

Bunsenstr. 3–5

Herrn

Dr. O. Schilling

Institute for  
advanced Study  
Princeton N. J.

---

USA.

Lieber Herr Schilling!

Herzlichen Dank für Ihre beiden Manuskripte, die leider infolge Unterfrankierung erst vor einigen Tagen hier eingingen. Ich habe vor allem das Ms. über Einheiten genau angesehen — das andere kannte ich ja schon — und jetzt auch noch beide Herr Witt zur Durchsicht gegeben. Ich glaube aber, ich kann Ihnen schon heute sagen, dass ich beide gern für Crelles J. annehme. Ich bin froh, dass Sie sich der Mühe unterzogen haben, die Heyschen Beweise erneut und klar darzustellen. Auch was Sie sonst dazu gefunden haben, scheint mir sehr interessant. Wegen der Bezugnahme auf die Eichlersche Arbeit siehe meinen vorigen Brief. Ev. müsste dies ganz unterbleiben, denn ich kann nicht absehen, wie schnell das E. sche Ms. in einen lesbaren druckfertigen Zustand kommt. Ihre Ausführungen vom 28. November haben sich mit meinem ausführlichen Brief gekreuzt. Sie waren also auch schon von sich aus zu der Erkenntnis gekommen, dass man für die Meromorphismen bei höherem Geschlecht den Körper der abelschen Funktionen zugrunde legen muss. Was Sie

im übrigen Schreiben, ist ein lobenswertes Programm. Dass Sie sich der Mühe unterziehen, die italienischen Arbeiten genau zu lesen und das herauszuholen, was wir jetzt brauchen können, ist eine wahrhaft edle Tat. Sie werden meine eigene Struktur hinreichend kennen, um zu wissen, dass ich lieber ein Jahr lang auf eigenen Wegen vorwärtsbohre, als solch eine Sisyphusarbeit auf mich zu nehmen. Jedenfalls hat mir das, was Sie als vorläufiges Ergebnis der Durchsicht dieser Arbeiten schreiben, schon wertvolle Hinweise gegeben.

Zu meiner grossen Freude kann ich feststellen, dass es mit Ihrem wissenschaftlichen Schaffen auf breiter Bahn vorwärts geht. Lassen Sie sich nicht durch die Tatsache entmutigen, dass man drüben wenig Verständnis für all diese Dinge hat. Wenn Sie etwas Schönes herausbringen, dann wird es schon für Sie selbst sprechen. Ich selbst muss leider für das nächste Jahr meine Hauptarbeitskraft anderen Dingen zuwenden, nämlich meinem Buch über Zahlentheorie. Seien Sie also nicht böse, wenn ich im Einzelnen auf all Ihre Mitteilungen nicht ausführlich eingehen kann, Sie wissen ja, wie vielseitig meine Pflichten sind und wie wenig Zeit ich daher übrig habe.

Mit herzlichen Grüssen und besten Wünschen für weitere schöne Erfolge

I h r  
H. Hasse

## 1.34 16.12.1935, Schilling to Hasse

OTTO SCHILLING

DEN 16. XII. 1935.

Sehr geehrter Herr Professor,

Ich danke Ihnen für den hoch interessanten Brief vom 3. XII. Inzwischen habe ich ein kleines Stück zu den im letzten Briefe ausgesprochenen Sätzen beweisen können. Ich will die Schlüsse kurz angeben. Sei  $K$  ein klassischer Funktionenkörper vom Geschlecht  $g$ ,  $\Omega$  seine Periodenmatrix,  $V_g$  ein Körper zugehöriger  $2g$ -fach periodischer Funktionen in  $g$  Variablen, etwa die Jakobische Mannigfaltigkeit. Es handelt sich um die Untersuchung der natürlichen Multiplikationen.  $V_g$  enthält als algebraischen Unterkörper endlichen Grades den Körper  $V_g^{(n)}$  der gleichen Funktionen, nur das Argument mit  $n$  multipliziert. Dieser  $V_g^{(n)}$  ist nach der Transformationstheorie der Thetafunktionen mit dem Körper der Funktionen identisch, deren Perioden die  $n$ -ten Teile von sind.  $V_g$  ist über  $V_g^{(n)}$  unverzweigt (das zeigt man rein algebraisch wie im Falle  $g = 1$ , der Begriff "Unverzweigt" bezieht sich hier auf die Primstellen der Höchstdimension, ausserdem ist  $V_g$  zu  $V_g^{(n)}$  wegen der blossen Periodenteilung isomorph) und abelsch. Die Gruppe ist das direkte Produkt von genau  $2g$  Zyklen der Ordnung  $n$ . Analytisch erhält man diese Automorphismen durch Addition von  $n$ -ten Periodenteilen zu den Argumenten der  $V_g$  definierenden Funktionen. Dabei bleibt gerade  $V_g^{(n)}$  invariant. Dass das die genaue Gruppe ist folgt aus der Grundtatsache über (birationale) Transformationen von  $V_g$ . Sie können nach Hurwitz stets durch Transformation an den Perioden gedeutet werden. Die geforderte Invarianz von  $V_g^{(n)}$  ergibt dann genau die Addition von  $n$ -ten Teilen. Nun ergibt die Isomorphie bei Festlegung eines ganz beliebigen Systems von Primdivisoren der Höchstdimension (vgl. meine Note über Funktionen mehrerer Variabler, Auszeichnung eines Systems von transzendenten Elementen, auf das die Divisorenmenge bezogen wird), dass die (absolute) Divisorenklassengruppe der Ordnung  $(0, \dots, 0)$



eine zu obigem direkten Produkt isomorphe Untergruppe enthält. Ich hoffe, auf diesem Wege die Sätzegruppe nach und nach beweisen zu können. Damit wenigstens die klassische Theorie so weit als möglich durchgeführt ist. Die singulären Transformationen, die den Elementen der Multiplikabilitätsgruppe zugeordnet werden können, hoffe ich durch Abfangen mit einer natürlichen Multiplikation in das Schema einfügen zu können.

Ich möchte bemerken, dass ich nicht den symmetrisierten Körper der abelschen Funktionen benutze. Seine Struktur ist mir nicht genügend bekannt, auch glaube ich, dass im abstrakten Falle die Fassung der Symmetriebedingungen die Sache nicht einfacher und "handgreiflicher" macht. Die Erfolge werden aber allein zeigen, was *das* Richtige ist!

Ich möchte gern in dem von Ihnen definierten Funktionenkörper von  $g$  Variablen die verschiedenen Arten von Primstellen und die Zusammenhänge zwischen ihnen genauer fassen. Wie ich schon schrieb, muss man wahrscheinlich die Stellen der Höchstdimension *und* der Dimension Null betrachten. Letztere liefern die Sätze über den betrachteten Körpern einer Variablen. Die Multiplikation ist aber eine Angelegenheit, die nur im Körper von  $g$  Var. beschrieben werden kann. Vgl. den früher zitierten Satz von Weber. Aber *wie* muss man die Multiplikationen abstrakt beschreiben ?? Ihre Mitteilungen scheinen aber genügend Hinweise zu geben. Die algebraische Formulierung des abelschen Theorems muss in Beziehung zu der gruppentheoretischen von Castelnuovo gebracht werden. Denn hier sind die Multipl. und Gruppen wirklich vorhanden. Hoffentlich kann ich bald diese Frage einwandfrei fassen.

Es ist ziemlich sicher, dass diese Theorie noch viele Überraschungen beschehen wird. Z. B. ist der Meromorphismenring bei höherem Geschlecht nicht mehr so nett, dass er sich immer als kommutative Ordnung beschreiben lässt. Vgl. die Theorie der Korrespondenzen und Riemannschen Matrizen.

Ich wäre sehr dankbar, wenn Sie mir von dem Bericht über die Siegelsche Arbeit und Ihren anderen Arbeiten Korrekturen schicken würden. Es dauert immer etwas lang, bis offiziell diese Ergebnisse nach USA gelangen!

Sie sprechen auch von einer ausführlichen Begründung der arithmetischen Theorie in Funktionenkörpern mit Konstanten aus Zahlkörpern. Im Stile der Arbeit von F. K. Schmidt in der M. Z. 30. Würden Sie so freundlich sein und mir mitteilen, welche Dinge Sie besonders interessieren? Für die Gesamtheit der Stellen mit einrangiger Bewertung gilt kein R. R. Satz. Ich weiss nicht, ob Sie das meinten. Man könnte folgendes machen: aus der abstrakten Forderung einer Bewertung vom Range 1 die Realisierung durch Primideale in passenden Ringen herleiten. Vollständigkeitsatz. Dann die Verzweigungstheorie

explizit aufschreiben. Untersuchung der perfekten Erweiterungen, speziell der zweifach perfekten der Stellen erster Art. Für letztere dürfte die Brauersche Gruppe interessant werden. Bei den Funktionen zweier Variabler ist es wenigstens so.

Über die Note zu dem Satz von Herrn Eichler verfügen Sie bitte in der Ihnen am besten geeignet erscheinenden Weise. Mir ist die Formulierung im Einzelnen ganz gleichgültig.

Über Herrn Grell habe ich bis auf eine kurze Mitteilung, die Sie machen, nichts wieder gehört. Ich verstehe vollkommen, dass man auch nach einer vollständigen Bereinigung der Angelegenheit (wie weit das möglich war usf. entzieht sich meiner Kenntnis) für ihn an einer Universität keine Stelle finden kann. Wenn es aber zutrifft — was ich hoffe —, dass keine Gesetzesverletzung vorlag, so sollte der Staat die Sache in die Hand nehmen. So viel ich mich erinnere hat sich Herr Grell eingehender mit Photogrammetrie beschäftigt. Sollte man da nicht nach einer angemessenen Militärdienstzeit für ihn eine Stelle als Instruktor im Heere finden können? Ganz ausgeschlossen ist, dass für ihn im Ausland eine Beschäftigung gefunden werden kann. Ich kann auf Einzelheiten nicht eingehen.

Ich weiss genau wie schwer es ist, in diesem Lande eine Anstellung zu bekommen.

Mit den besten Wünschen  
für ein friedliches und  
erfolgreiches neues Jahr

Ihr

O. Schilling.

## 1.35 20.12.1935, Schilling to Hasse

den 20–XII–1935

Sehr geehrter Herr Professor,

Ich möchte noch einmal auf Ihren letzten Brief zurückkommen. Die folgenden Bemerkungen beziehen sich auf Körper  $K$  von beliebigem Geschlecht. Es wird versucht, die komplexe Multiplikation für sie zu formulieren. Es sei also  $K$  über dem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$  durch eine Matrixengleichung  $\eta^3 = \mathfrak{x}^3 + A\mathfrak{x} + B\eta + \mathfrak{c}$  definiert. Weiterhin sei das abelsche Theorem in seiner algebraischen Form für "allgemeine" Divisoren bekannt. Es besagt, dass mit rationalen Prozessen aus zwei Konstantenlösungen eine neue hergeleitet werden kann. Unter Konstantenlösung wird dabei ein Paar von  $g$ -reihigen Matrizen verstanden:  $(\mathfrak{x} \bmod \mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{x} \bmod \mathfrak{P}_g; \eta \bmod \mathfrak{P}_1, \dots, \eta \bmod \mathfrak{P}_g)$ . Im elliptischen Falle hat man noch die Funktionenlösungen  $(\mathfrak{x}, \eta)$ . Zur Weiterentwicklung der Theorie muss hierzu ein Analogon gefunden werden. Im elliptischen Falle geht das doch so: man hat das Additionstheorem für Konstantenlösungen, dann ersetzt man die Werte durch Unbestimmte, diese werden dann mit Funktionenlösungen, die in dem Körper liegen, identifiziert. Wegen  $g = 1$  ergeben sich dann bei Spezialisierung (Homomorphiesatz) keine Ausnahmelösungen, für die die Formel ungültig wird. (Die Klassen von  $K$  sind eindeutig durch die Primdivisoren repräsentiert.)

Ich glaube nun, dass dieser Prozess zum Ausgang genommen werden kann. In der algebraischen Formulierung des Additionstheorems durch die  $g$ -reihigen Zahlmatrizen, die aus den Werten an den Stellen, die zu einem Repräsentanten einer Klasse von  $K$  gehören, bestehen, ersetze man diese Zahlen durch Unbestimmte und erkläre zwischen diesen Matrizen formal eine Addition. Dieser Ansatz läuft offenbar auf folgendes hinaus: Man nehme  $g$  Exemplare  $K^{(i)}$  des Körpers  $K = k(\mathfrak{x}, \eta)$ . Aus ihnen bilde man das Kompositum  $A$ , das ist ein Körper von  $g$  Variablen. Unter einer Funktionenlösung  $(\mathfrak{x}, \eta)$  werde nun das Schema  $(\mathfrak{x}^{(1)}, \dots, \mathfrak{x}^{(g)}; \eta^{(1)}, \dots, \eta^{(g)})$  verstanden. Hierbei sind  $(\mathfrak{x}^{(i)}, \eta^{(i)})$  die zu einer Lösung  $(\mathfrak{x}, \eta)$  in  $K$  abstrakt isomorphen Lösungen in den  $K^{(i)}$ . So ordnet man jeder Lösung aus  $K$  eine Lösung in  $A$  zu. Ihre

Addition werde durch Formalisierung der Addition von Konstantenlösungen erklärt. Das müsste doch möglich sein! Für die klassischen abelschen Funktionen ist es wenigstens der Fall, nur mit dem Unterschiede, dass man von Relationen zwischen den Thetafunktionen ausgeht und dann durch Spezialisierung der Argumente zu Konstantenrelationen übergeht. Diesen Übergang stelle ich mir hier so vor:

Sei etwa  $\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_g$  ein Repräsentant für eine Klasse von  $K$ . Den  $\mathfrak{P}_i$  ent-

sprechen in dem Körper  $k(x)$ , der durch  $x = x_1 + \dots + x_g$  mit  $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_g \end{pmatrix}$

erklärt ist, gewisse Elemente  $\alpha_i$  aus  $k$  eindeutig. Der Körper  $A$  enthält nun den rationalen Körper  $k(x^{(1)}, \dots, x^{(g)})$  von  $g$  Variablen. In diesem ist  $k[x^{(1)}, \dots, x^{(g)}]$  eine ganz-abgeschlossene Ordnung, die das Primideal  $\tilde{\mathfrak{p}} = (x^{(1)} - \alpha_1, \dots, x^{(g)} - \alpha_g)$  enthält. (Die Konstanten  $\alpha_i$  mögen beliebig aber für später fest auf die transzendenten Elemente  $x^{(i)}$  verteilt sein, die Anordnung der Stellen  $\mathfrak{P}_i$  spielt keine Rolle im abelschen Theorem.) Durch  $\tilde{\mathfrak{p}}$  wird eine nulldimensionale Stelle  $\tilde{\mathfrak{P}}$  von  $A$  festgelegt, derart dass mod dieser Stelle die Funktionenlösung  $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$  in die Konstantenlösung  $(\mathfrak{x} \bmod \mathfrak{P}_1, \dots; \dots, \mathfrak{y} \bmod \mathfrak{P}_g)$ , die der Lösung  $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$  in  $K$  entspricht, übergeht. Zwischen den so konstruierten nulldimensionalen Stellen  $\tilde{\mathfrak{P}}$  von  $A$ , die normalisiert bezüglich der  $K^{(i)}$  und damit bezüglich der Lösung  $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$  sind, muss eine Multiplikation eingeführt werden. Sie ist i. A. nicht mehr eindeutig. Man erhält sie durch obige Konstruktion, indem man sie zuerst für die zugeordneten Klassen von  $K$  ausführt und dann zurück übersetzt. Es dürfte so nicht schwer sein, den Klassensatz zu erhalten. Und damit die Übersicht über die Untergruppen endlicher Ordnung in der Gruppe der Konstantenlösungen und der Gruppe von  $K$ .

Wie gesagt, es hängt von der Möglichkeit einer Addition der Funktionenlösungen in  $A$  ab. Die Definition der Meromorphismen als Operatoren auf den verschiedenen Gruppen ist leicht. Auch der Nachweis, dass die Meromorphismen zu galoisschen Unterkörpern von  $A$  führen. Betrachtung von Stellen der *Höchst*dimension. Auch die Beschreibung der Gruppen als Untergruppen der Additionsgruppe der Konstantenlösungen ist möglich.

Wenn ich auch keinen Beweis für alle diese Dinge angeben kann, so glaube ich mit ziemlicher Sicherheit sagen zu können, dass dieser Körper  $A$  das Analogon zu den Körpern von Thetafunktionen ist. Und *nicht* der Körper, der

durch Aufhebung der Bindungen innerhalb einer Lösung  $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$  zum Körper  $K$  entsteht. Ausser den nach obigen Angaben möglichen Definitionen spricht noch für jene negative Aussage, dass ein Körper von Thetafunktionen (die zu einem Körper  $K$  gehören) im Allgemeinen keine Homomorphismen auf einen zu dem gegebenen  $K$  isomorphen Körper enthält. Vielmehr ergeben sich meist Körper von höherem Geschlecht. Dass jene dann eine reduzible Basis für die Integrale erster Gattung haben, bzw. dass ihre Riemannsche Matrix sicher unrein ist mit einem zu der  $K$ -Matrix isomorphen Bestandteil, tut nichts zur Sache. Übrigens dürfte an der Struktur der Matrizen  $A$  und  $B$  einer Normalform abzulesen sein, ob die Kommutatoralgebra halbeinfach ist usf. Z.B. besagt für  $g = 2$  die Diagonalität von  $A, B$ , dass die Integrale auf elliptische reduzierbar sind, denn das Additionstheorem kann durch 2 ell. Th. beschrieben werden. Ich glaube kaum, dass man die unverzweigten abelschen Erweiterungen von  $K$ , deren Grad zur Charakteristik prim ist, von  $K$  allein aus beschreiben kann. Für die  $p$ -Erweiterungen geht es ja wie Sie gezeigt haben. Diese verhalten sich aber immer ganz anders. Vielleicht können Sie mir eine scharfe Kritik zu den ausgesprochenen Ansätzen schicken. Besonders interessiert mich Ihre Meinung über die Addition. Hoffentlich langweile ich Sie mit derartigen unfertigen Dingen nicht. Ich glaube aber, dass auch sie ausgesprochen werden müssen!

Mit den besten Grüßen  
Ihr sehr ergebener  
O. Schilling.

## 1.36 22.12.1935, Hasse to Schilling

22. 12. 35

Lieber Herr Schilling,

Ich möchte heute noch einmal auf Ihre Arbeit zur Theorie der Einheiten in rationalen hyperkomplexen Systemen zurückkommen. Herr Witt und ich haben uns sehr bemüht, da durchzukommen. Das ist uns auch im allgemeinen gelungen. Nur an einer Stelle sehen wir uns nicht überzeugt. Das ist die Stelle auf S. 12 oben und der spätere Schluss auf die Ungültigkeit der Geschlechtsformel.

Dazu erscheint es notwendig zu wissen, *ob aus der Endlichkeit der Erzeugendenzahl die Endlichkeit der Ränderzahl folgt*. Die Umkehrung ist leicht, aber gilt der Sachverhalt auch so herum.

Herr Witt lässt Sie ferner fragen, ob Sie bei Ihren Schlüssen beachtet hätten, dass in der Heyschen Berechnung der Geschlechtsformel Ungenauigkeiten passiert sind?

Ich möchte sicherheitshalber Ihr Ms. noch so lange liegen lassen, bis Sie sich zu diesen Punkten geäußert haben. Zu der obigen Hauptfrage würde ich Ihnen sehr empfehlen, doch einmal mit Weyl darüber zu sprechen. Er versteht doch gerade von diesen Dingen sehr viel.

Ihren langen Brief, der heute früh ankam, konnte ich bisher nur durchfliegen. Ich stehe unmittelbar vor dem Antritt einer 14-tägigen Erholungsreise zu meinem Vater nach Kassel und dann in den Harz, und da habe ich eine grosse Menge von Dingen noch aufzuarbeiten. jedenfalls scheint es mir, dass Sie da eine Masse an für unsere Zwecke hochwichtigem Material aufgedeckt haben; zur algebraischen Durcharbeitung und endgültigen Darstellung sind Sie nun offenbar der Berufenste. Ich selbst muss ja leider, wie ich schon schrieb, meine Forschungen über Funktionenkörper fürs Erste unterbrechen. Sie haben also völlig freie Bahn. Heil und Sieg dazu!

Mit herzlichen Neujahrswünschen und Grüßen auch an alle Bekannten dort

stets Ihr  
H. Hasse

## 1.37 09.01.1936, Schilling to Hasse

Princeton, den 9-I-1936.

Sehr geehrter Herr Professor,

Entschuldigen Sie

bitte, dass ich Ihnen überflüssige Unkosten durch Unterfrankierung gemacht habe. Ich werde die Leute im Büro des Instituts immer nachprüfen lassen. Zu dem Manuskript über die Einheitengruppen lege ich eine Umänderung bei. Ich lasse die Stelle über die Quaternionen ganz fort. Weyl konnte mir auch nicht positiv sagen, dass eine diskontinuierliche Gruppe mit endlichem Fundamentalbereich und endlicher Erzeugendenzahl einen von endlich vielen Kreisbögen zusammengesetzten Rand hat. Wahrscheinlich kommen noch Bedingungen hinzu, die man in unserem Falle nachweisen muss. Leider habe ich nur zu dem Existenzbeweis von K. Hey mir genau Aufzeichnungen gemacht. Die Formeln für die Quaternionen hatte ich mir ohne Beweise notiert. Ich erinnere mich aber noch dunkel, dass bei Hey irgend was an diesen Meth nicht ganz in Ordnung war. Ich wäre also Herrn Witt sehr dankbar, wenn er mir einen genauen Hinweis geben könnte. Denn ich habe hier kein Exemplar der betr. Arbeit auftreiben können.

Im Falle der klassischen Funktionenkörper kann ich nun einwandfrei die durch natürliche Multiplikationen erzeugten meromorphen Körper behandeln.

Sei  $k(x, y) = K$  ein Körper des Geschlechts  $g$ ,  $\Omega = (\omega_{ij})$  die Periodenmatrix der Integrale erster Gattung. Zu  $\Omega$  gehört wie Riemann und andere gezeigt haben eine Reihe von  $g + 1$  Thetafunktionen in  $g$  Variablen, die genau  $\Omega$  zur Periodenmatrix haben. Unter einem Körper  $A$  von zu  $\Omega$  gehörigen Funktionen werde jeder Körper rationaler Funktionen dieser  $g + 1$  verstanden, der den algebraischen Transzendenzgrad  $g$  hat.<sup>1</sup> Die Funktionen von  $A$  gestatten auch  $\Omega$  als Periodenmatrix. Nun sei  $\omega_{ij}$  eine beliebige Periode. Wenn  $\varphi(u_1, \dots, u_g)$  ein beliebiges Element aus  $A$  ist, so erzeugt

---

<sup>1</sup> Writen on the left margin: "(also nicht notwendig der Körper aller  $\vartheta$ 's.)"



die Addition von  $\omega_{ij}$  zu dem Argument  $(u_1, \dots, u_i, \dots, u_g)$  eine birationale Transformation des Körpers  $A$ . Denn erstens ist  $\varphi(u_1, \dots, u_i + \omega_{ij}, \dots, u_g)$  rational durch Funktionen mit dem Argument  $(u_1, \dots, u_g)$  ausdrückbar, und zweitens war das Argument ganz beliebig.<sup>2</sup> So ergibt sich eine Gruppe  $\mathfrak{A}_n$  von birationalen Transformationen von  $A$ . Sie ist das Produkt von  $2g$  zyklischen Gruppen der Ordnung  $n$ . Nun existieren immer Elemente  $a$  in  $A$ , die durch die  $n^{2g}$  Transformationen in verschiedene Elemente übergeführt werden. Daher existiert ein Element, das bezüglich des Körpers  $A_n$  der bei  $\mathfrak{A}_n$  invarianten Funktionen den genauen Grad  $n^{2g}$  hat. Überdies ist die Gruppe  $A/A_n$  isomorph zu  $\mathfrak{A}_n$ . Der Körper  $A_n$  ist auf Grund seiner Definition gleich dem Körper der entsprechenden rationalen Verbindungen zwischen den zu den Perioden  $n$ -teln  $(\frac{\omega_{ij}}{n})$  gehörigen Thetafunktionen. Er ist also gleich dem Körper der Funktionen die durch natürliche Multiplikation mit  $n$  entstehen. Somit wird schliesslich  $A$  zu  $A_n$  isomorph. Hieraus folgt die Unverzweigttheit bezüglich aller möglichen Divisorenmengen von Primdivisoren der Dimension  $g - 1$ . Die Klassenkörpertheorie dieser Stellen ergibt nun sofort, dass die Untergruppen des Exponenten  $n$  in jeder möglichen Klassengruppe vom Grade Null in  $A$  den Typus  $\mathfrak{A}_n$  haben.

Sie sehen sofort, dass man die von mir in einem früheren Briefe angeführte Gruppe von Sätzen mit den angedeuteten Methoden beweisen kann. Die Hauptaufgabe war die Feststellung, die ich Ihnen hier ausführlicher dargestellt habe. Die komplexen Multiplikationen fängt man, sofern sie überhaupt existieren, durch die natürliche Multiplikation ein, welche dem absoluten Betrage der Norm der betreffenden Homographie in der Kommutatoralgebra gleich ist.

Für die abstrakten Körper habe ich von der Castelnuovo'schen Arbeit ausgehend auch einige Ansätze. Ich machte schon darauf aufmerksam, dass die Transformationen zweiter Art von C. den natürlichen Multiplikationen entsprechen. Da hier nicht die Thetafunktionen mit ihren Perioden zur Verfügung stehen, muss der Isomorphieschluss  $A \cong A_n$  auf algebraischem Wege erbracht werden. Das führt zu Identitätsproblemen von Körpern. Ich kann sie wohl schon exakt formulieren, aber noch nicht beweisen. Immerhin sehe ich Möglichkeiten zum Angriff. Die obigen Ergebnisse machen allein schon optimistisch.

Ich weiss nicht, ob ich das bisher Gefundene zusammenschreiben soll. Vielleicht warte ich aber noch, bis ich einen Beweis für das Analogon Ihres Satzes

---

<sup>2</sup> Written on the left margin: “(bi-rational)”

über die Addition von Konstantenlösungen usf. habe. Hier sind die Stellen der Dimension Null massgebend, wenn man im Körper  $A$  arbeiten will. Das Identitätsproblem hat mich erneut zu vor einem Jahre angefangenen Untersuchungen über Algebren bezüglich perfekten Körpern geführt. Körper, die bezüglich einer Bewertung vom Rang  $n$  maximal perfekt sind. Diese sind wie ich zeigen kann isomorph zu Potenzreihenkörpern in mehreren Variablen. Für solche Körper dürften also die von Ihnen und F. K. Schmidt gefundenen Struktursätze übertragbar sein. Ich will mir das überlegen. Man muss eben für die Körper höheren Geschlechtes erst alles zusammentragen. Eine mühsame Arbeit, die in scheinbar fernliegende Gebiete führt. Übrigens haben die Normenrestklassengruppen in solchen perfekten Körpern sehr interessante Strukturen. Sie sind im wesentlichen  $n$ -fach zyklisch. Die Klassenkörpertheorie im Kleinen sieht — falls die Gruppen endlich sind, was in Spezialfällen erfüllt ist — also anders aus. Ich werde diese Dinge auch gelegentlich zusammenstellen. Das hat noch Zeit. Vorerst will ich noch weitersuchen. Heute schickte mir übrigens Herr Eichler eine Abschrift seiner Arbeit. Er fügte ein Rezept zum Lesen bei. Die Dinge müssen furchtbar kompliziert sein. Es wird einige Zeit dauern, bis man sich durchgelesen hat. Die Struktur des Denkens ist eben bei jedem Menschen anders. Immerhin muss es möglich sein, sich auch anderen verständlich zu machen. Ich habe noch sehr damit zu ringen.

Mit herzlichen Grüßen  
Ihr  
O. Schilling.

## 1.38 10.02.1936, Hasse to Schilling

10. Februar 1936.

Herrn

Dr. O. S c h i l l i n g

Institute of advanced Study  
Princeton (N. J.)

-----

USA.

Lieber Herr Schilling!

Herzlichen Dank für Ihren Brief vom 19. Januar. Ihr Manuskript über Einheitengruppen habe ich, wie gewünscht, umgeändert und zum Druck eingereicht.

Da es schwer ist, Herrn Witt zu einer detaillierten Aeusserung über die Arbeit von Käthe Hey zu veranlassen, habe ich mir erlaubt, Ihnen ein Exemplar der Dissertation beim Verlag zu bestellen und hoffe, dass Ihnen das recht ist. Ich selbst habe auch eines für mich bestellt. Es ist ganz billig. Im übrigen freut es mich, dass Ihre Untersuchungen über die Divisorenklassengruppen munter fortschreiten. Die Thetafunktionen müssen natürlich verschwinden. Ich selbst habe meine Aufmerksamkeit in der letzten Zeit ausschliesslich wieder der algebraischen Zahlentheorie und der Strukturtheorie diskret bewerteter perfekter Körper zugewandt, als Vorarbeiten für mein im Sommer zu schreibendes Buch über Zahlentheorie. Teichmüller, Witt und ich sind in der letzteren Theorie sachlich und methodisch erheblich über die ungeheuer komplizierte Theorie von F. K. Schmidt und mir im Crelle 170 hinausgekommen und zwar so, dass die neue Strukturtheorie sehr einfach und durchsichtig geworden ist und als naturgemässe gemeinsame Grundlage der Arithmetik in Zahl- und Funktionskörpern genommen werden kann, soweit die Restklassenkörper endlich sind.

Herzlichst Ihr  
H. Hasse

## 1.39 13.02.1936, Schilling to Hasse

OTTO SCHILLING

DEN 13-II 1936

Sehr geehrter Herr Professor,

Für die Zusendung der 2 Mitteilungen aus den Göttinger Nachrichten möchte ich Ihnen herzlich danken. Wie durchsichtig doch jetzt die Theorie geworden ist! Leider habe ich in der letzten Zeit mich mehr mit der arithmetischen Theorie der mehrfachen Potenzreihenkörper beschäftigt, so dass ich meine Untersuchungen über den Körper der Thetafunktionen ruhen lassen musste. Das war vielleicht ganz gut; denn langsam zieht es mich sehr stark dorthin zurück. — Der Zweck dieses Briefes ist aber ein anderer. Da Sie mich seit 1933 kennen und meine Arbeit aus nächster Nähe beobachten können, bitte ich Sie um eine kurze Auskunft. Von vornherein möchte ich Ihnen aber versichern, dass Ihre Antwort ganz unverbindlich sein wird, d. h. ich werde nicht eines Tages gelaufen kommen und Vorwürfe machen!

Die Situation ist die: ich werde im November dieses Jahres 25 Jahre alt. Auf Grund nicht abänderbarer Gesellschaftsverträge usf. muss ich mich in meinem 25<sup>ten</sup> Lebensjahre entscheiden, ob ich in das Geschäft meines Vaters eintreten will oder nicht. Das ist eine Tatsache, die grausam erscheinen mag. Und für mich ist sie es auch, denn ich werde zu einer klaren Entscheidung gezwungen.

Nun traue ich mich nicht, ohne Erschöpfung aller Gründe für diesen Entschluss, eine Entscheidung vorzubereiten. Wenn ich auch vorläufig noch Zeit habe, so lastet doch der Gedanke schon ziemlich schwer auf mir.

Ich wäre Ihnen nun äußerst dankbar, wenn Sie mir eine kurze Mitteilung über meine wissenschaftlichen Aussichten und Fähigkeiten zukommen liessen. Schauen Sie, falls ich zu jenen Mathematikern gehöre, die man mit durchschleppt, nur weil sie existieren und weil man sie aus menschlichen Gründen nicht aufgeben will, so halte ich es für angebracht meine heutige Arbeit aufzugeben und für Bessere Platz zu machen. Es wäre ein bedrückendes Gefühl

für mich, später zu den „hoffnungslosen Fällen“ gezählt zu werden. Da Sie mich nun genauer kennen, nehme ich an, dass Sie ein einigermaßen umrissenes Urteil über meine wissenschaftliche Persönlichkeit besitzen. Eine kurze Andeutung der Tendenz genügt mir vollständig!

Und noch eine Frage. Hätte ich — unter der Voraussetzung entsprechender Leistungen — Aussichten im Laufe der Jahre in Deutschland vorwärts zu kommen? Diese Frage muss ich mir auch vorlegen, da ich im Augenblick wirklich nicht genau weiss, wie lange ich hier bleiben kann.

Wenn Sie mir ein paar Zeilen zukommen lassen könnten, wäre ich Ihnen von Herzen dankbar. Ich betone noch einmal, dass sie ganz unverbindlich sein werden.

Mit den besten Grüßen

Ihr

O. Schilling.

## 1.40 30.03.1936, Hasse to Schilling

30. 3. 36

Herrn Dr. O. Schilling  
The Institute of Advanced Study

P r i n c e t o n N. J.

---

U. S. A.

Lieber Herr Schilling,

Von meiner Reise zurückgekehrt, will ich heute Ihren Brief von Mitte Februar beantworten. Sie werden verstehen, daß es mir außerordentlich schwer fällt, überhaupt etwas zu sagen. Hätten Sie mir dieselbe Frage vor 2 Jahren vorgelegt, so würde ich sie wohl dahin beantwortet haben, daß Sie lieber die sichere Laufbahn im Geschäft Ihres Vaters einschlagen sollen. Nun haben Sie aber in den letzten zwei Jahren ganz erheblich an mathematischem Ausmaß gewonnen. Das einzige, was Ihnen fehlt, ist meiner Ansicht nach die Fähigkeit, bei einer Sache, die Sie einmal angefangen haben, bis zum letzten durchzuschlagen. Sie haben zwar viele Ideen, und Ihre Phantasie ist rege, aber Sie haben nicht immer die Kraft zur Bewältigung aller Einzelheiten und auch vielleicht nicht die Gabe, eine Sache klar und geordnet, streng und verständlich darzustellen.

Nun sind alles dies Dinge, die man erlernen kann. Hauptausschlaggebend für Ihren Entschluß darf daher nicht diese meine einschränkende Kritik sein, sondern Sie müssen sich die Frage vorlegen, ob der Drang zur mathematischen Forschung in Ihnen so stark ist, daß Sie darauf ein Leben aufbauen wollen. Ich bin überzeugt, daß, wenn Sie sich mit Ihrer ganzen Kraft hinter eine Sache setzen, Sie es dabei zu etwas bringen.

Vielleicht sollten Sie nicht so viele Sachen auf einmal betreiben, das zerreißt nur die Aufmerksamkeit und die Kräfte. Sie haben sich doch in den letzten Jahren auf dem Gebiet der Arithmetik und Algebra so viel umgesehen, daß Sie sicher zum mindesten eine Stelle finden, wo Sie mit Erfolg

ansetzen können.

Etwas ganz anderes ist natürlich die Frage, ob Sie rein äußerlich Aussichten haben, vorwärts zu kommen. Ihnen dafür einen Freibrief auszustellen, ist mir natürlich unmöglich. Ich möchte aber glauben, daß hier eine Reihe von beachtlichen Leistungen Ihrerseits alle vielleicht im Augenblick vorhandenen Hindernisse aus dem Wege räumen wird.

Im übrigen würde ich dies alles am liebsten mündlich mit Ihnen besprechen. Vielleicht kommen Sie ja noch vor dem Zeitpunkt, wo Sie sich entscheiden müssen, nach Deutschland zurück und können dann einmal hier vorzusprechen.

Inzwischen ist unsere gemeinsame Arbeit erschienen, und ich habe hier 75 Sonderabdrucke liegen. Ich sende Ihnen mit gleicher Post 10 davon zur Verteilung an Ihre dortigen Freunde und bitte Sie um gelegentliche Mitteilung derjenigen Adressen, an deren Belieferung Ihnen noch gelegen ist. Ich werde dann unter Berücksichtigung dieser Wünsche und an Hand meiner Versandliste den Versand von hier aus übernehmen.

Die Korrekturen Ihrer Note über Klassenkörpertheorie bei algebraischen Funktionen mehrerer Veränderlichen habe ich vor einigen Tagen gelesen und druckfertig erklärt.

Mit herzlichen Grüßen

stets Ihr

H. Hasse



## 1.41 10.04.1936, Schilling to Hasse

OTTO SCHILLING

DEN 10-IV-1936.

Sehr geehrter Herr Professor,

Für Ihren lebenswürdigen Brief vom 30-III muss ich Ihnen von Herzen danken. Es ist mir nun viel leichter, einen Entschluss zu treffen. Ich muss gestehen, dass ich ohne die Beschäftigung mit der Mathematik mich unwohl fühlen würde. Sicher habe ich viel zu lernen. Wenn die Voraussetzungen zur Überwindung einer gewissen inneren Rastlosigkeit und Unruhe erfüllt sein werden, hoffe ich die bisher fehlende Energie zur Konzentration auf einen Gegenstand aufbringen zu können. Um die „äusseren“ Aussichten ist mir weniger bange. Das sind Dinge, die nicht im persönlichen Ermessen allein liegen!

Immerhin freue ich mich, Ihnen mitteilen zu können, dass die Fakultät des Instituts mich gern hier im nächsten akademischen Jahre sieht. Ich hoffe, dass ich bald eine weitere Aufenthaltserlaubnis bekommen kann. ≡≡≡

Für die Übersendung der Sonderdrucke danke ich auch. Der Verlag hatte mir schon einige zugeschickt. Ich habe wirklich keine Wünsche über die Verwendung der restlichen Exemplare zu äußern. Bitte verschicken Sie sie gelegentlich mit.

In den letzten Wochen habe ich einige unbedeutende Sachen über Automorphismen gewisser Substitutionsgruppen und unendlicher abelscher Gruppen gefunden. Sie werden aber daran wenig interessiert sein. Auch schickte ich an Herrn Moriya eine Arbeit über die Klassenkörpertheorie der endlichen abelschen Erweiterungen unendlicher  $p$ -adischer Körper. Wir wollen sie gemeinsam veröffentlichen, da Herr Moriya in der Zwischenzeit eine andere Begründung gefunden hatte. In 2 Monaten hoffe ich die unterbrochenen Untersuchungen über algebraische Funktionkörper wieder aufnehmen zu können. Ich will erst ein paar andere Noten usf. fertig machen, denn dieser Zustand der Unfertigkeit beginnt mich zu beunruhigen.

Mit vorzüglicher Hochachtung  
Ihr  
O. Schilling.

## 1.42 27.04.1936, Hasse to Schilling

27. 4. 36

Prof. Dr. H. Hasse

Herrn Dr. Otto Schilling

Institute for Advanced Study

P r i n c e t o n , N. J.

Lieber Herr Schilling,

vielen herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief. Hoffentlich bedeutet die hochformelle Anrede und der hochformelle Schluß darin nicht, daß ich Sie mit meinen offenen Darlegungen über Ihre Person irgendwie verletzt habe.

Für die Versendung der Sonderdrucke unserer gemeinsamen Arbeit wüßte ich, um Doppelzustellungen zu vermeiden, gern, wem Sie bereits einen Sonderdruck gegeben oder geschickt haben.

Mit herzlichen Grüßen

stets Ihr  
H. Hasse

## 1.43 17.05.1936, Schilling to Hasse

Princeton, den 17-V-1936.

Sehr geehrter Herr Professor,

Von der Arbeit über Normen in Divisionsalgebren gab ich nur den Herren Wedderburn und Baer Sonderdrucke. Nach Deutschland habe ich keine geschickt.

Ich möchte diese Gelegenheit benutzen, um Ihnen eine Kleinigkeit mitzuteilen, die mir beim Lesen der Arbeit von Herrn Witt über die Konstruktion von Körpern mit vorgeschriebener Gruppe eingefallen ist. Es handelt sich um eine notwendige und hinreichende Bedingung für Gruppenerweiterungen im  $p$ -adischen.

Sei gegeben  $k \leq K \leq L$  und  $h = G(K, k)$ ,  $g = G(L, K)$  die zugehörigen Galoisgruppen. Weiter sei  $g$  zyklisch und  $k$  enthalte die  $(g : 1)$ -ten E. W. Wenn  $G$  die Gruppe von  $L/k$  bezeichnet, so ist  $G/g = h$ . Ordnet man den Elementen  $\sigma$  von  $h$  Symbole  $u_\sigma$  zu, so wird das Holomorph  $G$  von  $g$  bez.  $h$  im wesentlichen durch die Relationen  $u_\sigma u_\tau = g_{\sigma, \tau} u_{\sigma\tau}$  und  $u_\sigma^{-1} g u_\sigma = g^\sigma$  (Automorphismus von  $g$ ) charakterisiert. Sei  $\zeta$  eine primitive  $(q-1)$ -te E. W. von  $k$ ,  $Z$  eine pr. EW. von  $K$ . Es ist  $\text{ord } Z = (q^{fK} - 1)$  und  $\zeta = Z^f$ , wobei  $f = \frac{q^{fK} - 1}{q - 1}$ . Diese Auswahl der EW. sei im folgenden fest. Wenn  $\chi$  ein Charakter von  $g$  ist, so sei  $\chi(g_{\sigma, \tau}) = \zeta^{\gamma_{\sigma, \tau}} = Z^{f\gamma_{\sigma, \tau}}$ .

Nach R. Brauer kann  $K$  dann und nur dann zu einem  $L/k$  mit  $G$  erweitert werden, wenn  $A_{g_{\sigma, \tau}} = (\chi(g_{\sigma, \tau}), K) = (\zeta^{\gamma_{\sigma, \tau}}, K) = (Z^{f\gamma_{\sigma, \tau}}, K) \sim 1$  ist.

Diese Bedingung soll untersucht werden.

Es bedeutet  $A_{g_{\sigma, \tau}} \sim 1$ , dass  $Z^{f\gamma_{\sigma, \tau}} = \frac{\delta_\sigma \delta_\tau^\sigma}{\delta_{\sigma\tau}}$  mit  $\delta_\sigma, \delta_\tau$  in  $K^*$ . Man mache den Ansatz  $\delta_\sigma = \pi^{a_\sigma} Z^{b_\sigma} \varepsilon_\sigma$  usf. Dabei  $\pi$  das Primelement in einer festen Auswahl und  $\varepsilon_\sigma$  Einseinheiten von  $K$ . Anwendung von  $g$  ergibt  $\pi^\sigma = \pi Z^{\alpha_\sigma} \eta_\sigma$ ,  $Z^\sigma = Z^{\beta_\sigma}$  und  $\varepsilon_\tau^\sigma = \xi_{\sigma, \tau}$ . Also wird  $\delta_\tau^\sigma = (\pi^{a_\tau} Z^{b_\tau} \varepsilon_\tau)^\sigma = (\pi Z^{\alpha_\sigma} \eta_\sigma)^{a_\tau} Z^{\beta_\sigma b_\tau} \xi_{\sigma, \tau}$  und schliesslich

$$\frac{\delta_\sigma \delta_\tau^\sigma}{\delta_{\sigma\tau}} = \pi^{a_\sigma + a_\tau - a_{\sigma\tau}} \cdot Z^{b_\sigma + \alpha_\sigma a_\tau + \beta_\sigma b_\tau - b_{\sigma\tau}} \cdot \varepsilon_\sigma \eta_\sigma^{a_\tau} \xi_{\sigma, \tau} \varepsilon_{\sigma, \tau}^{-1}$$

Die Forderung  $Z^{f\gamma_{\sigma, \tau}} = \pi^{a_\sigma + a_\tau - a_{\sigma\tau}} \cdot Z^{\dots} \dots \dots$

$$\begin{aligned} \text{führt zu } (1) \quad a_\sigma + a_\tau - a_{\sigma\tau} &= 0 \\ (2) \quad \varepsilon_\sigma \eta_\sigma^{a_\tau} \xi_{\sigma,\tau} \varepsilon_{\sigma,\tau}^{-1} &= 1 \\ (3) \quad b_\sigma + \alpha_\sigma a_\tau + \beta_\sigma b_\tau - b_{\sigma\tau} &\equiv f \cdot \gamma_{\sigma,\tau} \pmod{\text{ord } Z}. \end{aligned}$$

Nun wird  $\sum_\sigma a_\sigma + (h : \ell) \cdot a_\tau - \sum_\sigma a_{\sigma\tau} = 0$ , oder  $(h : \ell) \cdot a_\tau = 0$ , d. h.  $a_\tau = 0$ . Bleiben die Bedingungen

$$\begin{aligned} (2') \quad \varepsilon_\sigma \xi_{\sigma,\tau} \varepsilon_{\sigma,\tau}^{-1} &= 1 \\ (3') \quad b_\sigma + \beta_\sigma b_\tau - b_{\sigma\tau} &\equiv f \cdot \gamma_{\sigma,\tau} \pmod{\text{ord } Z}. \end{aligned}$$

Die Forderung  $\frac{\delta_\sigma \delta_\tau^\sigma}{\delta_{\sigma\tau}} = Z^{b_\sigma + \beta_\sigma b_\tau - b_{\sigma\tau}} \cdot \frac{\varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau^\sigma}{\varepsilon_{\sigma\tau}} = Z^{f \cdot \gamma_{\sigma,\tau}}$  zeigt, dass  $\frac{\varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau^\sigma}{\varepsilon_{\sigma\tau}} = 1$  sein muss, also  $\varepsilon_\sigma = \varepsilon^{1-\sigma}$ . Jedes bez. Einseinheiten assoziierte Faktorensystem liefert dieselbe Gleichung. Genügt also  $\delta'_\sigma = Z^{b_\sigma}$ , d. h.  $\frac{\delta'_\sigma \delta'_\tau}{\delta'_{\sigma\tau}} = \frac{\delta_\sigma \delta_\tau^\sigma}{\delta_{\sigma\tau}} = Z^{f \cdot \gamma_{\sigma,\tau}}$  zu betrachten. Wesentlich demnach allein (3').

Summation über  $\sigma$  ergibt nun in (3'):

$$\begin{aligned} \sum_\sigma b_\sigma + b_\tau \cdot \sum_\sigma \beta_\sigma - \sum_\sigma b_{\sigma\tau} &\equiv f \cdot \sum_\sigma \gamma_{\sigma,\tau} \pmod{\text{ord } Z}, \\ \text{oder} \quad b_\tau \sum_\sigma \beta_\sigma &\equiv f \cdot \sum_\sigma \gamma_{\sigma,\tau} \pmod{\text{ord } Z}. \end{aligned}$$

Nun bestimmt man  $\sum_\sigma \beta_\sigma$ . Es war  $Z^\sigma = Z^{\beta_\sigma}$ , also  $\prod_\sigma Z^\sigma = N_{K/k} Z = Z^{\sum_\sigma \beta_\sigma}$  in  $k$ . Sei  $W$  der Trägheitskörper in  $K$ , also  $(W : k) = f_K$ ,  $(K : W) = e_K$  und  $e_K f_K = (h : \ell)$ . Die Gruppe  $G_{K/W}$  sei  $w$ ,  $(w : \ell) = e_K$ . Es ist  $W = k(Z)$  und  $h = \sum_{i=1}^{f_K} \mu_i \cdot w$ ,  $Z$  bei  $w$  invariant, also  $\prod_\sigma Z^\sigma = Z^{\sum h} = Z^{\sum \sum \mu_i w} = (Z^{\sum \mu_i})^{e_K} = (N_{W/k} Z)^{e_K} = \zeta^{e_K} = Z^{f \cdot e_K}$ . (Man beachte die feste Normierung von  $\zeta$  und  $Z$ , die so gewählt sei, dass  $N_{W/k} Z = \zeta$  ist!)

$$\begin{aligned} \text{Demnach} \quad \sum_\sigma \beta_\sigma &\equiv f \cdot e_K \pmod{\text{ord } Z}, \quad \text{also} \\ b_\tau \cdot f \cdot e_K &\equiv f \cdot \sum_\sigma \gamma_{\sigma,\tau} \pmod{\text{ord } Z}. \quad \text{Hieraus folgt aber} \\ b_\tau \cdot \frac{q^{f_K} - 1}{q - 1} e_K &\equiv \frac{q^{f_K} - 1}{q - 1} \cdot \sum_\sigma \gamma_{\sigma,\tau} \pmod{q^{f_K} - 1}, \quad \text{also} \end{aligned}$$

$$\boxed{b_\tau \cdot e_K \equiv \sum_\sigma \gamma_{\sigma,\tau} \pmod{q - 1}}.$$

Setzt man  $d_K = (e_K, q - 1)$ , dann ist das Einbettungsproblem dann und nur dann lösbar, wenn  $\sum_\sigma \gamma_{\sigma,\tau} \equiv 0 \pmod{d_K}$ . Diese Bedingung ist von Nutzen zur Lösung des Konstruktionsproblems über Körper mit vorgeschriebener Gruppe  $G$ , die eine Verschränkung einer abelschen Gruppe  $h$  und einer zyklischen Gruppe  $g$  ist. Man kann mit Hilfe der Charaktere von

$k^*/k^{*(h:\ell)}$  diese Bedingungen hinschreiben. Ich habe es für zyklische Körper getan. Man benutzt die bilineare Relation zwischen den Normenrestsymbolen. Der Fall abelsch mal abelsch kann auf den Fall abelsch mal zyklisch zurückgeführt werden. Man erhält eine Anzahl von Gleichungen, die uniform eine Lösung haben müssen.

Leider bin ich noch nicht sicher, wie man das entsprechende Problem im Großen lösen kann. Gewiss hat Herr Richter im letzten Annalenband einen Monodromiesatz bewiesen, aber wie soll man eine Übersicht über die möglichen Zerlegungsgruppen bekommen? Es ändert sich doch die Darstellung als verschränktes Gruppenprodukt. Man kann wohl mit den obigen Bedingungen entscheiden, ob ein bestimmter vorgegebener  $K$  eine Einbettung  $G$  erlaubt, aber das ist noch nicht das letzte Wort.

Mit den besten Grüßen

Ihr

O. Schilling.

## 1.44 16.06.1936, Schilling to Hasse

Princeton, den 16–VI–1936.

Sehr geehrter Herr Professor,

Heute erhielt ich Ihren freundlichen Brief vom 8–VI mit den verschiedenen Richtigstellungen. Ich möchte Herrn Witt für die Liebenswürdigkeit danken, den (halben) Satz über die Einbettung von Körpern im  $p$ -adischen durchgesehen zu haben. Inzwischen habe ich selbst den von Herrn Eichler festgestellten Fehler bemerkt. Die Typenzahl in einer einfachen Algebra vom Grade  $n = 2^x \cdot n_0$ <sup>1</sup> wird gleich  $(b : \prod_p \{p^{n/m_p}\} \cdot S_{inf})$ . Dabei muss ich annehmen, dass das Zentrum  $k$  die  $2^x$ -ten Einheitswurzeln enthält.  $S_{inf}$  bedeutet in obiger Formel den Strahl nach den in der Algebra verzweigten unendlichen Stellen des Körpers  $k$ . Wenn sämtliche Klassen in der Algebra durch zweiseitige Ideale darstellbar sind, so ergibt sich  $b = \prod_p \{p^{n/m_p}\} \cdot S_{inf}$ .

Ich habe eine mit den entsprechenden Verbesserungen versehene Note an die Annals schon vor einem Monat zum Druck gegeben. Ich bitte Sie daher die andere deutsche Fassung in den Papierkorb zu werfen. Inzwischen habe ich, wie ich früher schon angekündigt hatte, mich mit einer Art Umkehrung der Klassenkörpertheorie beschäftigt. Dabei war es natürlich, dass ich die endlichen abelschen Erweiterungen über einem Zahlkörper unendlichen Grades über dem rationalen Zahlkörper untersuchte. Es zeigt sich, dass die Kl. K. Th. für alle diejenigen Grade gilt, die prim zum unendlichen Bestandteil der zum Grundkörper gehörigen  $G$ -Zahl sind. Man muss die Klassengruppe in der Gruppe aller umkehrbaren Ideale des Grundkörpers aufbauen. Die anderen unendlichen Ideale scheiden aus. Das ist eigentlich kein Wunder, da lokal für ein unendliches Primideal i. a. keine Kl. K. Th. gilt. Bei diesen Untersuchungen bin ich auch auf eine innere Charakterisierung der Hauptordnungen algebraischer endlicher Zahlkörper als spezielle V-Axiome Ringe gekommen. Ich hoffe Ihnen in Kürze Näheres darüber mitteilen zu können. Jetzt will ich erst versuchen, möglichst weit in das Problem einzudringen.

---

<sup>1</sup> Written on the left margin: “[ $x > 1$ ]”

Wann kann ich wohl auf die Korrekturen zu der Note über die Einheiten im Hyperkomplexen rechnen? Im August werde ich nämlich wahrscheinlich nicht in Princeton sein.

Mit den besten Grüßen  
Ihr sehr ergebener  
O. Schilling.



## 1.45 05.07.1936, Schilling to Hasse

THE INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY  
SCHOOL OF MATHEMATICS  
FINE HALL  
PRINCETON, NEW JERSEY

5/7/1936

Sehr geehrter Herr Professor,

Eben erhielt ich Ihren Brief. Bitte missverstehen Sie mich nicht. Es kommt bisweilen vor, dass ich solche formelle Anreden und dergleichen ganz unbewusst brauche. Das hat nichts zu bedeuten. Ich bin Ihnen nach wie vor fuer Ihren anderen Brief dankbar. Mein Entschluss ist bedeutend erleichtert worden. Und dazu bat ich Sie um Hilfe. Ich bin im Augenblick dabei, einige Arbeiten fuer die Annals druckfertig zu machen. Damit man sieht, dass ich nicht faul gewesen bin. Die Sprache macht mir keine Schwierigkeiten, d. h. ich brauche nicht vom Deutschen ins Englische zu uebersetzen. Es ist eben so wie es sein muss. Wahrscheinlich werde ich auch das naechste akademische Jahr hier sein. Ich will dann in aller Ruhe die Idealtheorie der Funktionenkoerper einer Veraenderlichen mit einem Zahlkoerper als Konstantenbereich und die Theorie der Koerper abelscher Funktionen weiter untersuchen. Die vielen Einzelresultate, die ich habe, werden sich schon zusammenfassen lassen, doch glaube ich, dass die vollstaendige Algebraisierung noch in einiger Ferne ist. Sobald ich eine Uebersicht habe, werde ich Ihnen bestimmtere Mitteilungen zukommen lassen.

Inzwischen  
Mit den besten Grüssen  
Ihr O. Schilling.

## 1.46 20.07.1936, Schilling to Hasse

Princeton, den 20–VII–1936.

Sehr geehrter Herr Professor,

Entschuldigen Sie bitte die Verzögerung, mit der die Korrekturen zu der Einheitenarbeit zurückgehen. Ich bin erst vorgestern von einer kurzen Reise zurück gekommen. Dann möchte ich Ihnen ganz besonders für die Übersendung der Korrekturen zu Ihren Arbeiten über die abstrakte komplexe Multiplikation danken. Hoffentlich kann ich Ihnen recht bald die Anzahlbestimmung der Klassen der Ordnung  $n$  in einem Körper vom Geschlecht  $g$  schicken. Ich habe die Aufgabe in ein Matrizenproblem verwandelt, nur weiss ich nicht, ob man dieses so schnell und elegant lösen kann wie im elliptischen Fall. We shall think, wait and see!

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

O. Schilling.

## 1.47 25.09.1936, Schilling to Hasse

Princeton, den 25-IX-1936.

Sehr geehrter Herr Professor,

Im Verlaufe einer Vorbesprechung zu einem Seminar über algebraische Geometrie teilte mir Herr Prof. Lefschetz mit, dass er sich mit Ihnen in Oslo über gewisse neue Ergebnisse von Herrn Deuring zur Theorie der komplexen Multiplikation unterhalten hat. Herr L. meinte, dass die Definition der Kommutatoralgebra einer Riemannschen Matrix, die zu einer gegebenen Riemannschen Fläche gehört, mit Hilfe der Theorie der algebraischen Korrespondenzen schon bekannt ist. Die Äquivalenz dieser rein algebraisch erklärbaren Algebra mit der Kommutatoralgebra einer Matrix wird im klassischen Falle mit Hilfe der Integrale erster Gattung gezeigt. Vgl. die bekannte Arbeit von Hurwitz. Zufällig fand ich heute in dem Bulletin of the National Research Council No. 63, Selected Topics in Algebraic Geometry einen Artikel von Herrn L., in dem mit Literaturangaben jene Fragen behandelt werden. Es handelt sich um die Entwicklungen auf Seite 334, 335. Aus den ziemlich kryptischen Mitteilungen von Prof. Lefschetz konnte ich leider nicht entnehmen, wie weit sich die Deuring'schen Untersuchungen mit den bekannten Resultaten decken. Von Bedeutung ist nach meiner Meinung zu wissen, ob es jetzt einen rein algebraischen Beweis für die Endlichkeit der Basis einer Algebra von Korrespondenzen gibt. Das wäre ein wirklicher Fortschritt. Ich möchte betonen, dass ich Ihnen die Literaturangabe auf Wunsch von Herrn Prof. Lefschetz schicke, irgend welches persönliches Interesse ausser dem rein wissenschaftlichen habe ich dabei nicht. In dem Seminar über algebraische Geometrie werde ich einige Vorträge über allgemeine Bewertungen halten. Es besteht dafür einiges Interesse, besonders weil diese Bewertungen birational invariant sind. Was für ein Vorlesungsprogramm haben Sie für dieses Semester?

Mit den herzlichsten Grüßen

Ihr

O. Schilling

## 1.48 09.10.1936, Hasse to Schilling

9. 10. 36

Prof. Dr. H. Hasse

Herrn Dr. O. Schilling  
Institute for Advanced Study

P r i n c e t o n , N. J.  
Fine Hall

Lieber Herr Schilling,

Deurings Untersuchungen und Ergebnisse sind insofern sehr wichtig, als sie rein algebraisch erhalten werden — Koeffizientenkörper ein beliebig abgeschlossener algebraischer Körper, die Integrale 1. Gattung werden also nicht verwendet.

Der Form nach handelt es sich im wesentlichen um die Sätze aus der bekannten Hurwitzschen Arbeit. Deuring kann zeigen, daß die Algebra der Korrespondenzen eines algebraischen Funktionenkörpers auf sich endlichen Rang hat, und daß die Korrespondenzen sich isomorph als Abbildungen der Divisorenklassengruppe des Doppelkörpers (2 Variable) nach der Untergruppe der Klassen mit konstanten Divisoren darstellen.

Ich hoffe, daß Herr Lefschetz sein Urteil 'uralt' revidiert, wenn er die ausführliche Darstellung Deurings zur Hand hat.

Ich schreibe sehr eifrig an meinem Buch über Zahlentheorie, daher heute nicht mehr.

Herzlichst

Ihr

H. Hasse

## 1.49 14.01.1937, Schilling to Hasse

Princeton, den 14-I-1937.

Sehr geehrter Herr Professor,

Ich hatte schon längere Zeit vor, Ihnen einiges über meine mathematischen Untersuchungen zu schreiben, aber immer wieder waren andere Dinge zu erledigen. Vielleicht ist es am besten, wenn ich eine Liste der im vorigen Jahre geschriebenen Arbeiten mache.

Arithmetic in a special class of algebras, erscheint in den Annals. Es handelt sich um die Verallgemeinerung von Resultaten aus meiner Dissertation mit Hilfe der Sätze von Herrn Eichler. Sie haben einen ersten Entwurf der Note gesehen.

The structure of certain rational infinite algebras, wird in dem Duke Journal erscheinen. Es wird die Anwendung der Kötheschen Resultate auf Algebren über Zahlkörpern behandelt und die Menge der Maximalordnungen in so einer Algebra untersucht. Ich bemerke, dass durch v. Neumanns Untersuchungen über kontinuierliche Geometrien neue Probleme in dieser Richtung entstanden sind.

Zur Klassenkörpertheorie über unendlichen perfekten Körpern, dazu eine zusätzliche Note. Erscheint in dem Sapporo Journal. Entstanden aus einem Briefwechsel mit Herrn Moriya. M. hat die Ausarbeitung übernommen. Aufbau der K. K. Th. mit hyperkomplexen Methoden. Fand die Sache zur gleichen Zeit wie M., dessen inzwischen erschienene Arbeit benutzt aber andere Ideen.

Class fields of infinite degree over  $p$ -adic number fields. Erscheint in den Annals. Mit Hilfe der van Dantzig'schen Topologisierung der multiplicativen Gruppe des Grundkörpers nach Untergruppen gelingt die Übertragung der K. K. Th. auf den unendlichen Fall.

Law of reciprocity in finite and infinite fields. Erscheint in dem Bulletin of the Am. Math. Soc. Es wird eine allgemeine Methode entwickelt, mit deren Hilfe man die K. K. Th. von endlichen Körpern auf unendl. Erweiterungen übertragen kann. Enge Berührungspunkte mit Chevalleys eben erschienener Arbeit. Abstrakte Herausschälung der dort angewandten Methode.

Some remarks on class field theory over infinite fields of algebraic numbers. Erscheint in dem Amer. Journal of Math. Es wird durch innere Eigenschaften des Grundkörpers entschieden, wann er endlich oder unendlich ist, weiterhin wird der Normensatz verallgemeinert.

Arithmetic in fields of formal power series in several variables. Erscheint in den Annals. Anwendung der Krullschen Bewertungstheorie auf spezielle Körper. Struktursätze, Untersuchung der endlichen Erweiterungen, Verallgemeinerung des Verzweigungsbegriffes, Grundzüge der Algebrentheorie über diesen Körpern.

Dieses Jahr habe ich mit der folgenden Arbeit begonnen:

Construction of normal fields with given Galois group. Wird wahrscheinlich im Duke Journal, das sein dreijähriges Bestehen "feiert", abgedruckt. Unter Benutzung eines Lemmas, das ich in der Note über algebraische Funktionen mehrerer Veränderlicher bewies, gelingt es, den Existenzbeweis für Körper mit vorgeschriebener Gruppe über Körpern, in denen der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz gilt, zu erbringen. Nebenbei ergibt sich ein Beweis für den Lürothschen Satz in einer weiten Klasse von Konstantenkörpern, natürlich nicht in der wörtlichen Verallgemeinerung.

Augenblicklich versuche ich die lokale Uniformisierbarkeit von algebraischen Mannigfaltigkeiten zu beweisen. Den abstrakten Teil, in dem die Resultate aus der Arbeit über formale Potenzreihen auf einen anderen Typus von Potenzreihen übertragen werden, habe ich schon fertig. Ich muss nun die Funktionentheorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher heranziehen. Und Analysis ist meine schwache Seite!

Dann habe ich eine Untersuchung zur Axiomatik der lokalen Klassenkörpertheorie fast fertig.

Es ist wohl überflüssig, darauf hinzuweisen, dass mich die Theorie der komplexen Multiplikation weiterhin fasziniert! Im Laufe der Zeit hoffe ich die begonnenen arithmetischen Untersuchungen über Körper von Thetafunktionen wieder aufzunehmen. Vorläufig will ich aber noch einige Publikationen über diesen Gegenstand abwarten, denn ich möchte nicht unnütz Zeit auf Dinge verwenden, die vielleicht andere vor mir gefunden haben.

Schliesslich habe ich noch pathologische topologische Ringe untersucht, auf die ich durch Beschäftigung mit algebraischer Geometrie geführt worden bin. Aber auch das muss noch warten, da man nicht zu viel auf einmal tun kann. Nächsten Term will ich eine kleine Vorlesung über Ihre Theorie der algebraischen Funktionenkörper halten. Dabei will ich den analytischen Standpunkt besonders betonen, denn so brauche ich nicht zu viel auf Algebrentheorie

einzugehen. Eigentlich wollte ich über komplexe Multiplikationen und Riemannsche Vermutung sprechen, aber es nimmt zu viel Zeit, die arithmetischen Grundlagen darzustellen.

André Weil wird übrigens während der nächsten Monate hier sein. Hoffentlich gelingt es unseren vereinten Anstrengungen, ihn aus der bekannten Reserve herauszubringen.

Mit grossem Interesse habe ich die Arbeiten der neuen Göttinger Schule verfolgt. Vielleicht können Sie mir einen Wunsch erfüllen? Wäre es möglich, mir Sonderdrucke der im letzten Jahre erschienenen Arbeiten von Witt, Teichmüller usf. erschienenen Arbeiten zu schicken? Meine Arbeit hängt nämlich sehr von der Umgebung ab, in der ich bin. Lese ich in einer Bibliothek, so kapiere ich wenig, und das Wenige ist in kurzer Zeit vergessen. Separate, die ich schnell zur Hand habe, helfen mir sehr. Besonders wenn ich verreise. Hoffentlich können Sie meiner Bitte nachkommen.

Mit besonderen Grüssen  
Ihr sehr ergebener  
Otto Schilling

## Kapitel 2

### Miscellaneous Related to Hasse–Schilling



## 2.1 11.07.1934, Manuscript: Änderungen im Beweis eines Einheitenhauptgeschlechtesatzes

### Ä n d e r u n g e n im Beweise eines Einheitenhauptgeschlechtesatzes für relativ-galoissche Körper.

Zum Beweise braucht man das Herbrand'sche gruppentheoretische Lemma. Dieses wieder ist eine Folge aus dem Homomorphieprinzip. Wir zeigen, wie sich dieses Prinzip für mehrere Homomorphismen ausspricht.

Die unendliche *abelsche* Gruppe mit endlicher Basis  $A$  enthalte die Untergruppe  $B$  von endlichem Index. Seien  $\varphi_i$  eine endliche Anzahl von Homomorphismen von  $A$ , wie von  $B$ .  $A^{\varphi_i}$  sei die Bildmenge von  $A$  bei Anwendung von  $\varphi_i$ ,  $\prod A^{\varphi_i}$  das Kompositum der Gruppen  $A^{\varphi_i}$ ,  $A_{\varphi_i}$  die Gesamtheit aller Elemente aus  $A$ , die bei Anwendung von  $\varphi_i$  in die 1 übergehen,  $\Delta A_{\varphi_i}$  der Durchschnitt dieser Gruppen. Entsprechend für  $B$ . Dann lautet das **Homomorphieprinzip**:

$$(A : B) \geq (\prod A^{\varphi_i} : \prod B^{\varphi_i})(\Delta A_{\varphi_i} : \Delta B_{\varphi_i}).$$

**Beweis:** (Nach H. Hasse)

Die Gruppe  $\Delta A_{\varphi_i} \cdot B$  liegt zwischen  $A$  und  $B$ . Dann ist  $(A : B) = (A : \Delta A_{\varphi_i} \cdot B)(\Delta A_{\varphi_i} \cdot B : B)$ . Wir vergleichen nun die Indizes  $(A : \Delta A_{\varphi_i} \cdot B)$  und  $(\prod A^{\varphi_i} : \prod B^{\varphi_i})$  durch Betrachtung von Repräsentantensystemen von Faktorgruppen.

Es ist  $A \supseteq A_{\varphi_i} \cdot B \supseteq B$ . ( $i = 1, \dots, n$ ).

Dann wird  $A = \sum_j \rho_{ij} \cdot B A_{\varphi_i}$  und  $B A_{\varphi_i} = \sum_k \delta_{ik} \cdot B$ . Die Elemente  $\delta_{ik}$  können aus  $B \cdot A_{\varphi_i}$  stets schon in  $A_{\varphi_i}$  gewählt werden, dann wird also  $\delta_{ik}^{\varphi_i} = 1$ .

Da wir eine abelsche Gruppe vorliegen haben, können wir  $\rho_{ij}$  mit  $\delta_{ik}$  vertauschen. Es wird also

$$A = \sum_{j,k} \rho_{ij} \delta_{ik} \cdot B \quad (i = 1, \dots, n).$$

Anwendung der Homomorphismen  $\varphi_i$  ergibt:

$$A^{\varphi_i} = \sum_k \rho_{ik}^{\varphi_i} \cdot B^{\varphi_i}.$$

Hierbei sind die  $\rho_{ik}^{\varphi_i}$  ein unabhängiges Repräsentantensystem für  $A^{\varphi_i}/B^{\varphi_i}$ . Denn aus  $\rho_{ik}^{\varphi_i} \sim \rho_{ik'}^{\varphi_i} (B^{\varphi_i})$  folgt  $\rho_{ik} \sim \rho_{ik'} (A_{\varphi_i} B^{\varphi_i})$ , d. h.  $k = k'$ . Nun betrachten wir das Kompositum  $\prod A^{\varphi_i} \bmod \prod B^{\varphi_i}$ . Es existiert dann durch Zusammensetzung die Darstellung:

$$\prod A^{\varphi_i} = \sum_{\substack{i_\nu \\ \nu=1, \dots, n}} \rho_{1 i_1}^{\varphi_1} \rho_{2 i_2}^{\varphi_2} \cdots \rho_{n i_n}^{\varphi_n} \cdot B^{\varphi_1} B^{\varphi_2} \cdots B^{\varphi_n}.$$

Unter den Elementen  $\rho_{1 i_1}^{\varphi_1} \cdots \rho_{n i_n}^{\varphi_n}$  kommen i. a. bezüglich  $\prod B^{\varphi_i}$  abhängige vor. D. H. es kann gelten:

$$\rho_{1 i_1}^{\varphi_1} \cdots \rho_{n i_n}^{\varphi_n} = B_1^{\varphi_1} \cdots B_n^{\varphi_n} \quad (+)$$

mit passenden  $B_m$  ( $m = 1, \dots, n$ ) aus der Gruppe  $B$ .

Wir zeigen nun, dass jedem Repräsentanten  $\alpha$  aus  $\Delta A_{\varphi_i}$  von  $\Delta A_{\varphi_i} \cdot B \bmod B$  ein  $n$ -tupel (+) entspricht. Wenn nämlich  $\alpha$  in dem Durchschnitt  $\Delta A_{\varphi_i}$ , so wird  $\alpha^{\varphi_1} = \alpha^{\varphi_2} = \cdots = \alpha^{\varphi_n} = 1$ . Wir stellen nun das Element  $\alpha$  in den  $n$  verschiedenen Zerlegungen dar, die dem Weg von  $A$  nach  $B$  über die  $A_{\varphi_i} \cdot B$  entsprechen. Also  $\alpha = \rho_{i k^{(i)}} \delta_{i \ell^{(i)}} \beta_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ( $\beta_i \in B$ ).

Wegen  $\alpha^{\varphi_i} = 1$  für  $i = 1, \dots, n$  wird schliesslich  $\left(\frac{\rho_{1 k^{(1)}}}{(\beta_1^{-1})}\right)^{\varphi_1} = \left(\frac{\rho_{2 k^{(2)}}}{(\beta_2^{-1})}\right)^{\varphi_2} = \cdots = \left(\frac{\rho_{n k^{(n)}}}{(\beta_n^{-1})}\right)^{\varphi_n} = 1$ . Hieraus folgt durch Multiplikation

$$\rho_{1 k^{(1)}}^{\varphi_1} \cdot \rho_{2 k^{(2)}}^{\varphi_2} \cdots \rho_{n k^{(n)}}^{\varphi_n} = (\beta_1^{-1})^{\varphi_1} (\beta_2^{-1})^{\varphi_2} \cdots (\beta_n^{-1})^{\varphi_n}.$$

D. h. jedem Element  $\alpha$  des Durchschnitts entspricht ein abhängiges Element  $\rho_{1 k^{(1)}}^{\varphi_1} \cdots \rho_{n k^{(n)}}^{\varphi_n}$  von  $\prod A^{\varphi_i} \bmod \prod B^{\varphi_i}$ , und dies hängt nur von der Klasse von  $\alpha$  nach  $\Delta A_{\varphi_i} B$  ab, wie sofort aus der Konstruktion hervorgeht. Hieraus schliesst man sofort, dass der Index  $(B \cdot \Delta A_{\varphi_i} : B)$  als Reduktionsfaktor für  $(\prod A^{\varphi_i} : \prod B^{\varphi_i})$  unter Umständen zu klein sein kann. D. h. aber

$$(A : B) \geq (\prod A^{\varphi_i} : \prod B^{\varphi_i})(\Delta A_{\varphi_i} : \Delta B_{\varphi_i}),$$

denn  $(A : B) = (A : \Delta A_{\varphi_i} B)(\Delta A_{\varphi_i} : B) = (A : \Delta A_{\varphi_i} B)(\Delta A_{\varphi_i} : B \cap \Delta A_{\varphi_i})$   
 $= (A : \Delta A_{\varphi_i} B)(\Delta A_{\varphi_i} : \Delta B_{\varphi_i})$

Nun kann man an die Verallgemeinerung des Herbrand'schen gruppentheoretischen Lemmas herangehen:

**Verallgemeinerung des Herbrand'schen Lemmas:**

$$\frac{(A_\varphi : \prod A^{\varphi_i})}{(\Delta A_{\varphi_i} : A^\varphi)} \geq \frac{(B_\varphi : \prod B^{\varphi_i})}{(\Delta B_{\varphi_i} : B^\varphi)}.$$

**Beweis:** (vgl. Arbeit Seite 11.)

1.) Nach dem verallgemeinerten Homomorphieprinzip wird

$$(A : B) \geq (\prod A^{\varphi_i} : \prod B^{\varphi_i})(\Delta A_{\varphi_i} : \Delta B_{\varphi_i}).$$

Wenn  $\varphi$  ein zu allen  $\varphi_i$  komplementärer Homomorphismus ist, gilt  $\varphi B \subseteq \Delta B_{\varphi_i} \subseteq \Delta A_{\varphi_i}$ , also kommt

$$(A : B) \geq (\prod A^{\varphi_i} : \prod B^{\varphi_i}) \cdot \frac{(\Delta A_{\varphi_i} : A^\varphi)(A^{\varphi_i} : B^\varphi)}{(\Delta B_{\varphi_i} : B^\varphi)}$$

2.) Andererseits ist  $(A : B) = (A^\varphi : B^\varphi)(A_\varphi : B_\varphi)$ .

Nun ist  $\prod B^{\varphi_i} \subseteq B_\varphi \subseteq A_\varphi$ ,  $\prod B^{\varphi_i} \subseteq \prod A^{\varphi_i} \leq A_\varphi$ , also

$$(A : B) = (A^\varphi : B^\varphi) \cdot \frac{(A_\varphi : \prod A^{\varphi_i})(\prod A^{\varphi_i} : \prod B^{\varphi_i})}{(B_\varphi : \prod B^{\varphi_i})}.$$

Durch Division erhält man aus 1.) und 2.) schliesslich

$$1 \geq \frac{(\prod A^{\varphi_i} : \prod B^{\varphi_i})(\Delta A_{\varphi_i} : A^\varphi)(A^\varphi : B^\varphi)(B_\varphi : \prod B^{\varphi_i})}{(\Delta B_{\varphi_i} : B^\varphi)(A^\varphi : B^\varphi)(A_\varphi : \prod A^{\varphi_i})(\prod A^{\varphi_i} : \prod B^{\varphi_i})}$$

oder

$$\frac{(A_\varphi : \prod A^{\varphi_i})}{(\Delta A_{\varphi_i} : A^\varphi)} \geq \frac{(B_\varphi : \prod B^{\varphi_i})}{(\Delta B_{\varphi_i} : B^\varphi)}. \text{ q. e. d.}$$

Nun kann man die Schlüsse der Arbeit übernehmen. Für das Einheitenhauptgeschlecht ergibt sich

$$\frac{(H : E^{1-\delta_2} \dots E^{1-\delta_n})}{(\epsilon : NE)} \geq \frac{(\overline{H} : \overline{E}^{1-\delta_2} \dots \overline{E}^{1-\delta_n})}{(\epsilon : \epsilon^n)} = \frac{n}{2^{\rho_2}}.$$

Nach diesen neuen Überlegungen müssen in der Arbeit an folgenden Stellen Änderungen vorgenommen werden:

§ 1. S. 4. Z. 8–9 ... , dass der interessierende Index der *Untergruppe* im wesentlichen ...

§ 2. S. 11 Im Lemma muss  $\geq$  für  $=$  stehen.

Im Beweise ist zu streichen: Die Abbildung  $A \longrightarrow A'$  ist ein ..... Dann beginnen mit: Es wird nach dem verallgemeinerten Homomorphieprinzip  $(A : B) \geq (\prod A^{\varphi_i} : \prod B^{\varphi_i})$  (!!!).

Demn ..... neuer Beweis (auf beiliegenden Zetteln!).

Nun sind noch folgende Änderungen nötig:

S. 11. Z. 13 von unten  $(A : B) \geq (\dots) \cdot \frac{(\dots)}{(\dots)}$

S. 11. Z. 5 v. u.  $\leq$

S. 11. Z. 3 v. u.  $\geq$

S. 12. im Satze:  $\geq \frac{n}{2^{\rho_2}}$

S. 13. Z. 12 von oben:  $\geq$

S. 17. Z. 4. v. o.  $\geq$

S. 17. Z. 5–6. Den genauen Wert der *rechten Seite* können wir nun angeben, es zeigt sich, dass er unabhängig von der Struktur der Gruppe ist.

S. 17. Z. 14.  $\geq$

S. 17. Z. 6. v. u.

$(H : E^{1-\delta}) = (\epsilon : NE).n$ , da in diesem Falle im Gruppenlemma das Gleichheitszeichen steht.

## 2.2 13.07.1934, Manuscript: Note by E.Witt

$j_1 = \frac{A_\nu : A^\sigma A^\tau}{A_\sigma \cap A_\tau : A^\nu}$  ist *nicht* monoton.  $\sigma\nu = \nu\sigma = 0$   
 $\tau\nu = \nu\tau = 0$

Setze  $\nu = 0$ ,  $A = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$  ord  $q^2$ .  $j_A = \frac{A : A^\sigma A^\tau}{A_\sigma \cap A_\tau}$ ,  $j_1 = 1$

1)  $j_A > j_1$       Beispiel       $\begin{array}{l} \sigma \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1 \\ \sigma \mathbf{n}_2 = 0 \end{array} \mid \begin{array}{l} \tau \mathbf{n}_1 = 0 \\ \tau \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_1 \end{array}$

2)  $j_A < j_1$       "       $\begin{array}{l} \sigma \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1 \\ \sigma \mathbf{n}_2 = 0 \end{array} \mid \begin{array}{l} \tau \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2 \\ \tau \mathbf{n}_2 = 0 \end{array}$

Von E. Witt  
 13. 7. 34

## 2.3 05.07.1935, Hasse to Consulate

Prof. Dr. H. H a s s e

Göttingen, den 5. Juli 1935.

-----  
Bunsenstr. 3-5

American Consulate General

2 Harleystreet

L o n d o n W.1.  
-----

Dear Sir,

Dr. Otto S c h i l l i n g at present Cambridge 34 Jesus Lane asks me to give you a short characteristic of him in connection with his intention of going to Princeton (USA).

Dr. Schilling studied under my supervision for two years. I know him as a zealous research student and a man of unimpeached character. I should greatly welcome any facilitation you can give him for his intended study sojourn in Princeton. Prof. Dr. Hermann Weyl of the Institute of Advanced Study there wrote me some weeks ago that he would be glad to have Dr. Schilling there as a research student.

Yours faithfully  
H. Hasse

## 2.4 09.07.1935, Consulate to Hasse

AMERICAN CONSULAR SERVICE  
London, England, July 9, 1935.

Professor Dr. H. Hasse,  
Bunsenstrasse 3-5,  
Göttingen, Germany.

Sir:

The receipt is acknowledged of your letter dated July 5, 1935, concerning Dr. Otto Schilling, who, it appears, contemplates going to Princeton University as a research student.

No record has been found to indicate that Dr. Schilling has yet made application at this office for a visa, but, when he does so, your letter will be given careful consideration in connection with his case.

Very truly yours,  
For the Consul General,

C. C. Broy,  
American Consul.

## 2.5 August 1935, Manuscript: Representations of Finite Groups

On the representations of finite groups.

O. F. G. Schilling.

88

---

It<sup>1</sup> is a well known hypothesis of I. Schur (1), that the absolutely irreducible representations of a finite group  $G$  of order  $n$  are possible in the field of the  $n$ -th roots of unity.

In this paper we shall give an new arithmetic proof for this suggestion in a special case.

Let be  $G = \{S_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, p^m$ ) an arbitrary finite group of order  $p^m$ , where  $p$  is a prime number (and  $m > 1$ ). Then the following holds:

**Theorem:** The absolutely irreducible representations of  $G$  are possible in the field  $Z_{p^m}$  of the  $p^m$ -th roots of unity.

For this purpose we consider the adjoint group ring  $G_k = S_1k + \dots + S_{p^m}k$  with coefficients in the rational number field  $k$ . The ring  $G_k$  is then the direct sum of simple rational algebras  $A_i$ :

$$G_k = A_1 + \dots + A_s \quad (2).$$

The system  $G_k$  contains the hypercomplex order  $G_o$  consisting of the finite sums of group elements with integer coefficients in the maximum order  $o$  of  $k$ . The discriminant  $d$  of this order is equal to  $(p^m)^{p^m}$  (3). The order  $G_o$  is contained in at least one maximum order  $M$  of  $G_k$ , and the discriminant of  $M$  is a divisor of  $d$ .

The centrals  $C_i$  of the algebras  $A_i$  are all contained in fields isomorphic with  $Z_{p^m}$ , we have only to adjoin the characters of the different absolutely irreducible representations of  $G$  to the rational number field  $k$  (4).

Now we consider the extension  $G_{Z_{p^m}}$  of  $G_k$ , that means we take all finite sums  $\sum S_i z_i$ , where  $z_i$  belong to  $Z_{p^m}$ . Then the centrals  $C'_i$  of  $A_i \times Z_{p^m} =$

---

<sup>1</sup> Added on the top margin of this paper:  
"In Crelle 174 aufgenommen" — "August 1935"



$A'_i$  are all isomorphic with  $Z_{p^m}$ . The new system  $G_{Z_{p^m}}$  contains the ring  $G_{o_m}$ , where  $o_m$  denotes the maximum order of  $Z_{p^m}$ . The discriminant  $D$  of a maximum order of  $G_{Z_{p^m}}$  containing  $G_{o_m}$  is at most a power of the prime divisor  $P$  of  $p$  in  $Z_{p^m}$ . (5). (We have to consider only the cases where  $m > 1$ , because for  $m = 1$  the theorem is obvious. This establishes the fact that  $D$  does not contain infinite prime spots, because  $Z_{p^m}$  is not real.)

H. Hasse showed (6), that for sufficiently great  $h$  the field  $Z_{p^{mh}}$  suffices for the absolutely irreducible representations. This means, that the  $A'_i$  become equivalent to crossed products  $(a_i, Z_{p^{mh}}/Z_{p^m})$ . (7).

If the theorem were not true, then at least one of the simple normal algebras  $A'_i$  would contain a division algebra  $D'_i$  over  $Z_{p^m}$  with  $Z_{p^{mh}}$  as decomposition field.

On the other hand the  $D'_i$  has an discriminant, which is a power of the prime ideal  $P$ . But the arithmetic theory of normal simple algebras asserts that genuine division algebras  $D'_i$  must have at least two different ramified prime spots. (8). This is in contradiction to the possibilities in  $G_{Z_{p^m}}$  and completes the proof.

### Notes

- |                          |  |
|--------------------------|--|
| (1) I. Schur,            | Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen linearer Substitutionen, Berl. Akad. Ber. 1906. |
| (2) B. L. v. d. Waerden, | Moderne Algebra II, p. 194.  |
| (3) E. Noether,          | Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie, Math. Zeitschrift vol. 30, §§ 24, 26.                |
| (4) cf (3).              |  |
| (5) D. Hilbert,          | Gesammelte Werke, vol. I. p. 199.  |

- (6) R. Brauer–H. Hasse–E. Noether, Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren. Journ. f. d. reine und angew. Math., vol. 167, p. 404.
- (7) H. Hasse, Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zerfällungskörper, Math. Annalen, vol. 107, p. 737.
- (8) cf (7) p. 750.

## 2.6 18.10.1935, Manuscript: Struktur der Divisorenklassengruppe... by O.Schilling

### Struktur der Divisorenklassengruppe vom Grade Null bei Funktionen einer Veränderlichen.

Ziel dieser Überlegungen ist eine Verallgemeinerung eines von H. Hasse gefundenen Resultates:

Bei algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper  $k$  der Charakteristik  $p$  ist in elliptischen Körpern die Divisorenklassengruppe  $\mathfrak{D}_{oc}$  (bei Hasse  $\mathfrak{A}_{oo}$ ) der endlichen Klassen vom Grade Null mit zu  $p$  primen Ordnung isomorph zur additiven Gruppe aller rationalen Zahlpaare  $(r_1, r_2) \bmod 1$  mit zu  $p$  primem Nenner.

Diesen Sachverhalt kann man noch anders aussprechen:

Die Gruppen der über  $K$  unverzweigten abelschen Körper  $L$  sind höchstens 2-dimensional. (im folgenden seien die Grade der Oberkörper  $L$  bez.  $K$  immer als zu  $p$  prim vorausgesetzt)

Dabei soll unter der Dimension einer endlichen abelschen Gruppe  $\mathfrak{G}$  die Anzahl ihrer *maximalen* zyklischen Untergruppen  $\mathfrak{Z}$  verstanden werden. Dem entspricht eine Darstellung des abelschen Körpers als Vereinigungskörper maximaler zyklischer teilerfremder (bez.  $K$ ) Unterkörper.

Die obige Aussage kann man etwa so beweisen:

Angenommen über dem elliptischen Körper  $K$  existierte ein abelscher unverzweigter Oberkörper  $L$  von der Dimension  $2+r$ , so wäre nach der Kummerschen Theorie  $L$  durch  $2+r$  Radikale erzeugbar. Diesen entsprechen Divisoren der Ordnung Null mit endlichem Exponenten. Nimmt man das kl. gem. Vielfache dieser Ordnungen als maximalen Nenner  $m$  der Zahlpaare  $(r_1, r_2) \bmod 1$  an, so bilden diese Teilpunkte auch eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit. Die den Radikalen zugeordneten Klassen des Grades Null sind also durch  $(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}) \bmod 1$  ganz darstellbar. D. h. aber dass  $r = 0$  sein muss, denn anderenfalls hätte man einen Widerspruch.

Für beliebiges Geschlecht sieht man auch die Äquivalenz der beiden Aussagen ein. Es genügt also Teilaussagen über unverzweigte abelsche Oberkörper und die Dimension der galoisschen Gruppen zu gewinnen.

Nun sollen algebraische Funktionenkörper  $K$  mit einem endlichen Zahlkörper  $k$  als Konstantenkörper untersucht werden.

Die Konstantenkörper seien immer algebraisch abgeschlossen in  $K$ , sie mögen ausserdem die im Verlaufe nötigen Einheitswurzeln enthalten.

Es gilt bekanntlich der Satz:

Die Klassen aus  $\mathfrak{D}_o^{(k)}$  gehen bei algebraischen Erweiterungen  $k^*$  von  $k$  in verschiedene Klassen von  $K^* = Kk^*$  über.

Für algebraisch abgeschlossenen Körper  $k^{**}$  gilt in  $K^{**}$  das abelsche Theorem und die weiteren Sätze über Klassen usf. Wenn das Geschlecht  $g \geq 1$  ist, so existieren bekanntlich unendlich viele endliche abelsche unverzweigte Körper  $L$  über  $K$ . Sie werden durch die rationalen Vektoren innerhalb des  $2g$ -dimensionalen Periodenparallelotops bestimmt.

Sei etwa  $L^{**}$  ein unverzweigter Körper vom Typus  $(\overbrace{1, 1, \dots, 1}^{2g\text{-mal}})$ . Es ist  $L^{**} = L_1^{**} \dots L_{2g}^{**}$  und  $L_i^{**} = K^{**}(\sqrt[\ell]{\alpha_i})$ ,  $\alpha_i \in K^{**}$  und  $\mathfrak{A}_i^\ell = (\alpha_i)$  als Divisor. Offenbar ist  $L_i^{**}$  von der speziellen Wahl des Elementes  $\alpha_i$  zu  $\mathfrak{A}_i^\ell$  unabhängig, denn  $k^{**}$  war als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt.

Wir gehen nun zu einem endlichen Unterkörper  $k^*$  zurück.  $k^*$  soll aber genügend gross sein. Es sollen  $\mathfrak{A}_i, \alpha_i, \sqrt[\ell]{1}$  in  $K^*$  bzw.  $k^*$  liegen. Dann  $L^* = L_1^* \dots L_{2g}^*$  mit  $L_i^* = K^*(\sqrt[\ell]{\alpha_i})$  auch unverzweigt abelsch und  $2g$ -dimensional. Da  $k^*$  nicht absolut abgeschlossen sein sollte, so sind die Körper  $L_i^*$  nicht mehr durch den Divisor  $\mathfrak{A}_i^\ell$  eindeutig bestimmt. Zu gegebenem Divisor  $(\alpha_i)$  erhält man unendlich viele Körper  $L_{i(a)} = K^*(\sqrt[\ell]{a\alpha_i})$ , wo  $a$  ein Restklassenrepräsentant von  $k^*/k^{\ell}$  ist. Wenn  $k^*$  der genaue Konstantenkörper von  $K^*$  war, so sind alle diese Körper verschieden. Da nun beim Übergang zum algebraisch abgeschlossenen Körper  $k^{**}$  alle diese  $L_i^*$  zu einem Körper  $L_i^{**}$  zusammenschrumpfen, liegt es nahe die unverzweigten Körper über  $K^*$  in Körperklassen einzuteilen entsprechend den zugeordneten Divisorenklassen. Dann ergibt sich aber, dass in  $K^*$  die 1-Klassengruppe, d. h. die Gruppe derjenigen Divisorenklassen vom Grade Null, die 1 zur Ordnung haben, genau  $2g$ -dimensional ist. Dieser Schluss kann für beliebige endliche Klassen ausgeführt werden.

Bezüglich eines festen Konstantenkörpers  $k^*$  brauchen natürlich nicht alle endlichen Klassen aus  $K^{**}$  schon in  $K^*$  zu liegen. Immerhin folgt:

Die endliche Klassengruppe  $\mathfrak{D}_{oe}^{(k^*)}$  ist isomorph einer Untergruppe der additiven Gruppe aller Brüche  $(r_1, \dots, r_{2g}) \bmod 1$ .

Es wird  $\mathfrak{D}_{oe}^{(k^*)} =$  der Vereinigungsgruppe aller  $\mathfrak{D}_{oe}^{(k^*)}$  für endliche Unterkörper  $k^*$ .

Ob man über die Klassen mit nicht endlicher Ordnung bei beliebigem Kon-

stantenkörper mit dieser Schlussweise Aussagen erhält, bleibe dahingestellt. Jedenfalls wird bei Einführung eines Konvergenzbegriffes in der endlichen Klassengruppe  $\mathfrak{D}_{oe}^{(k^{**})}$  die volle Divisorenklassengruppe vom Grade Null von  $K^{**}$  die perfekte Hülle des endlichen Bestandteiles. Wenn man dies übertragen will, so müsste man zeigen, dass das Endergebnis eines solchen Prozesses auf Klassen von  $K^*$  angewandt in  $K^*$  liegt.

Wenn nun der Konstantenkörper ein endliches Galoisfeld  $\bar{k}^*$  ist, so ist bekanntlich die Divisorenklassengruppe vom Grade Null endlich. Beim Übergang zum algebraisch abgeschlossenen Körper  $\bar{k}^{**}$  wird sie aber auch unendlich. Für  $g = 1$  ist nach H. Hasse alles bekannt. Der Übergang von  $\bar{k}$  zu einem endlichen genügend grossen  $\bar{k}^*$ , lässt sich wie im Falle der Charakteristik Null beschreiben. Da hier  $\bar{k}/\bar{k}^\ell$  endlich ist, treten in den Körperklassen nur endlich viele Körper auf. Es gilt aber nach wie vor:

Die 1-Klassengruppe ist bei passendem Konstantenkörper 2-dimensional. Im folgenden soll nun versucht werden für beliebiges Geschlecht  $g$  möglichst nahe an diese Aussage heranzukommen. Es genügt nach dem Vorhergehenden, Aussagen über endliche  $\bar{k}$  herzuleiten und dann zur Grenze  $\bar{k}^{**}$  überzugehen. Wichtig ist, dass hierbei keine Klassen verlorengehen.

Da die Struktur der Klassengruppe bei endlichem Zahlkörper als bekannt angenommen werden darf, liegt es nahe durch Restklassenbildung zu Körpern der Charakteristik  $p \neq 0$  überzugehen. Hierbei muss man aber sehr vorsichtig sein.

Die folgenden Ausführungen stellen einen ersten Ansatz und Versuch in dieser Richtung dar.

Dazu entwickeln wir einige arithmetische Tatsachen über Funktionenkörper einer Variablen mit einem endlichen Zahlkörper als Konstantenkörper.

Sei  $k$  ein endlicher Zahlkörper,  $p$  Primideale der Hauptordnung  $\mathfrak{o}$ ,  $x$  ein transzendentes Element,  $k(x) = K_0$ ,  $y$  endlich algebraisch bez.  $K_0$ . Sei weiter  $\mathfrak{D}_x$  der Ring aller bezüglich  $\mathfrak{o}[x]$  ganzen Elemente aus  $K_0(y) = K$ . Nach der allgemeinen Idealtheorie bzw. Bewertungstheorie ist  $\mathfrak{D}_x$  ganz abgeschlossen. Es gilt also für die Ideale die quasiganze Idealtheorie. Die höheren Primideale zerfallen in zwei wesentlich verschiedene Klassen: die Primteiler  $\mathfrak{p}$  von Primidealen  $p$  und die davon verschiedenen. Sie können unterschieden werden durch ihr Restklassenverhalten. Für die ersteren ist der Quotientenkörper zu dem Restklassenring  $\mathfrak{D}_{x\mathfrak{q}}|\mathfrak{q}$  isomorph einem endlichen Funktionenkörper mit der Charakteristik  $q = |\Gamma^{(0)} \cap \mathfrak{q}|$ , für den zweiten

Typus ist der Restklassenkörper isomorph einer endlichen Erweiterung des Konstantenkörpers  $k$ . Erstere sollen Stellen zweiter Art, letztere Stellen erster Art heissen, entsprechend einer Bezeichnungsweise aus der Theorie zweier Variabler. Beiden Typen entsprechen diskrete einrangige Bewertungen. Betrachtet man noch den Ring  $\mathfrak{O}_{\frac{1}{x}}$  und seine Primideale, so erhält man alle einrangigen Bewertungen von  $K^{\frac{1}{x}}$ . Die Stellen zweiter Art können als Erweiterungsbewertungen der  $p$  gedeutet werden. Die Stellen erster Art entsprechen eineindeutig den bekannten Stellen des Körpers  $K$ , die erhalten werden, wenn man den Elementen von  $k$  den Wert 1 gibt.

Für Relativkörper  $L/K$  hat E. Noether den Diskriminantensatz aufgestellt. Wesentlich ist, dass es nur endlich viele verzweigte Stellen erster und zweiter Art gibt. Verzweigung von Stellen zweiter Art ist allgemeiner zu fassen; es braucht nicht eine echte Zerlegung zu bestehen, das Ideal kann prim bleiben aber der Restklassenkörper wird inseparabel. Ausserdem können nur Teiler des Relativgrades für derartige irreguläre Verzweigungen in Betracht kommen.

Wir untersuchen nun das Zerlegungsgesetz in einem speziellen Falle, der aber alles Wesentliche schon zeigt.

$k$  soll die  $\ell$ -ten Einheitswurzeln enthalten und in  $K$  algebraisch abgeschlossen sein. Sei  $L = K(\sqrt[\ell]{\alpha})$  ein Oberkörper, er ist nach Vor. zyklisch.

Wir betrachten Stellen zweiter Art, die zu  $\ell$  und  $\alpha$  teilerfremd sind. ( $\mathfrak{p} \nmid \ell, \alpha$ ) Wenn dann  $\alpha \equiv \xi^\ell \pmod{\mathfrak{p}}$  mit  $\xi \in K$ , so zerfällt  $\mathfrak{p}$  vollständig, d. h. ist bei einer passenden Darstellung als Ideal in einem Ring quasigleich einem Produkt von  $\ell$  verschiedenen Primidealen  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_\ell$  von  $L$ . Das sieht man am einfachsten ein, wenn man zu einem  $\mathfrak{p}$ -adischen perfekten Körper  $K_{\mathfrak{p}}$  übergeht, und die Hensel'schen Schlüsse wiederholt. Es gilt das Irreduzibilitätskriterium:

$$t^\ell - \alpha \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}, \quad t \equiv \xi \pmod{\mathfrak{p}} \longrightarrow t - X \mid t^\ell - \alpha \text{ in } K_{\mathfrak{p}}, \quad X \equiv \xi \pmod{\mathfrak{p}},$$

also zerfällt  $\mathfrak{p}$  vollständig. Die Umkehrung folgt genau so leicht.

Den Verzweigungsdivisor von  $L$  zerspalten wir in einen Divisor erster Art und einen zweiter Art. Der Verzweigungsdivisor erster Art ist für alle Körper der Klasse  $\{L_{(a)} = K\sqrt[\ell]{a\alpha}\}$  der gleiche. Die Körper  $L$  werden innerhalb einer Klasse durch die Verzweigungsdivisoren zweiter Art unterschieden.

Da der Konstantenkörper  $k$  nicht algebraisch abgeschlossen sein sollte, kann man stets erreichen, dass ein  $\mathfrak{p} \nmid \ell, \alpha$  in unendlich vielen  $L_{(a)}$  der gleichen Klasse unzerlegt bleibt.

Wenn für festes  $\alpha$  gilt  $\alpha \equiv \xi^\ell \pmod{\mathfrak{p}}$ , so gehe man zu einem  $a\alpha$  mit

$a \equiv \bar{a} \not\equiv \xi^{\ell} \pmod{\mathfrak{p}}$ ,  $a \in k$ , über. Solche Restklassen  $\bar{a} \pmod{\mathfrak{p}}$  existieren in endlicher Anzahl, denn für genügend grosses  $k$  gilt  $\ell |_{\text{echt}} N\mathfrak{p} - 1$ . Im Körper  $L_{(a)} = K(\sqrt[\ell]{a\alpha})$  bleibt dann  $\mathfrak{p}$  unzerlegt. Wir wollen den Restklassenkörper  $K \pmod{\mathfrak{p}}$  mit  $\frac{K}{\mathfrak{p}}$ , oder wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind, mit  $\bar{K}$  bezeichnen.

Dann haben wir:

Für alle  $\mathfrak{p} \nmid \ell$ ,  $\alpha$  existieren stets  $L_{(a)}$  über  $K$  mit

$$\left( \frac{L_{(a)}}{\mathfrak{p}} : \frac{K}{\mathfrak{p}} \right) = 1.$$

Die Restklassenbildung nach einem Primteiler zweiter Art ist ein Homomorphismus aus einem Funktionenkörper einer Variablen mit endlichem Galoisfeld als Konstantenkörper + dem Symbol  $\infty$ .

Dabei gehen Divisoren erster Art immer in Divisoren über. Der Grad dieser Divisoren bleibt im allgemeinen nicht erhalten, auch ändert sich i. A. das Geschlecht.

Wenn der Divisor erster Art  $\mathfrak{P}$  durch ein Primideal  $\mathfrak{P}$  im Ringe  $\mathfrak{O}$  dargestellt wird, so ist  $\mathfrak{O} \supseteq \mathfrak{P}$ . Hierdurch Restklassenbildung  $\text{mod } \mathfrak{p}: \frac{\mathfrak{O}}{\mathfrak{p}} \supseteq \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}}$ . Es ist  $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}}$  in einer Hauptordnung von  $\frac{K}{\mathfrak{p}}$  enthalten. (Lässt sich immer erreichen). Dann sei  $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}} = \prod \bar{\mathfrak{P}}^a$ , wir schreiben  $\mathfrak{P} \longrightarrow \prod \bar{\mathfrak{P}}^a$  oder  $\mathfrak{P} \equiv \prod \bar{\mathfrak{P}}^a \pmod{\mathfrak{p}}$ . Man sieht, dass von einem Übergang von einem gegebenen  $K$  zu einem  $\bar{K}$  nichts zu erwarten ist, wenn keine weiteren Einschränkungen gemacht werden.

Man muss umgekehrt zu einem  $\bar{K}$  einen  $K$  so konstruieren, dass man Aussagen von  $K$  auf  $\bar{K}$  rückwärts übertragen kann.

Nun sollen (vorläufig) nur hyperelliptische Körper  $K$  bzw.  $\bar{K}$  betrachtet werden.

Sei  $\bar{k}$  ein Galoisfeld mit  $q = p^f$  Elementen. Der Körper  $\bar{K} = \bar{k}(x, \bar{y})$  mit  $\bar{y}^2 = \prod_{i=1}^{2g+1} (x - \bar{e}_i)$   $\bar{e}_i \neq \bar{e}_j$  für  $i \neq j$  hat das Geschlecht  $g$ . Nun wählen wir einen Zahlkörper  $k$ , sodass etwa der Restklassenkörper zu einem Teiler von  $p$  zu  $\bar{k}$  isomorph wird.

Den  $\bar{e}_i$  ordnen wir Elemente  $e_i \in k$  durch die Kongruenz  $e_i \equiv \bar{e}_i \pmod{\mathfrak{p}}$  zu.

Dann sei gesetzt  $y^2 = \prod_{i=1}^{2g+1} (x - e_i)$ .

Der Körper  $K = k(x, y)$  hat dann das Geschlecht  $g$ . Für eine Stelle zweiter Art  $\mathfrak{p}^*$ , die in  $\mathfrak{p}$  aufgeht, wird  $\frac{K}{\mathfrak{p}^*}$  isomorph zu  $\bar{K}$ . (Eventuell musste man  $\bar{k}$  noch erweitern, um die Isomorphie zu bekommen!)

Nun sollen Aussagen über die endliche Divisorenklassengruppe  $\mathfrak{D}_o^{(\bar{k})}$  gewonnen werden. Wir fragen nur nach Klassen mit zu  $p$  primärer Ordnung. Das entspricht dem Ausschliessen irregulärer Stellen zweiter Art. Alles Wesentliche tritt schon hervor, wenn wir unverzweigte Körper von Primzahlpotenzgrade  $\ell^\nu$  betrachten. Sei  $k$  genügend gross, sodass  $K$  die  $2g$  Fundamentaldivisoren  $\mathfrak{A}_i$  der Ordnung  $\ell$  enthält. Dabei sei  $(\ell, p) = 1$ . Dann existieren über  $K$  die unverzweigten Körperklassen  $\{L_i\} = \{K\sqrt[\ell]{\alpha_i a}, a \text{ Repräsentant aus } k/k^\ell, \text{ und } \mathfrak{A}_i^\ell = \alpha_i \text{ fest ausgesucht.}$

Bei Idealzerlegung der  $\alpha_i$  in einem passenden Ring kann man immer zu Elementen übergehen, die von Teilern zweiter Art, die in der Charakteristik aufgehen, befreit sind. ( $k$  genügend gross).

In jeder Klasse  $L_i$  wählen wir einen Körper aus, in dem  $\mathfrak{p}$  unzerlegt bleibt. Dann wird  $\left(\frac{L_i}{\mathfrak{p}} : \frac{K}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ . Da die  $\alpha_i$  keine Konstanten waren, so ist  $\frac{L_i}{\mathfrak{p}}$  auch keine Konstantenerweiterung von  $\frac{K}{\mathfrak{p}}$ . Wegen der Unverzweigkeit, die hier erhalten bleibt, ist  $\frac{L_i}{\mathfrak{p}}$  ein Radikalkörper  $\frac{L_i}{\mathfrak{p}} = \frac{K}{\mathfrak{p}}(\sqrt[\ell]{\bar{\alpha}_i})$ . Und  $\bar{\alpha}_i$  wird gleich dem Bild von  $\alpha_i$ , also auch  $\ell$ -te Potenz einer Klasse des Grades Null in  $\frac{K}{\mathfrak{p}}$ .

Wir halten nun  $\mathfrak{p}$  fest und wenden die vereinfachte Schreibweise an.

Den sämtlichen unendlich vielen  $L_i$  einer Klasse entsprechen bei dem Homomorphismus nur endlich viele  $\bar{L}_i$  über  $\bar{K}$ , die auch zur gleichen Klasse gehören. In Übereinstimmung mit der Tatsachen, dass die Klassengruppe von  $\bar{K}$  endlich ist.

Wir haben so die  $\ell$ -Klassengruppe  $\mathfrak{D}_{(\ell)oe}^{(k)}$  in eine Untergruppe der  $\ell$ -Klassengruppe von  $K$  abgebildet.

Dabei können aber inäquivalente Klassen aus  $K$  nicht in äquivalente von  $\bar{K}$  übergehen.

Um das einzusehen, stellen wir die Klassen vom Grade Null aus  $K$  als Quotienten von Klassen des Grades  $g$  dar. Hierbei soll die Nennerklasse durch eine Primdivisorpotenz  $\mathfrak{P}^g$  repräsentiert werden. Bei genügend grossem  $k$  lässt sich immer  $\mathfrak{P}$  als vom ersten Grade erreichen, sodass das Bild  $\bar{\mathfrak{P}}$  auch noch Primdivisor bleibt. Nach Konstruktion sind nun die Bilder  $\bar{\mathfrak{A}}_i$  der  $\mathfrak{A}_i$  nicht Einsdivisoren, d. h. nicht Konstantenwurzeln.

Da ausserdem ihr gemeinsamer Nenner nicht Hauptdivisor wird und seine Ordnung beibehält, so müssen auch die Zähler ihre Ordnung beibehalten.

Bestände nun zwischen den Bildern eine Relation  $\bar{\mathfrak{A}}_1^{\sigma_1} \dots \bar{\mathfrak{A}}_{2g}^{\sigma_{2g}} = \bar{\mathfrak{e}}$ , so ergäbe das Auflösen nach  $K$  eine Beziehung  $\mathfrak{A}_1^{\sigma_1} \dots \mathfrak{A}_{2g}^{\sigma_{2g}} = \mathfrak{b}$ , wo  $\mathfrak{b}$  ein Divisor ist, der mod  $\mathfrak{p}$  in den Einsdivisor übergeht. Der Divisor ist vom Gra-



de Null und hat eine  $\ell$ -Ordnung, genau  $\ell$  sogar. Nach Annahme waren aber die Klassen  $\mathfrak{A}_i$  unabhängig, also Widerspruch.

Hieraus folgt:

Die  $\ell$ -Klassengruppe von  $\overline{K}$  ist mindestens  $2g$ -dimensional.

Das gilt für alle ganzen Zahlen, die prim zur Charakteristik sind. Klassen der  $p$ -Potenzordnungen müssen wegen des Auftretens von Restklassenkörpern zweiter Art bei Restklassenbildung mod  $\mathfrak{p}$  fortgelassen werden. Geht man zum algebraisch abgeschlossenen Körper über, so ergibt sich:

Die Divisorenklassengruppe des Grades Null  $\mathfrak{D}_{oe}^{(\overline{k})}$  mit zu  $p$  primen Ordnungen enthält eine Untergruppe, die isomorph ist zur additiven Gruppe aller  $2g$ -tupel  $(r_1, \dots, r_{2g})$  mod 1 von rationalen Zahlen mit zu  $p$  primen Nennern.

# Kapitel 3

## Name Index

Albert, 74  
Baer, 19, 99  
Blumenthal, 13  
R. Brauer, 23, 25, 39, 81, 99  
Castelnuovo, 61, 61, 74, 80, 88  
Chevalley, 25, 62, 63, 70, 108  
Dantzig, 108  
Davenport, 16, 17, 18, 36, 39, 59, 71  
Dedekind, 22, 33  
Deuring, 20, 44, 54, 58, 62, 106, 107  
Eichler, 58, 70, 81, 89, 102, 108  
Grell, 24, 47, 53, 70, 81  
Hall, 16, 17, 18, 19, 39  
Hardy, 17  
Heilbronn, 19  
Hensel, 125  
Herbrand, 112  
Hey, 77, 85, 87, 90  
Hurwitz, 61, 106, 107  
Iyanaga, 39  
Jacobi, 74, 79  
Köthe, 63, 108  
Krull, 21  
Kummer, 122  
Lefschetz, 106, 107

Moriya, 96  
J. v. Neumann, 17, 19, 108  
E. Noether, 125  
Rado, 19  
Rédei, 39  
Reichardt, 39, 44, 46  
Richter, 101  
Rosati, 74  
Schmeidler, 62  
Schmid, 9, 12  
H. L. Schmid, 63  
F. K. Schmidt, 20, 32, 34, 44, 46, 62, 80, 89, 90  
Schur, 119  
Siegel, 70, 80  
Taussky, 39  
Teichmüller, 90  
v. d. Waerden, 54  
Weber, 80  
Wedderburn, 99  
A. Weil, 110  
Weyl, 14, 45, 48, 85, 87, 117  
Witt, 8, 9, 34, 59, 63, 69, 71, 85, 90, 99, 102

# Kapitel 4

## Subject Index

- Abelian Function, 49, 51, 52, 65, 66, 77, 104  
Algebra,  
    Normal, 120  
    Simple, 42, 120  
Class Number, 22, 22, 72  
Complex Multiplication, 50, 66, 73, 82, 87, 88, 105, 106  
Correspondence, 61, 61, 73, 106, 107  
Divisor, 32, 43, 48, 49, 50, 54, 56, 60, 62, 67, 71, 73, 80, 82, 122, 126  
Elliptic Case, 23, 76, 82  
Field,  
    Abelian, 122  
    Algebraic Number, 26, 35, 63, 109  
    Biquadratic, 11  
    Complex, 49, 71  
    Cyclic, 42, 43, 44, 63, 101  
    Elliptic, 57, 60, 122  
    Function, 20, 32, 43, 49, 54, 63, 65, 66, 66, 67, 73, 79, 80, 87, 104, 107, 122  
    Galois, 11, 23, 65, 124, 124, 126  
    Hyperelliptic, 60, 126  
    Normal, 20, 109  
    Number, 66, 80, 102  
     $p$ -adic, 96, 102, 108, 125  
    Perfect, 89, 90, 108, 125
- Mehrfach vorhandene Seitenzahlen werden bei der endgültigen Seitenverteilung entfernt werden

Power Series, 92, 109  
 Stufenweise Perfekt, 23  
 Galois Group, 20, 54, 57, 99, 101, 109, 122  
 Genus, 23, 49, 56, 59, 60, 67, 73, 77, 79, 82, 85, 87, 89, 105, 122, 126  
 Hypercomplex, 21, 73, 85, 103, 108  
 Integral, 49, 84, 87, 106  
 Jacobian Group, 23  
 Jacobisches Umkehrproblem, 23  
*L*-Function, 72  
 Law of Reciprocity, 108  
 Lemma,  
     Herbrand, 114  
 Norm, 27, 31, 35, 99  
 Normensatz, 19, 25, 38, 39, 42, 46, 49, 109  
 Order, 21, 22, 34, 39, 119  
 Problem,  
     Schur, 76  
 Pseudo-Ideal, 23  
 Quaternion, 87  
 Riemann Hypothesis, 53, 65, 72, 110  
 Riemann Matrix, 74, 84, 106  
 Riemann Surface, 52, 106  
 Symmetric Function, 67, 68  
 Theorem,  
     Abel, 51, 51, 61, 68, 73, 82, 123  
     Bauer, 20  
     Dirichlet, 71  
     Grunwald, 27, 42, 43, 63  
     Hilbert's Irreducibility, 33, 109  
     Jacobi, 50  
     Lüroth, 109  
     Minkowski, 34  
     Ostrowski, 71  
     Reichardt, 59  
     Riemann-Roch, 61, 67  
 Thetafunction, 79, 83, 83, 87, 88, 92, 109  
 Uniformization, 109

Valuation, 23, 71, 80, 89, 90, 106, 125