

Die Korrespondenz

Helmut Hasse/Kurt Mahler

tk Hasse an Mahler 1.10.34–12.7.38

tk Mahler an Hasse 5.2.32–4.7.38

tk Weiteres Material

t – fertig transkribiert, *k* – nach Tippfehlern durchgesehen

Version vom 12.5.2007
Letztmalig geändert am 12.5.2007

Quelltext: hasmah_070512.tex
übersetzt am 29. Mai 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Die Korrespondenz Helmut Hasse/Kurt Mahler	3
1.1	Vorbemerkung	3
1.2	05.02.1932, Mahler an Hasse	4
1.3	12.03.1933, Mahler an Hasse	5
1.4	17.10.1933, Mahler an Hasse	7
1.5	13.09.1934, Mahler an Hasse	10
1.6	01.10.1934, Hasse an Mahler	11
1.7	19.10.1934, Mahler an Hasse	12
1.8	24.03.1935, Mahler an Hasse	13
1.9	03.10.1935, Hasse an Mahler	14
1.10	06.10.1935, Mahler an Hasse, Postkarte	15
1.11	02.11.1936, Mahler an Hasse	16
1.12	05.11.1936, Hasse an Mahler	18
1.13	04.07.1938, Mahler an Hasse	19
1.14	12.07.1938, Hasse an Mahler	21
2	Weiteres Material zu Hasse/Mahler	22
2.1	19.10.1934, Anlage zum Brief Mahlers vom 19.10.1934	23
3	Register	26

Kapitel 1

Die Korrespondenz Helmut Hasse/Kurt Mahler

1.1 Vorbemerkung

[...] steht als Platzhalter für Text, der nicht oder nicht eindeutig zu entziffern war.¹

□□□ steht für ausgestrichene, aber lesbare Passagen.²

¹ erreichbar mit `\xxx`

² erreichbar mit `\boxes`

1.2 05.02.1932, Mahler an Hasse

Göttingen, 5.2.32

Sehr verehrter Herr Professor Hasse!

Sie erhalten hiermit eine kleine Arbeit über die Transzendenz der P -adischen Exponentialfunktion, die ich im Crelle abzdrukken bitte. Es ist mir nicht bekannt, ob hierfür bisher ein vollständiger Beweis existiert. — Sollte sich Herr Ullrich für diese Arbeit interessieren, so würde es mich freuen, wenn er sie durchlesen würde. —

Die Untersuchungen über den [...]schen Satz, über die ich in [...] berichtete, sind inzwischen von mir abgeschlossen worden. Es [...] üften gleichzeitig für $P = 2, 3, 5, \dots$ alle P -adischen Körper über dem Körper der rationalen Zahlen, ferner noch der Körper der reellen Zahlen betrachtet werden. Man stellt die Siegelsche Grundidentität auf und [...] dann von den beiden Seiten der Reihe nach die verschiedenen Bewertungen. Dann kann man folgenden Satz beweisen: „Ist $F(x, y)$ eine irreduzible Binärform mit ganzen rat. Koeffizienten vom Grad $n \geq 3$, ist $\beta > \min_{s=1,2,\dots,n-1} \left(\frac{n}{s+1} + s\right)$, sind p, q ganze rationale teilerfremde Zahlen, P_1, \dots, P_t endlichviele Primzahlen und $Q(p, q)$ das größte Potenzprodukt derselben, das in $F(p, q)$ aufgeht, so gibt es eine positive Konstante λ , so daß für alle p, q mit $(p, q) = 1$

$$\frac{|F(p, q)|}{Q(p, q)} \geq \lambda \max(|p|, |q|)^{n-\beta} \quad (n - \beta > 0!)$$

gilt.“ Aus diesem Satz lassen sich manche Folgerungen über Primteiler von Binärformen ziehen. —

Empfehlen Sie mich bitte Herrn Geheimrat Hensel und grüßen Sie die anderen Herren von mir.

Mit den besten Grüßen Ihr ergebener

Kurt Mahler

1.3 12.03.1933, Mahler an Hasse

Krefeld, 12.3.33.

Roßstr. 243.

Sehr verehrter Herr Professor!

Es ist sehr freundlich von Ihnen, daß Sie mir Ihr Referat meiner Arbeit zusenden; allerherzlichsten Dank! Vielleicht kann ich auf einen Druckfehler in der 5. Zeile von unten aufmerksam machen; es muß dort stehen:

$$(1) \quad \frac{|F(ny)|}{Q(ny)} \leq k|p, q|^{n-\beta} \quad (\text{nicht } -\beta!).$$

Bei dem Lehrsatz in den letzten drei Zeilen braucht $F(xy)$ nicht irreduzibel zu sein; der irreduzible Fall ist eine triviale Folge der Ungl. (1) mit $\beta = n$.

Vielleicht darf ich noch folgende Bemerkungen machen:

Es war nur Bequemlichkeit von mir, als Grundkörper allein den der rationalen Zahlen zu nehmen. Nimmt man statt dessen einen beliebigen algebraischen Zahlkörper, so wird man Gebrauch machen müssen auch von der Absolutbetragbewertung der komplexen Zahlen und von den allgemeinen \mathfrak{p} -adischen Bewertungen, wo \mathfrak{p} ein beliebiges Primideal des Grundkörpers ist.

Ein Teil meiner Arbeit bleibt übrigens richtig, wenn unendlichviele oder alle Bewertungen gleichzeitig betrachtet werden. Dazu sei $f(n)$ vom Grad $n \geq 3$ irreduzibel mit rat. Koeffizienten, ζ eine reelle Nullstelle, ζ_τ eine P_τ -adische Nullstelle und zwar durchlaufe P_τ alle Primzahlen, für die eine solche existiert. Ist dann $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ eine unendliche Folge nichtnegativer Zahlen der Summe Eins, so gibt es nur endlich viele gekürzte Brüche $\frac{p}{q}$ mit

$$\left| \frac{p}{q} - \zeta \right| \leq (k|p, q|^{-\beta})^{\Gamma_0}, \quad |p - q\zeta_\tau|_{P_\tau} \leq (k|p, q|^{-\beta})^{\Gamma_\tau} \quad (\tau = 1, 2, \dots).$$

Leider scheint das nicht viel zu nützen; der Beweis von Satz 1 in § 12 macht ganz die Annahme, daß nur endlich-viele Bewertungen berücksichtigt werden. Trotzdem glaube ich, daß meine Arbeit die Möglichkeiten noch nicht voll ausnutzt.

Ich habe in den letzten Wochen mir einiges über die Kettenbrüche im Gebiet der P_τ -adischen Bewertungen überlegt. Die Hauptsätze der gewöhnlichen Theorie der Approximation reeller Zahlen durch rationale lassen sich

übertragen; nur wird vieles schwieriger und man erhält nicht mehr Identitäten, sondern Ungleichungen. Das Hilfsmittel dabei ist der Minkowskische Linearformensatz, der sich auf die gleichzeitige Betrachtung mehrerer Bewertungen ausdehnen läßt. Ich möchte glauben, daß von hier aus auch manche Ergebnisse aus der allgemeinen Theorie der alg. Zahlkörper sich verallgemeinern ließen.

Entschuldigen Sie meinen langen Brief► und empfangen Sie herzliche Grüße von

Ihrem ganz ergebenen

Kurt Mahler.

1.4 17.10.1933, Mahler an Hasse

8 Mauldeth Road West,
Withington, Manchester, 17.10.33

Sehr verehrter Herr Professor!

Ich bin Ihnen *Sehr* dankbar für Ihren äusserst interessanten Brief. Ihr Beweis für die Transformierbarkeit der Kurven mit $p = 1$ in die Weierstrasssche Normalform scheint mir der natürlichste zu sein, den es überhaupt geben kann. Können Sie nicht am Ende meiner Arbeit eine kleine Bemerkung der Redaktion anbringen, in der Sie Ihren Satz hierüber erwähnen, wenn möglich mit Ihrem Beweis? Ich hatte übrigens in meiner ursprünglichen Ausarbeitung diesen Poincaréschen Satz nicht mit einem Beweis dargestellt, sondern dies erst auf Wunsch von Siegel getan, da bei Poincaré einige Schwierigkeiten sind. Mein Beweis ist einfach einem solchen von Siegel für $p = 0$ nachgebildet; ich habe durchaus nicht versucht, einen besonders schönen zu finden, sondern wollte nur den Leser von der Richtigkeit des Satzes überzeugen, da ich ihn in wesentlicher Weise benutze. — Ueberhaupt ist von dieser Arbeit über rationale Punkte auf Kurven mit $p = 1$ eigentlich fast alles der grossen Siegelschen Arbeit in der Pr. Akad. entnommen, mit einer Ausnahme: wesentlich neu sind die Schlüsse, die Gebrauch machen von den verschiedenen P -adischen Bewertungen; dabei handelt es sich um die mittleren Paragraphen meiner Arbeit. Diese sind vielleicht das einzig interessante an meiner Arbeit, soweit sie von mir stammt; ich glaube, dass derartige Schlüsse noch häufiger bei solchen Untersuchungen benutzt werden können. Uebrigens könnte man in genau gleicher Art auch den allgemeinen Siegelschen Satz verallgemeinern; nur werden dann die Rechnungen fast unübersehbar.

Binnen Kurzem wird von mir in den Acta Mathematica eine Arbeit herauskommen, wo ich die Gesamtheit der Bewertungen des rationalen Körpers heranziehe, um asymptotische Formeln für die mittlere Anzahl der Darstellungen grosser Zahlen durch Binärformen herzuleiten. Hier befindet sich implizite eine Kettenbruchtheorie, die gleichzeitig verschiedene Bewertungen berücksichtigt, ferner eine Anwendung der P -adischen Zahlen auf die Anzahlbestimmung der Lösungen eines gewissen Kongruenz-Systems. In einer anderen Note habe ich eine Theorie der Kettenbrüche im Gebiet der P -adischen Zahlen dargestellt. Schliesslich bin ich im Augenblick dabei, etwas

wie einen Versuch einer Axiomatik der Theorie der Diophantischen Approximationen vom Standpunkt der Theorie der bewerteten Körper aus darzustellen. Da mir sehr allgemeine Darlegungen jedoch nicht sehr liegen, so begnüge ich mich allein mit den beiden besonders wichtigen Fällen, dass die Bewertungen und Oberkörper der Körper der rationalen Zahlen und rationalen Funktionen einer Unbestimmten betrachtet werden. In beiden Fällen verlaufen die Ueberlegungen fast gleich. Insbesondere zeigt sich so, welche Bedeutung (oder Nichtbedeutung) das Dirichletsche Schubfachverfahren eigentlich hat. Es gelingt z.B. einen Satz: „Zu jeder reellen Zahl A gibt es eine ganze rationale Zahl a mit $|A - a| \leq 1/2$ “ als die Folge viel einfacherer Grundannahmen zu gewinnen; diese Grundannahmen aber scheinen mir das Wesentliche zum Ausdruck zu bringen, was man über die Existenz der Bewertungen hinaus nötig hat, um Diophantik treiben zu können und z.B. den Thueschen Satz oder die Transzendenz von e beweisen zu können. Uebrigens scheint mir die Lücke im klassischen Henselschen Transzendenzbeweis von e , der von der Existenz der Bewertungen Gebrauch macht, heute nicht mehr so unüberbrückbar zu sein; ich glaube, heute auf diesem Wege zum Ziele kommen zu können, allerdings mittels nicht sehr erfreulicher Rechnungen.

Die von Ihnen in Ihrem Brief angekündigte Algebraisierung der Theorie der rationalen Punkte auf algebraischen Kurven interessiert mich ungemein. Sie erwähnen Ihren Satz über Lösungsanzahlen der elliptischen Gebilde mit endlichen Konstantenkörper; wie lautet dieser? Wie beweisen Sie ferner das Analogon zum Mordell–Weilschen Satz für diesen Fall? Es wäre ausserordentlich liebenswürdig von Ihnen, wenn Sie mir gelegentlich mehr hierüber mitteilen würden oder Separate senden würden. Ich bin immer mehr zu der Ueberzeugung gekommen, dass man heute Mathematik und insbesondere Arithmetik nur noch mit gehöriger Kenntnis der Algebra treiben kann. Wäre es nicht unmöglich durch die heutigen Verhältnisse, so würde ich gerne zu Ihnen nach Marburg für einige Zeit gekommen sein, um meine Lücken auf diesem Gebiet aufzufüllen. Mein Studium in Göttingen war in dieser Beziehung nicht so ergiebig, wie es hätte sein können; mir haben die Vorlesungen von Frln. Noether immer grosse Schwierigkeiten gemacht und profitiert habe ich eigentlich am meisten von einem Seminar, das sie einmal einlegte.

Zum Schluss dieses etwas lang geratenen Briefes möchte ich meine Bitte an Sie wiederholen, mir ein Exemplar Ihrer Vorlesungen über Klassenkörper überlassen zu wollen, natürlich gegen den ordentlichen Preis. Ich sah das Buch vorige Woche bei Mordell, konnte jedoch nicht zu einer eingehenderen

Lektüre kommen.

Ich bitte Sie, mich den anderen Dozenten und vor allem Herrn Hensel empfehlen zu wollen.

Mit herzlichen Grussen

Ihr ergebenener

Kurt Mahler

1.5 13.09.1934, Mahler an Hasse

Krefeld, 13. September 1934

Roßstr. 243.

Sehr geehrter Herr Professor!

In einem der letzten Hefte der Hamburger Zeitschrift sah ich Ihre erste ausführlichere Arbeit über die Theorie der elliptischen Gebilde. Ich wäre Ihnen sehr dankbar, wenn Sie mir hiervon und von den anschliessenden Arbeiten Separate senden würden; wie Sie wissen, interessieren mich diese Fragen sehr.

Ich habe jetzt Manchester wieder verlassen, da mein Studienjahr dort zu Ende gegangen ist, und werde ab Ende dieses Monats statt dessen für das nächste Studienjahr nach Groningen gehen, von wo ich eine Einladung von Herrn van der Corput hatte.

Es wird Sie vielleicht interessieren, dass ich den Gelfond–Schneiderschen Satz über die Transzendenz von $\log a / \log b$ in voller Allgemeinheit auf den Körper der p -adischen Zahlen übertragen habe. Der Beweis ist dem Gelfondschen nachgebildet, aber natürlich hatte ich kein Hilfsmittel wie den Cauchyschen Integralsatz zur Verfügung. Statt dessen benutze ich einige an sich ganz netten Sätzchen aus der p -adischen Funktionentheorie, die in den allgemeineren Schöbeschen Untersuchungen enthalten sind, wie ich glaube.

In der allgemeinen Theorie der Diophantischen Approximationen ist es, wie mir scheint, nützlich, neben bewerteten Körpern auch bewertete Ringe heranzuziehen, in denen es es Funktion $u(a)$ gibt, so dass

$$u(a + b) \leq u(a) + u(b), \quad u(ab) \leq u(a)u(b)$$

ist. Gibt es hierüber allgemeinere Untersuchungen?

Mit den besten Grüßen

Ihr ganz ergebener

Kurt Mahler

1.6 01.10.1934, Hasse an Mahler

H./Tr. 1. Oktober 34

Lieber Herr Mahler!

Besten Dank für Ihren Brief! An die Versendung der Separata meiner letztlich erschienen Arbeiten werde ich demnächst gehen, wenn einige noch im Druck befindlichen Arbeiten heraus sind. Dann sollen Sie von allen Abzüge erhalten. Ihr Resultat über p -adische Transzendenz finde ich sehr schön. Wenn Sie irgend etwas für Crelles Journal haben, bin ich Ihnen immer dankbar. Der Druck kann jetzt sehr schnell erfolgen.

Auch mir scheint es nützlich, die Bewertungstheorie in der von Ihnen angegebenen Weise auf Ringe zu übertragen. An so etwas hat schon Toepflitz gedacht bei der Behandlung der unendlichen Matrizen. Auch kommt bei dem Beweis des Riemann–Rochschen Satzes für Funktionenkörper in F.K. Schmidt Math. Zeitschrift 31 eine Ringbewertung mit der abgeschwächten multiplikatorischen Eigenschaft vor, sie entspricht der Zusammenfassung der Bewertungen an endlich vielen Stellen.

Für Ihre neue Wirksamkeit in Groningen beste Wünsche

Mit herzlichen Grüßen Ihr

H. Hasse

1.7 19.10.1934, Mahler an Hasse

Groningen, 19. Lo. 1934.

Oosterstr. 18a.

Sehr verehrter Herr Professor,

Entschuldigen Sie bitte, dass ich erst heute auf Ihren letzten Brief[►] antworte. Ich wollte meine Untersuchungen erst noch etwas weiterführen, bevor ich wieder schrieb.

Ich lege für Sie einen Auszug meiner Arbeit über Pseudobewertungen bei[►]. Die Hauptsache scheint mir in dieser Theorie die Eigenschaft der Summe mehrerer Pseudobewertungen zu sein, wieder eine Pseudobewertung darzustellen. Im Falle der Unabhängigkeit der Summanden folgt dann die Zerlegung des zur Summe gehörigen perfekten Ringes in eine direkte Summe. Dies ist also eine Möglichkeit, die Henselschen g -adischen Zahlen vom Bewertungsstandpunkt zu erfassen.

Mich interessiert hauptsächlich die für die Diophantik wichtige Frage, welches die verschiedenen nichtäquivalenten Pseudobewertungen irgend eines gegebenen Ringes sind; dieses Problem wird natürlich im allgemeinen recht schwierig sein. Für den Ring der ganzen rationalen Zahlen habe ich alle inäquivalenten Pseudobewertungen finden können; auch glaube ich, das gleiche Problem für den Körper der rationalen Zahlen lösen zu können. Auch endliche algebraische Erweiterungen dieser beiden Ringe werden sich vielleicht erschöpfend behandeln lassen. Dagegen wird im Falle des reellen Zahlkörpers die Menge der verschiedenen Pseudobewertungen vielleicht schon etwas gross sein. Besonderes Interesse, auch für die Diophantik, bieten die Ringe $R[x]$, wo R der Ring der ganzen rationalen Zahlen oder der Körper der rationalen Zahlen ist; weit einfacher liegen die Verhältnisse dagegen wohl für die rationalen Funktionen in x .

Mit bestem Gruss

Ihr ergebener

K. Mahler

1.8 24.03.1935, Mahler an Hasse

Groningen, 24.III.35

Zwanestr. 14.a.

Sehr verehrter Herr Professor,

Vielen Dank für Ihre Separate, die ich in den nächsten Wochen eingehender durcharbeiten werde. In den Osterferien beginne ich auch damit, eine Reihe von Separaten zu versenden, die sich in der letzten Zeit angesammelt haben.

Ich arbeite weiter an den Pseudobewertungen und glaube, so etwas wie eine eindeutige Zerlegbarkeit in Summanden (analog der Primzahlzerlegung im Körper der rationalen Zahlen) zeigen zu können.

Auf meinen letzten Brief an Sie habe ich bisher noch keine Antwort erhalten; insbesondere fehlt es noch immer an der Auftrageinteilung von Teubner für den Artikel zu Encyklopädie.

Mit den besten Grüßen und Wünschen für die Ferien

Ihr ergebener

Kurt Mahler

1.9 03.10.1935, Hasse an Mahler

Göttingen, den 3. Oktober 1935.

Lieber Herr Mahler!

Besten Dank für die kürzlich erfolgte Zusendung Ihrer Separata. Bei der Lektüre des Abschnittes 2 Ihrer Arbeit über transzendente p -adische Zahlen musste ich an die Dissertation meines Schülers W. Schöbe denken (Beiträge zur Funktionentheorie in nichtarchimedisch bewerteten Körpern, Heliosverlag Münster 1930 wo eine derartige Fragestellung ganz allgemein und mit abschliessenden Resultaten behandelt wird. Ich wollte Sie für alle Fälle auf diese Arbeiten hinweisen, da Sie vielleicht darin manches finden, was Sie gebrauchen können. Auch die anderen Arbeiten habe ich mit grossem Interesse gelesen.

Mit herzlichem Gruss Ihr

H. Hasse

1.10 06.10.1935, Mahler an Hasse, Postkarte

Groningen, 6. 10. 35.

(Postkarte)

Zwanestr. 14 A.

Sehr geehrter Herr Professor,

Besten Dank für Ihre Karte. Die schöne Arbeit von Schöbe ist mir flüchtig bekannt, stand mir aber nicht zur Verfügung, als ich hier in Gr. im vorigen Sommer Gelfond's Beweis aufs p -adische übertrug (hier gibt es leider keine Göttinger Seminar-Bibliothek).

Es wird Sie vielleicht interessieren, dass ich jetzt auch für die *Hauptordnung* eines *beliebigen* endlichen algebraischen Zahlkörpers die Gesamtheit aller nicht-äquivalenten Pseudobewertungen bestimmt habe; in den Herbstferien ist mir endlich der Beweis geglückt.

Mit herzlichen Grüßen

Ihr ergebener K. Mahler

1.11 02.11.1936, Mahler an Hasse

Krefeld, 2. November 1936.

Roßstr. 243.

Mein sehr verehrter Herr Professor,

soeben habe ich an B.G. Teubner geschrieben und gebeten, meine Frist um ein volles Jahr, also bis Frühjahr 1938 zu verlängern. Den Grund zu diesem bedauerlichen Ersuchen bildet nach wie vor meine Knieentzündung. Im Gegensatz zu den optimistischen Aeusserungen meines bisherigen Arztes hat sich deren Zustand nicht wesentlich gebessert und mir insbesondere unmöglich gemacht, nach Manchester zu gehen. Vermutlich noch diese Woche wird darum ein Düsseldorfer Spezialist eine weitere Operation vornehmen und die kranke Stelle entfernen; dies ist leider nötig geworden, um einen noch radikaleren Eingriff zu vermeiden. Nach Meinung des Spezialisten werde ich mindestens 8–12 Wochen in Gips liegen müssen und erst dann wieder langsam mit dem Gehen beginnen dürfen, wahrscheinlich danach noch eine Bestrahlungsnachkur im Hochgebirge einige Zeit ertragen müssen. Es ist daher nicht wahrscheinlich, dass ich vor dem dritten Term dieses Studienjahres wieder an einer Universität sein kann; vermutlich wird dies sogar erst nach den Herbstferien der Fall sein. Natürlich hoffe ich aber, die Arbeit an dem Artikel schon wesentlich früher, vielleicht noch in diesem Monat, wieder nach der Operation aufnehmen zu können. —

Sie erinnern sich vielleicht noch an das Gespräch in Oslo bei Herrn Skolem. Ich erlaube mir, ein damit in Zusammenhang stehendes Manuscript, das allerdings nur einen Teil der Ergebnisse enthält, beizulegen; es ist NICHT für den Druck bestimmt, und ich bitte Sie, es auch nicht mehr zurück zu schicken.

Im Zusammenhang mit dem gleichen Fragenkreis möchte ich Sie fragen, ob es Methoden zur Lösung des folgenden Problems gibt; dasselbe hängt auf grundlegende Weise mit den periodischen Algorithmen für p -adische algebraische Zahlen zusammen: “Man bestimme alle endlichen algebraischen Zahlkörper K vom Grad $n \geq 2$, in denen es eine erzeugende Zahl ϑ gibt, die keine Einheit ist und die folgenden Eigenschaften hat: a) Alle n Konjugierten zu ϑ haben den gleichen Absolutbetrag. b) Das durch ϑ in K erzeugte Hauptideal (ϑ) ist primär, also Potenz eines Primideals.” Man kann zeigen, dass p -adische algebraische Zahlen mit periodischen Algorithmen, die extremal gut annähern, stets in solchen Körpern K liegen.

Empfangen Sie herzlichen Grüsse von

Ihrem sehr ergebenen

Kurt Mahler

1.12 05.11.1936, Hasse an Mahler

5.11.36

Lieber Herr Mahler,

besten Dank für Ihre Zusendung, die ich durchsehen werde, sowie ich Zeit habe. Über die Frage werde ich gelegentlich nachdenken, so von der Hand kann ich dazu nichts sagen.

Ich wünsche Ihnen, daß Sie die bevorstehende Operation gut überstehen und recht bald wieder schmerzfrei und arbeitsfähig werden.

Herzlichst

Ihr

H. Hasse

1.13 04.07.1938, Mahler an Hasse

Schweiz.

La Moubra, Montana, 4/7/38.

Mein sehr verehrter Herr Professor,

Besten Dank für Ihren Brief. Es scheint mir durchaus von Interesse, den Siegelschen Beweis aus §6 unabhängig von dem Zusammenhang mit Abelschen Funktionen und möglichst für beliebig viele Bewertungen darzustellen, und zwar möglichst nicht zu kurz. Im Fall einer einzigen Bewertung formulieren Sie ihn als $\left| \frac{\xi_i}{\xi_0} - \alpha_i \right| \leq CN(X)^{-e}$. Was ist dabei X ? Ist dies ein Schreibfehler für ξ_0 ? – Die Uebertragung auf mehrere Bewertungen ist natürlich nicht schwer, nach dem Vorbild meiner Annalen–Arbeit. Nur tritt jetzt die Erschwernis ein, dass mehrere Absolutbetragbewertungen und ausserdem \mathfrak{p} -adische und nicht p -adische Bewertungen benutzt werden. Es ist daher nötig, die Normierung dieser Bewertungen richtig vorzunehmen, etwa wie in meiner letzten Arbeit in Acta Mathematica, also mit geeigneten Exponenten. Alsdann wird links wahrscheinlich $\left| \frac{\xi_i}{\xi_0} - \alpha_i \right|$ zu ersetzen sein durch

$$\prod_{\mathfrak{p}} \min \left(1, \left| \frac{\xi_i}{\xi_0} - \alpha_i \right|_{\mathfrak{p}} \right)^{\nu_{\mathfrak{p}}}$$

wo die \mathfrak{p} endlichviele verschiedene endliche oder unendliche Primideale und die Exponenten deren Ordnungen (oder Grade, ich habe es vergessen) sein werden. Auf der rechten Seite wird ferner jetzt eine Funktion aller ξ_0, \dots, ξ_n stehen (das Maximum der Absolutbeträge der Koeffizienten der erzeugenden Gleichungen aller dieser Zahlen zum Exponenten $-e$). Es wird etwas Rechnung erfordern, aber nicht weiter schwierig sein, die richtigen Ausdrücke zu finden. Besonders interessant wäre natürlich der Fall K gleich Körper der rationalen Zahlen.

Uebrigens kann der Beweis des Siegelschen Satzes heute ein wenig elementarer gehalten werden, da der Weilsche Basissatz nach einer Bemerkung von Weil nicht nötig ist. Des weiteren kann man wahrscheinlich den Satz verallgemeinern auf den Nenner der Abelschen Funktionen von Punktgruppen von p Punkten, wenn nur die Thetafunktion nicht identisch verschwindet.

Sie gebrauchen den Ausdruck “Unabhängigkeitsmass von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ über K ” für die höchste Dimension der unabhängigen Potenzprodukte. Ist dies die

übliche Bezeichnung in der Algebra? Wenn nicht, so wäre es gut, das Wort Mass zu vermeiden, da es in der Diophantik gewöhnlich für kontinuierliche Grössen benutzt wird.

Meine Dozententätigkeit in Manchester ist jetzt vorläufig zuende und ich kann endlich wieder einwenig für meinen Bericht tun. Ich bin im Augenblick wieder in derselben Schweizer Klinik für Sonnentherapie, in der ich auch vergangenes Jahr mich für kurze Zeit nach meiner Operation aufhielt. Bisher ist nur das Wetter sehr schlecht, und mein Knie benimmt sich nicht ganz so, wie es sollte, vielleicht als Folge der Anstrengungen während des vergangenen Winters.

Mathematisch war das vergangene Jahr in Manchester bis auf einige Kleinigkeiten nicht ergiebig, zumal ich zuviel durch andere Dinge abgelenkt wurde.

Recht herzliche Grüsse von Ihrem sehr ergebenen

K. Mahler

1.14 12.07.1938, Hasse an Mahler

12.7.1938

Lieber Herr Mahler,

Herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief[►]. Mein X bedeutet einfach das Maximum der Beträge der sämtlichen ξ_0, \dots, ξ_n . Ich finde das schöner als die bisher immer übliche Messung der Approximation durch die Beträge der Koeffizienten der irreduziblen Gleichungen. Diese Koeffizienten sind etwas künstliches. Natürlich sind beide Arten der Messung äquivalent, ebenso die von Siegel benutzte dritte, wo statt meines Maximums die Summe genommen ist. Doch finde ich auch diese Summenbildung vom algebraischen Standpunkt aus künstlich.

Der Ausdruck Unabhängigkeits-mass war von mir ad hoc erfunden. Man könnte wegen Ihres Einwands auch Grad statt Mass sagen.

Ich werde also meinen Satz nebst Beweis voraussichtlich veröffentlichen. Zur weiteren Ausgestaltung — Einbeziehung mehrerer Bewertungen fehlt mir allerdings die Zeit. Ich muss dringend an meinem Buch arbeiten, und das Ms. für eine ev. Veröffentlichung ist in der ausgearbeiteten Form meines Seminarvortrages bereits wesentlich fertig. Wenn Sie es erwünscht finden, so schreiben Sie doch dann eine weitere Note mit diesen Verallgemeinerungen.

Dass man zum Beweis des Siegelschen Satzes über ganzzahlige Lösungen den scharfen Weilschen Satz nicht braucht, war mir bekannt. Man braucht aber den algebraischen Teil des Weilschen Satzes, der schon die leidige Distributionslehre in Mannigfaltigkeiten höherer Dimension erfordert. Man muss nämlich wissen, dass die Einteilung der rationalen Punktgruppen nach der Äquivalenz bis auf das n -fache einer Punktgruppe nur endlich viele Klassen hat.

Indem ich Ihnen gute Besserung für Ihr Knie wünsche, bin ich mit freundlichen Grüßen

Ihr

H. Hasse

Kapitel 2

Weiteres Material zu Hasse/Mahler

2.1 19.10.1934, Anlage zum Brief Mahlers vom 19.10.1934

Auszug aus der Arbeit: Ueber Pseudobewertungen, von Kurt Mahler (Groningen).

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement 1. Eine Funktion $W(a)$ des Elementes a von R heisst eine Pseudobewertung von R , wenn $W(a)$ für alle a nichtnegativ reell ist und folgende drei Eigenschaften besitzt:

- (1): $W(0) = 0, \quad W(1) \neq 0.$
- (2): $W(a - b) \leq W(a) + W(b).$
- (3): $W(ab) \leq W(a) \cdot W(b).$

Dann ist allgemein $W(a) = W(-a)$, ferner $W(1) \geq 1$.

Die Zahlen aus R mit $W(a) = 0$ bilden ein Ideal $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(W)$. Ist $a \equiv b \pmod{\mathfrak{r}}$, so gilt $W(a) = W(b)$. Also ist $W(a)$ auch eine Pseudobewertung des Restklassenringes $R_W = R/\mathfrak{r}$, und zwar verschwindet $W(a)$ nur in der Nullklasse von R_W .

Man kann wie üblich in der Bewertungstheorie Grenzwerte in bezug auf $W(a)$ einführen. Dazu schreibt man einer Folge a_1, a_2, a_3, \dots aus R einen Limes

$$a \equiv \lim a_m(W)$$

zu, wenn zu jedem ε ein $p(\varepsilon)$ existiert, so dass

$$(4): W(a_m - a_n) \leq \varepsilon \quad \text{für} \quad m, n \geq p(\varepsilon)$$

ist; zwei Folgen a_1, a_2, a_3, \dots und a'_1, a'_2, a'_3, \dots , die beide (4) genügen, haben kongruente Grenzwerte:

$$\lim a_m \equiv \lim a'_m,$$

wenn $\lim W(a_m - a'_m) = 0$ ist. Gibt es eine Zahl a aus R , so dass $\lim W(a - a_m) = 0$ ist, so ist der Folge a_m der Grenzwert a zuzuschreiben und sie genügt (4). Alsdann ist auch jede Zahl aus R mit $a' \equiv a \pmod{\mathfrak{r}}$ und nur eine solche Zahl aus R ein Grenzwert. Die Menge der inkongruenten Grenzwerte bildet einen Erweiterungsring R'_W von R_W . Ist $W(a)$ in R_W die triviale Bewertung,

so ist $R'_W = R_W$; verschwindet $W(a)$ allein für $a = 0$, so ist R'_W ein Erweiterungsring von R . Der Ring R'_W besitzt die aus $W(a)$ durch Fortsetzung entstehende Pseudobewertung, und ist in bezug hierauf perfekt.

Sind $W_1(a)$ und $W_2(a)$ zwei Pseudobewertungen von R mit der Eigenschaft, dass aus $\lim W_2(a_m) = 0$ stets $\lim W_1(a_m)$ folgt, so heisst W_1 in W_2 enthalten: $W_1 \prec W_2$; ist $W_1 \prec W_2$ und gleichzeitig $W_2 \prec W_1$, so heissen W_1 und W_2 äquivalent: $W_1 \sim W_2$. Die Zeichen \prec und \sim besitzen die gleichen Ordnungs- und Gleichheitseigenschaften, wie die üblichen Zeichen \leq und $=$. Ist $W_1 \prec W_2$, so ist $\mathfrak{r}(W_1)$ ein Teiler von $\mathfrak{r}(W_2)$, R_{W_1} in R_{W_2} und R'_{W_1} in R'_{W_2} enthalten; für $W_1 \sim W_2$ ist alles identisch.

Sind $W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a)$ Pseudobewertungen von R , so ist auch

$$W_\Sigma(a) = W_1(a) + W_2(a) + \dots + W_n(a)$$

und

$$W_M(a) = \max(W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a))$$

eine Pseudobewertung; es ist $W_\Sigma(a) \sim W_M(a)$. Jede mit ihnen äquivalente Bewertung heisst Summenbewertung der einzelnen $W_i(a)$. Ersetzt man die Summanden durch äquivalente Pseudobewertungen, so geht die Summe auch in eine äquivalente über. Aus $W_i(a) \succ W(a)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) folgt auch

$$W_1(a) + \dots + W_n(a) \succ W(a).$$

Die Pseudobewertungen $W_1(a), \dots, W_n(a)$ heissen unabhängig von einander, wenn zu irgend n Zahlen $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$ aus R eine Folge a_1, a_2, \dots aus R existiert, so dass gleichzeitig

$$a^{(i)} \equiv \lim a_m (W_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ist. Alsdann ist der zur Summe $W_\Sigma(a) = W_1(a) + \dots + W_n(a)$ gehörige perfekte Ring R'_{W_Σ} die DIREKTE SUMME der einzelnen perfekten Ringe $R'_{W_1}, \dots, R'_{W_n}$. In diesem Satz ist die Zerlegung der g -adischen Ringe in p -adische Körper, ferner ein Teil der Idealtheorie enthalten.

Jede nicht triviale Pseudobewertung des Ringes der ganzen rationalen Zahlen ist von der Form

$$(1): W_F(a) - \quad \text{oder} \quad (2): W_{F,G}(a) = \max(W_F(a), W_G^*(a)),$$

wobei

$$W_F(a) = \begin{cases} 0 & \text{für } a \equiv 0 (F) \\ 1 & \text{für } a \not\equiv 0 (F) \end{cases}$$

und

$$W_G^*(a) = \begin{cases} 0 & \text{für } a = 0, \text{ sonst} \\ G^{-k}, & \text{wo } G^k | a, \text{ aber } G^{k+1} \nmid a \end{cases}$$

ist. Abgesehen von der trivialen Bewertung erhält man zu jeder möglichen Pseudobewertung eine äquivalente, wenn man in (1) F alle natürlichen Zahlen ≥ 2 , und in (2) G alle quadratfreien natürlichen Zahlen ≥ 2 und gleichzeitig F alle hierzu relativ primen natürlichen Zahlen einschliesslich der Eins durchlaufen lässt.

Kapitel 3

Register

Gelfond, 15
Gelfond–Schneider, 10

Hensel, 4, 8, 9

Mordell, 8
Mordell-Weil, 8

Noether, E., 8

Poincaré, 7

Schöbe, 10, 14, 15
Schmidt, F.K., 11
Siegel, 4, 7, 19, 21

Teubner, 16
Thue, 8
Toeplitz, 11

Ullrich, 4

van der Corput, 10

Weil, 19