Briefwechsel Hasse–Hensel
Manuskripte von Hasse und Hasse–Hensel
Crelle–Korrespondenz

Hasse an Hensel 2.2.23 – 13.6.39
Hensel an Hasse 16.3.23(?) – 16.6.39
Manuskripte 1.5.23 – 20.2.36 Courant an Hensel 2.12.30
Crelle–Korrespondenz 10.2.31 – 23.2.50

Version vom 22.3.2007
Letztmalig geändert am 21. April 2017

Quelltext: hashen_070322.tex

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Korrespondenz Hasse–Hensel

1.1 02.02.1923, Hasse an Hensel

Kiel, den 2. II. 1923.

Sehr verehrter Herr Geheimrat !

Zu meiner großen Freude kann ich Ihnen heute mitteilen, daß mir soeben gelungen ist, die Theorie des Normenrestsymbolsfür einen Primteiler $\mathfrak{l}$ in dem in unserer letzten Besprechung formulierten Sinne zu einem befriedigenden Abschluß zu bringen. Da ich überzeugt bin, daß Sie an diesem Resultat eine ebenso große Freude haben werden, als ich selber, schreibe ich Ihnen sogleich, kaum 5 Minuten nach dem letzten Federstrich. — es handelte sich darum, auch im Falle eines Primteilers $\mathfrak{l}$ eine Darstellung des Normenrestsymbols anzugeben, die seinen Wert unmittelbar aus der Exponentialdarstellung zu erschließen gestattet. Ich habe die Untersuchung vorläufig für den Fall $\ell = 2$, d. h. des ganzzahligen Symbols durchgeführt, da mir für ungerades ℓ die von Ihnen gefundenen Resultate noch nicht in dem erforderlichen Maße zur Verfügung standen. Sei also $\ell = 2$. Dann gilt ja, wie aus Ihrer Arbeit folgt, für ungerades p und einen Teiler $\mathfrak{p}$ von p die Formel

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = (-1)^{a\bar{b}+b\bar{a}+\frac{p^f-1}{2}a\bar{a}}$$

wenn

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha & = & \pi^a\omega^b\alpha_0^2 \quad (\mathfrak{p}) \\ \beta & = & \pi^{\bar{a}}\omega^{\bar{b}}\beta_0^2 \quad (\mathfrak{p}) \end{array}\right\} \quad \text{und } \mathfrak{p} \text{ vom Grade } f\,.$$

(Das Glied $\frac{p^f-1}{2}a\bar{a}$ entspricht, wie Sie sich leicht überzeugen, genau Ihrem $2^{n-1}a\bar{a}$; ich ziehe erstere Form vor, da sie keinen Gebrauch von der Kenntnis des Exponenten n macht; siehe außerdem die entspr. Formel für den rationalen Körper).

Für einen Teiler $\mathfrak{l}$ der 2 folgt aus den Resultaten Ihrer Arbeit, die Sie mir neulich vorlasen, folgendes:

a.) Entweder ist β Quadrat in $k(\mathfrak{l})$; dann ist jedes α Normzahl in $k(\sqrt{\beta})$

b.) Oder es ist β Nichtquadrat in $k(\mathfrak{l})$; dann läßt sich stets ein Fundamentalsystem $\lambda', \eta_1', \ldots, \eta_k', \eta_{k+1}'$; $(k = ef)$ finden (und zwar ein *von β abhängiges*), sodaß alle und nur die α Normzahlen sind, für die bei der Darstellung durch das angegebene Fundamentalsystemein bestimmter der Exponenten gerade ist, und zwar

1.) für $\beta = \eta_{k+1}\beta_0^2$: der Exponent von λ'
2.) 〃 $\beta = \lambda\eta\beta_0^2$: 〃 〃 〃 η'_{k+1}
3.) 〃 $\beta = \eta_i\beta_0^2$: der Exponent eines gewissen " komplementären" $\eta'k$

Ich kann nun zunächst zeigen, daß aus diesem Resultat ohne weiteres der *volle* Dekompositionssatz folgt, nämlich außer den beiden trivialen Fällen:

$$\begin{array}{lll}
\text{Normzahl} \cdot \text{Normzahl} = \text{Normzahl}, & \text{d. h. wenn} & \\
 & \left(\frac{\alpha_1,\beta}{\mathfrak{l}}\right) & = +1 \\
 & \text{u. } \left(\frac{\alpha_2,\beta}{\mathfrak{l}}\right) & = +1 \\
 & \text{auch } \left(\frac{\alpha_1\alpha_2,\beta}{\mathfrak{l}}\right) & = +1 \\
\text{Normzahl} \cdot \text{Nichtnormzahl} = \text{Nichtnormzahl}, & \text{d. h. wenn} & \\
 & \left(\frac{\alpha_1,\beta}{\mathfrak{l}}\right) & = +1 \\
 & \text{u. } \left(\frac{\alpha_2,\beta}{\mathfrak{l}}\right) & = -1 \\
 & \text{auch } \left(\frac{\alpha_1\alpha_2,\beta}{\mathfrak{l}}\right) & = -1
\end{array}$$

noch der nicht triviale:

$$\text{Nichtnormzahl} \cdot \text{Nichtnormzahl} = \text{Normzahl}$$

womit dann

$$\left(\frac{\alpha_1,\beta}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\alpha_2,\beta}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\alpha_1\alpha_2,\beta}{\mathfrak{l}}\right)$$

gezeigt ist. (Beweis ist unmittelbar einleuchtend). Mit Hilfe dieses Zerlegungssatzes und des für $\ell = 2$ trivialen Vertauschungssatzes $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\beta,\alpha}{\mathfrak{l}}\right)$ (Symmetrie der Gleichung $-x^2+\alpha y^2+\beta z^2 = 0 \ (\mathfrak{l})$) gelingt nun zunächst der Nachweis des Satzes:

Ist $\lambda, \eta_1, \ldots, \eta_k, \eta_{k+1}$ ein beliebiges *Fundamentalsystem, so existiert dazu eine symmetrische bilineare Form $L(c_0, \ldots, c_{k+1}|\overline{c}_0, \ldots, \overline{c}_{k+1})$ derart, daß für*

$$\begin{array}{rcll}
\alpha & = & \lambda^{c_0}\eta_1^{c_1}\ldots\eta_{k+1}^{c_{k+1}}\alpha_0^2 & (\mathfrak{l}) \\
\beta & = & \lambda^{\overline{c}_0}\eta_1^{\overline{c}_1}\ldots\eta_{k+1}^{\overline{c}_{k+1}}\beta_0^2 & (\mathfrak{l})
\end{array}$$

gilt:

$$\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\beta,\alpha}{\mathfrak{l}}\right) = (-1)^{L(c_i|\overline{c}_i)}$$

Beweis: durch Transformation des Fundamentalsystems.
Es entsteht dann die Aufgabe, das Fundamentalsystem $\lambda, \eta_1, \ldots, \eta_k, \eta_{k+1}$ so zu normieren, daß die Form L eine möglichst einfache Gestalt hat. Ich dachte zunächst an die Normalgestalt $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \iddots & \vdots \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ \vdots & 1 & & & \vdots \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}$, die dem einfachsten Fall im rationalen Körper entspricht:

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{2}\right) = (-1)^{c_0 c_2 + c_1 c_1 + c_2 c_0}.$$

Es zeigte sich jedoch, daß diese Form im allgemeinen nicht möglich ist, nämlich, wenn $f > 1$ und e ungerade, also in einem sehr beträchtlichen Teil aller Möglichkeiten. Es erscheint vielmehr naturgemäß folgende Form, die ich schematisch für $\ell = 3$, $f = 2$ andeute, indem ich die Form L durch ihr Koeffizientensystem darstelle: $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & 1 & \\ \hline & & & & & 1 \\ \hline & & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ \hline 1 & & & & & \\ \hline & 1 & & & & \\ \hline \end{array}$ (an den leeren Stellen Nullen).

In der Diagonale (Nebendiagonale) stehen e f–gliedrige Felder, die das Einssystem enthalten. Zu diesem Schema kommen noch die Glieder $c_0\overline{c}_{k+1} + c_{k+1}\overline{c}_0$ hinzu, die den komplementären Elementen λ und η_{k+1} entsprechen.

Ich kann zeigen, daß eine derartige Wahl des Fundamentalsystems, und zwar *so, daß seine Elemente Basissysteme für die einzelnen Grade* sind möglich ist, daß die Bilinearform L von der angegebenen Gestalt wird.

Diese Normalgestalt ist also so beschaffen, daß zwar die e Gruppen von Einseinheiten komplementärer Grade als solche komplementär in sie eingehen, daß aber die f Einseinheiten jedes bestimmten Grades nicht mehr in komplementärer Weise, sondern in genau entsprechender Weise aufeinander bezogen sind. Ich darf wohl annehmen, daß Ihnen der "etwas dunkle" Sinn dieser Bemerkung einleuchtet, ich kann mich im Moment nicht besser ausdrücken.

Was nun die Übertragung dieses Resultates auf den Fall eines ungeraden ℓ anbetrifft, so sind allerdings alle anzuwendenden Schlüsse einer direkten Übertragung zugänglich, bis auf den wesentlich zu benutzenden Vertauschungssatz. Es wäre m. E. das erste Erfordernis, diesen Vertauschungssatz, der im Falle $\ell = 2$ die Reduktion erst ermöglicht, auch für ungerades ℓ direkt einzusehen, und nicht erst aus der herauskommenden Bilinearform zu erschließen (der Symmetrie derselben). Denn es wird sehr schwer halten die Symmetrie dieser Form nachzuweisen. Ich werde mir diese Übertragung noch einmal gründlich überlegen, kann aber vorläufig nicht ausführlich vorgehen, da mir die Grundlage, nämlich Ihre Entwicklungen über diesen Fall noch nicht ganz im Kopf sind. Ich würde mich sehr freuen, wenn ich bei Gelegenheit meiner Anwesenheit in Marburg im März ausführlich mit Ihnen über den Fall sprechen könnte.

Es wäre mir sehr lieb, wenn es sich machen ließe, daß mein heutiges Resultat vielleicht eng im Anschluß an Ihre demnächst erscheinende Arbeit über dasselbe Problem veröffentlicht werden könnte. Sollten Sie damit einverstanden sein, so möchte ich mir die Bitte erlauben, daß Sie mit der Einsendung Ihres Manuskriptes — ich meine von Ihnen gehört zu haben, daß Sie es bei Springer drucken lassen wollen — zu warten, bis zu meinem Kommen nach Marburg, damit ich mir noch die nötigen Angaben betr. Rückverweisung auf Stellen Ihrer Arbeit holen kann. Ich würde dann selbstverständlich unmittelbar nach Semesterschluß, also etwa am 5. März in Marburg sein, wo sich übrigens auch meine Braut seit einigen Tagen wieder eingefunden hat.

Die Fortsetzung meiner Habilitationsschrift, die bisher noch nicht zum Druck gegeben ist, habe ich nunmehr fertiggestellt, und darf sie Ihnen wohl bei dieser Gelegenheit dann auch mitbringen, ebenso eine oder zwei weitere Arbeiten über quadr. Formen in algebraischen Körpern, die ich nächster Tagefertigstellen werden. —

Heute hatte ich einen Brief von Dr. Ludwig in Berlin (dem Malfatti–Mann), in dem er ziemlich deutlich wird. Er hat eine erneute Umarbeitung eingesandt. Ich glaube, daß die Entscheidung in diesem Falle ziemlich schwierig sein wird, kann Ihnen das schriftlich nicht so eingehend auseinandersetzen und werde die ganzen Ludwig'schen Manuskripte mitbringen. — Jacob Linger (der Fermat–Mann) hat noch nicht geantwortet.

Darf ich Sie wohl um freundliche Mitteilung bitten, ob ich Sie Anfang März in Marburg antreffen werde, damit ich meine Reisepläne dem entsprechend einrichte. In der Hoffnung Ihnen mit der Mitteilung meines Resultats eine Freude gemacht zu haben, möchte ich Ihnen gleichzeitig meinen herzlichsten Dank aussprechen für Ihre so schöne und wertvolle Anregung, mich mit diesen Fragen zu beschäftigen. Ich war die letzten Tage wie im Fieber dabei, und meine große Freude über den glücklichen Erfolg können Sie sich kaum vorstellen. Die Zahlentheorie birgt doch wahrlich die schönsten Schätze in der Mathematik!

Beste Grüße an Frau Geheimrat und Sie. Ihr stets dankbarer Schüler

Helmut Hasse

1.2 10.02.1923, Hasse an Hensel, Postkarte

POSTKARTE
KIEL, DEN 10. II. 23.

Sehr verehrter Herr Geheimrat!

Ich möchte Ihnen heute eine kurze Mitteilung zukommen lassen, die einen zwischen uns in den Weihnachtsferien besprochenen Gedanken behandelt, bei dem ich mich, wie ich heute merkte geirrt habe. Es handelt sich um Ihre Arbeit über das Normenrestproblem im Falle $\mathfrak{p} = \mathfrak{l}$. Sie stellen dort verschiedentlich Fundamentalsysteme für die mutltiplikative Darstellung im Unter– und Oberkörper auf.Ich machte damals den Einwand, daß es nötig sei, jedesmal zu beweisen, daß diese Systeme die in Crelle 146 herausgekommene Eigenschaft haben, daß nämlich die Hauptglieder der in ihnen vorkommenden Einseinheiten e_0–ten Grades so beschaffen sind, daß darunter *eins* vorkommt, welches mod $\mathfrak{l}$ kongruent zu dem Glied w^{g_0} aus der Entwicklung:

$$-\ell = (\lambda^{e_0} w^{g_0})^{\ell^{r-1}(\ell-1)} + \dots$$

ist. Tatsächlich ist nun diese besondere Eigenschaft des Fundamentalsystems für die von Ihnen gemachten Anwendungen durchaus nebensächlich. Man erkennt nämlich sehr leicht, daß jedes System

$$\lambda, \quad \eta_{i,k_\varrho} = 1 + w_i^{(k)} \lambda^{k_\varrho}, \quad \eta_a = 1 + \Pi^p \xi$$

wo die $w_i^{(k)}$ Systeme von je f mod $\mathfrak{l}$ linear unabh. Zahlen und die k_ϱ die entspr. Grade sind, η_a die bekannte Bedeutung hat, ein Fundamentalsystem bildet. Die Darstellungen durch dieses System sind zwar nicht eindeutig, vielmehr besteht eine und nur eine Relation

$$\eta_1^{d_1} \cdots \eta_\mu^{d_\mu} \eta_a^{d_a} = 1 \ (\mathfrak{l}).$$

In Ihrer Arbeit Cr. 146 hatte in dieser Relation die eine Einheit e_0-ten Grades den Exponenten ℓ^ν, sodaß man durch Reduktion des betr. Exponenten in der multiplik. Normalform die Eindeutigkeit erreichen kann. Für ein solch allgemeines Fd. System, wie es ja auch in Ihrer Arbeit mehrfach zusammengestellt wird, sind die Exponenten d_i im allgemeinen *nicht abbrechende p–adische Zahlen*. Das macht aber gar nichts, *denn alle d_i sind durch ℓ teilbar*,

also kann die Relation für die Anfangsglieder nullter Näherungswertes) der Exponenten in der multipl. Normalform nicht beeinflussen. Bitte entschuldigen Sie also meinen damals voreiligen Einwand. Über meine anderen nach verschiedenen Richtungen erstreckten Untersuchungen hoffe ich Ihnen bald ausführlich erzählen zu dürfen. Wann darf ich hoffen, Sie, zuhause zu treffen ?
Mit ergebensten Grüßen Ihr Helmut Hasse.

1.3 14.02.1923, Hasse an Hensel, Postkarte

Postkarte
Kiel, d. (?). II. 23.

Sehr verehrter Herr Geheimrat ! [1]

Recht herzlichen Dank für Ihre freundliche Karte von gestern. Ich freue mich schon sehr mit Ihnen über all' das, was jetzt schriftlich zwischen uns mitgeteilt wird mündlich plaudern zu können. Heute habe ich endlich einen lang gesuchten Beweis gefunden. Sie entsinnen sich, daß wir öfter von der Darstellung der höchsten p^n–ten Einheitswurzel in $K(\mathfrak{p})$ sprachen, die die Form hat

$$\omega = \eta_0^{p^{\nu-n}} \eta_1^{d_1} \cdots \eta_{\mu-1}^{d_{\mu-1}} \eta_a^{d_a} \quad (\mathfrak{p})$$

wo η_a die "ausgezeichnete" Einseinheit ist. Ich glaubte bisher immer, und hatte es auch verschiedentlich (aber falsch !) bewiesen, daß der Exponent d_a dieser ausgezeichneten Einseinheit stets durch p teilbar sein müßte. Das ist keineswegs richtig, vielmehr gibt es sehr einfache Gegenbeispiele, z. B. den Körper $\sqrt{2}$, in dem folgende Fd. Einheiten genommen werden können (Primzahl $\ell = 2$ die in $\mathfrak{l}^2$ zerfällt):

$$\eta_0 = 1 + \sqrt{2}; \quad \eta_1 = 1 + \sqrt{2}^3; \quad \eta_a = 1 + \sqrt{2}^4 = 5$$

Man rechnet leicht nach, daß hier zunächst die Relation zwischen den Fd. Einheiten so aussieht:

$$\eta_0^{2^2} \eta_1^{0+1\cdot 2+0\cdot 2^2+\cdots} \eta_a^{0+1\cdot 2+\cdots} = 1 \ (\mathfrak{l})$$

sodaß also tatsächlich 1.) die höchste 2^n–te E. W. -1 ist.
2.) diese -1 die Darstellung hat:

$$-1 = \eta_0^{2^1} \eta_1^{1+0\cdot 2+\cdots} \eta_a^{1+\cdots} \quad (\mathfrak{l})$$

also d_a *ungerade* ist. — Es ist jedoch sehr tröstlich, daß an all' den vielen Stellen, an denen ich in meinen neuen Arbeiten die wiederlegte Begründung benutzt habe, sich alles auch ohne Benutzung der falschen Behauptung *richtig* entwickeln läßt, vor allem bei der Reduktion der Form $\mathfrak{L}(c_i|\bar{c}_k)$. — Den Vertauschungssatz für ungerades ℓ glaube ich jetzt beweisen zu können. Ich

[1] Die Postkarte ist am 14. 2. 23 abgestempelt worden

muß es in den nächsten Tagen mal mit meinem neuartigen Gedanken probieren. — Vielleicht interessiert Sie folgender Satz, der mit der ζ–Funktion leicht zu beweisen ist:
Satz: Ist k ein beliebiger algebr. Körper und $f(x) = 0$ eine irreduzible Gleichung in k, die entweder linear ist, oder für *jeden* Primteiler $\mathfrak{p}$ von k mindestens *zwei* Linearfaktoren hat, so *ist* sie linear, der durch sie bestimmte Körper also mit k identisch. Daraus folgt sehr viel, wie ich Herrn Tornier neulich ausführlich mitteilte. Ich erzähle Ihnen mündlich darüber. Daß Sie an den quadratischen Formen Freude erleben, freut auch mich sehr. Ich habe das entspr. Untersuchung für algebr. Körper fertig. Besten Gruß

Ihr Helmut Hasse.

1.4 16.02.1923, Hasse an Hensel

Kiel, den 16. II. 23.

Sehr verehrter Herr Geheimrat !

Schon wieder kann ich Ihnen ein schönes Resultat mitteilen, das mir gestern und heute zugefallen ist. Meine Bemühungen richteten sich zunächst auf das spezielle Hilbertsche Symbol $\left(\frac{-1,-1}{\mathfrak{l}}\right)$ in einem beliebigen algebraischen Körper,wenn $\mathfrak{l}$ ein Teiler der 2 ist. Dieses Symbol interessierte mich besonders, da es schon bei der Reduktion der Form $\mathfrak{L}$ eine gewisse Rolle spielte, dann aber auch in der Theorie der quadratischen Formen eine Rolle spielte, wie sie Sie sich wohl aus meiner Habilitationsschrift entsinnen, wo die Symbole $\left(\frac{-1,-1}{p}\right)$ in den Invarianten häufig vorkommen. Es gelang mir nun höchst einfach mittels Ihrer Methode (Aufstellung der beiden Fundamentalsystemefür den Unter– u. Oberkörper) folgendes nachzuweisen:

1.) *Ist die Ordnung* e *von* $\mathfrak{l}$ *gerade*, so ist stets $\left(\frac{-1,-1}{\mathfrak{l}}\right) = +1$ (dies ist trivial, da hier der *Kern* von $-1 = 1-2 = 1-\lambda^e u^g + \cdots$ von höherem als dem e–ten Grade, also -1 nur mit einem ε von niederem als dem e–ten Grade zusammen ein Symbol -1 ergeben kann.

2.) Ist aber e ungerade, so ist der Kern von -1 genau vom Grade e, es kann also wegen $e+e = 2e$ sehr wohl sein, und ist auch tatsächlich der Fall, daß in gewissen Fällen $\left(\frac{-1,-1}{\mathfrak{l}}\right) = -1$ wird. Ich fand nun

$$\left(\frac{-1,-1}{\mathfrak{l}}\right) = (-1)^f$$

Damit gilt also allgemein: $\left(\frac{-1,-1}{\mathfrak{l}}\right) = (-1)^{ef}$, wenn e, f Ordnung und Grad von $\mathfrak{l}$ bezeichnen. Genauer fließen einfache Kriterien für die Lösbarkeit der Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 0 \\ x^2+y^2+z^2 &= \mu \end{aligned}$$

in k, wo μ eine beliebige Zahl aus k ist.

Die Formel $\left(\frac{-1,-1}{\mathfrak{l}}\right) = (-1)^{ef}$ ist im Einklang mit dem allgemeinen Reziprozitätsgesetz: $\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right) = +1$. Denn bildet man die Symbole $\left(\frac{-1,-1}{\mathfrak{p}}\right)$ für alle Primteiler $\mathfrak{p}$ von k, so wird

$$\begin{array}{lcllllll}
\left(\frac{-1,-1}{\mathfrak{l}}\right) & = & (-1)^{ef} & \text{für} & \mathfrak{l} \text{ Teiler der } 2 \\
\left(\frac{-1,-1}{\mathfrak{p}}\right) & = & +1 & \text{"} & \mathfrak{p} \text{ prim zu } 2 \\
\left(\frac{-1,-1}{\mathfrak{p}_\infty}\right) & = & -1 & \text{"} & \mathfrak{p}_\infty \text{ Primteiler 1. Grades von } p_\infty \\
 & & & & \text{(reelle konjugierte)} \\
\left(\frac{-1,-1}{\mathfrak{q}_\infty}\right) & = & +1 & \text{"} & \mathfrak{q}_\infty \quad \text{"} \quad \text{2. Grades} \quad \text{"} \quad p_\infty \\
 & & & & \text{(imag.} \quad \text{"} \quad \text{).}
\end{array}$$

Also

$$\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{-1,-1}{\mathfrak{p}}\right) = (-1)^{\sum ef} \cdot (-1)^r = (-1)^{n-r}$$

wenn n den Grad und r die Anzahl der reellen Konjugierten von k bezeichnet. Da aber offenbar $n-r$ als Anzahl der imaginären Wurzeln der Grundgleichung gerade ist, folgt, wie es sein soll

$$\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{-1,-1}{\mathfrak{p}}\right) = +1 .$$

Weiter konnte ich aber mit denselben Methoden folgenden viel allgemeineren Satz beweisen:

Ist α eine zu 2 prime Zahl aus k, die für jeden Primteiler $\mathfrak{l}$ der 2 (der Ordnung e), der Kongruenz $\alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}^e$, insgesamt also der Kongruenz

$$\alpha \equiv 1 \bmod 2$$

genügt, so gilt:

$$\left(\frac{\alpha,-1}{\mathfrak{l}}\right) = (-1)^{S_{\mathfrak{l}}\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)}$$

wo $S_{\mathfrak{l}}(v)$ die Spur von v für den Bereich von $\mathfrak{l}$ bezeichnet, d. h. den Ausdruck

$$S_{\mathfrak{l}}(v) \equiv e(v + v^2 + v^{2^2} + \cdots + v^{2^{f-1}}) \bmod 2$$

Daraus ergibt sich nun durch Anwendung des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes folgendes:

1.) $\left(\frac{\alpha,-1}{\mathfrak{p}}\right) = +1$ wenn $\mathfrak{p}$ prim zu 2 und in α in gerader Potenz aufgeht

2.) $\left(\frac{\alpha,-1}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)$ ″ $\mathfrak{p}$ prim zu 2 und in α in ungerader Potenz aufgeht

3.) $\left(\frac{\alpha,-1}{\mathfrak{l}}\right) = (-1)^{S_{\mathfrak{l}}\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)}$ wenn $\mathfrak{l}$ Teiler der 2

4.) $\left(\frac{\alpha,-1}{\mathfrak{p}_\infty^{(i)}}\right) = \text{sgn. } \alpha^{(i)}$ wenn $\alpha^{(i)}$ die betr. reelle konjugierte zu α,

5.) $\left(\frac{\alpha,-1}{\mathfrak{q}_\infty^{(i)}}\right) = +1$

Also aus $\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\alpha,-1}{\mathfrak{p}}\right) = +1$:

$$\left(\frac{-1}{\alpha}\right) = (-1)^{S_{\mathfrak{l}_1}\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)+\cdots+S_{\mathfrak{l}_2}\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)} \cdot \text{sgn. } \alpha^{(1)} \cdots \alpha^{(r)}.$$

Nun ist erstens offenbar die Summe der Partialspuren für die $k(\mathfrak{l})$ gleich der Gesamtspur $S\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)$ in k, ferner stimmt das Vorzeichen von $\alpha^{(1)} \cdots \alpha^{(r)}$ mit dem von $N(\alpha) = \alpha^{(1)} \cdots \alpha^{(n)}$ überein, da die imaginären konjugierten insgesamt ein positives Produkt haben. Also gilt:

$$\left(\frac{-1}{\alpha}\right) = (-1)^{S\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)} \text{sgn. } N(\alpha) \qquad \text{für jedes } \alpha \equiv 1 \bmod 2 \text{ aus } k\,.$$

So ist dies ein spezieller Fall des allgemeinen quadratischen Reziprozitätsgesetzes,nämlich ein Teil des ersten Erzeugungssatzes. Er ist deshalb besonders bemerkenswert, weil in der bisher bekannten Formulierung dieses ersten Erzeugungssatzes:

$$\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right) = \prod_i \left(\frac{\alpha,\varepsilon}{\mathfrak{l}_i}\right) \prod_i \left(\frac{\alpha,\varepsilon}{\mathfrak{p}_\infty^{(i)}}\right) \qquad \text{für } \varepsilon \text{ Einheit, } \alpha \text{ prim zu 2 aus } k$$

rechts außer den bekannten Vorzeichensymbolen für die $\mathfrak{p}_\infty^{(i)}$ die unbekannten Symbole für die Primteiler $\mathfrak{l}_i$ der 2 auftreten. Man wußte nur, daß für +++ α, d. h. $\alpha \equiv 1 \bmod 4$ sicher die Symbole für die $\mathfrak{l}_i$ alle $+1$ werden. Mein Resultat umfaßt aber auch den nicht+++ Fall, wenn nur α noch $\equiv 1 \bmod 2$. Es ist eine unmittelbare Verallgemeinerung der im rationalen Körper gültigen Formel

$$\left(\frac{-1}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}} \text{ sgn. } a \qquad \text{wenn } a \equiv 1 \bmod 2$$

Ich hoffe auf ähnliche Weise dem *gesamten* Reziprozitätsgesetz in k beizukommen, z. B. das algebraische Analogon zu $\left(\frac{2}{a}\right) = (-1)^{\frac{a^2-1}{8}}$ zu finden etc.

Mit besten Grüßen Ihr stets getreuer Helmut Hasse.

1.5 17.02.1923, Hasse an Hensel, Postkarte

Postkarte
Kiel, den 17. II. 23.

Sehr verehrter Herr Geheimrat!

Ich scheine in einer sehr glücklichen Epoche meines Lebens angelangt zu sein, denn ganz plötzlich öffnen sich mir laufend Tore, durch die neue, schöne Erkenntnisse einströmen. Im Anschluß an mein spezielles Resultat über $\left(\frac{-1,-1}{\mathfrak{p}}\right)$ und $\left(\frac{\alpha,-1}{\mathfrak{p}}\right)$ habe ich nunmehr mit denselben Methoden, d. h. mit *Ihren* schönen Fundamentalsystemen für die mult. Darstellung, das gesamte quadratische Reziprozitätsgesetz für beliebige algebraische Zahlkörper sehr wesentlich erweitert und nun erst die volle Analogie mit dem rationalen Zahlkörper hergestellt. Ich stelle meine Ergebnisse kurz zusammen: Im rat. Körper lautet das Reziprozitätsgesetz mit seinen 2 Erzeugungssätzen in allgemeinster Fassung so:

$$\begin{array}{llcll}
(1.) & \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right) & = & (-1)^{\frac{a-1}{2}\,\frac{b-1}{2}+\frac{\text{sgn. }a-1}{2}\cdot\frac{\text{sgn. }b-1}{2}} & \text{, wenn } \begin{cases} a \equiv 1 \bmod 2 \\ b \equiv 1 \bmod 2 \end{cases} \\
(2.) & \left(\frac{-1}{a}\right) & = & (-1)^{\frac{a-1}{2}+\frac{\text{sgn. }a-1}{2}} = (-1)^{\frac{|a|-1}{2}} & \text{, wenn } a \equiv 1 \bmod 2 \\
(3.) & \left(\frac{2}{a}\right) & = & (-1)^{\frac{a^2-1}{8}} & \text{, wenn } a \equiv 1 \bmod 2
\end{array}$$

In fast vollkommener Analogie hierzu fand ich für einen beliebigen algebraischen Zahlkörper K:

$$\begin{array}{llcll}
(1a.) & \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) & = & (-1)^{S\left(\frac{\alpha-1}{2}\cdot\frac{\beta-1}{2}\right)+\sum_i \frac{\text{sgn. }\alpha^{(i)}-1}{2}\cdot\frac{\text{sgn. }\beta^{(i)}-1}{2}} & \text{, wenn } \begin{cases} \alpha \equiv 1 \bmod 2 \\ \beta \equiv 1 \bmod 2 \end{cases} \\
(2a.) & \left(\frac{-1}{\alpha}\right) & = & (-1)^{S\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)+\sum_i \frac{\text{sgn. }\alpha^{(i)}-1}{2}} = (-1)^{\frac{|N(\alpha)|-1}{2}} & \text{, wenn } \alpha \equiv 1 \bmod 2 \\
(3a.) & \left(\frac{2}{\alpha}\right) & = & (-1)^{S\left(\frac{\alpha-1}{4}\right)} = (-1)^{\frac{N(\alpha)-1}{4}} & \text{, wenn } \alpha \equiv 1 \bmod 4
\end{array}$$

Bis auf (3.)—(3a.) ist die Analogie vollständig, hier muß leider noch die Voraussetzung $\alpha \equiv 1 \bmod 4$ gemacht werden, jedoch bin ich schon in speziellen Fällen dahinter gekommen, was dem $\frac{a^2-1}{8}$ im algebraischen Körper entspricht, und weil eine Methode da ist, so wird sich das weitere schon von selbst finden, da bin ich unbesorgt. In den obigen Formeln bedeuten die $\sum_i$ die Summe über *alle reellen* konjugierten, das Zeichen S die Spur in K, d. h. die Summe über *alle* konjugierten. Was die Entwicklung dieses Resultats anbetrifft, verweise ich auf meinen letzten Brief. Bisher waren die Sätze (1a.) bis (3a.) nur unter solchen Voraussetzungen bekannt, daß die von mir bestimmten rechten Seiten identisch sind (wenigstens die auf die Spuren bezüglichen Teile, die Vorzeichensymbole kannte man ja, d. h. für primäre bzw. hyperprimäre α. Ich erzähle Ihnen bald ausführlich, welch' einfache Beweise dieser Sätze sich mit Ihren so herrlichen Fundamentalsystemen geben lassen. Mit Stolz und Dank sehe ich zu Ihnen als dem Schöpfer dieser Methode auf. Mit herzlichen Grüßen an Frau Geheimrat und Sie Ihr getreuer

Helmut Hasse.

1.6 28.02.1923, Hasse an Hensel, Postkarte

Postkarte
Kiel, den 28. II. 23.

Sehr verehrter Herr Geheimrat!

Eben vor meiner Abreise noch die erfreuliche Mitteilung, daß das Reziprozitätsgesetz für ℓ–te Potenzrestesich ebenso schön erweitern läßt, wie ich es Ihnen neulich für die quadratischen Reste schrieb. Näheres bald mündlich. Ich komme am 6. März nach Marburg und würde mich sehr freuen, wenn Sie mich (am besten durch Nachricht an meine Schwiegermutter) wissen ließen, wann ich Sie zu Hause antreffe. Morgen trage ich in Hamburg meine Resultate über die Reziprozitätsgesetze vor.

Mit freundlichen
Grüßen Ihr
Helmut Hasse

P. S. Ihre Normenrestarbeit, die in Korrektur bei mir eintraf, hat mir, als ich sie nochmal gründlich ansah, große Freude gemacht.

1.7 16.03.1923(?), Hensel an Hasse, Postkarte

Postkarte

Lieber Herr Doktor.

Bei unseren Besprechungen kam auch der Satz vor, dass der Binomialcoeffizient $\binom{m}{\ell a'} = \binom{[\frac{m}{\ell}]}{a'}$ ist, und ich meinte gleich, er müsste aus der Bestimmung der Anfangsglieder von $m!$ sich leicht ergeben. Wie ich darüber noch einmal nachdachte fand ich einen allgemeineren Satz über Binomialcoeffizienten, der gerade auf eine Postkartenseite geht, und den ich Ihnen umstehend mit bestem Grusse sende.

Ihr Besuch hat mich sehr erfreut und interessiert. Arbeiten Sie nicht zuviel, erholen Sie sich recht gut.
Mit den besten Grüssen an Sie und Empfehlungen an Ihre verehrten Eltern
Ihr

K. Hensel

Im Archiv. f. Math III Bd 2 S. 293 habe ich sehr kurz gezeigt, dass stets $m! = P_m(-p)^{\mu_m} + \cdots$ wo $\mu_m = \frac{m-s_m}{p-b}$, $P_m = m_0! m_1! \ldots m_r!$ ist, wenn $m = m_0 + m_1 p + \cdots + m_r p^r$ d. reduz. p–ad. Darstellg. während s_m die p–adische Ziffernsumme von m ist.

Hieraus folgt sofort für beliebigen Binomcoeff.

$$\binom{m}{a} = \frac{m!}{a!\,b!} = (-p)^{\frac{s_a+s_b-s_m}{p-1}} \frac{P_m}{P_a P_b} + \cdots$$

wenn $a + b = m$ gesetzt wird.

Es sei nun p^ν beliebige Potenz von p und

$$m = m_0^{(0)} + p^\nu m_1^{(1)} = (m_0 + \cdots + m_{\nu-1} p^{\nu-1}) + p^\nu (m_\nu + m_{\nu+1} p + \cdots)$$

eine p^ν entsprechende Zerlegung von m. Ebenso

$$a = a^{(0)} + p^\nu a^{(1)}, \quad b = b^{(0)} + p^\nu b^{(1)}$$

Dann ist $\quad m^{(1)} = \left[\frac{m}{p^\nu}\right], \quad a^{(1)} = \left[\frac{a}{p^\nu}\right], \quad b^{(1)} = \left[\frac{b}{p^\nu}\right] \quad +++$

$$s_m = s_{m_0}^{(0)} + s_m^{(1)}, \quad \text{u. s. w.} \quad P_m = P_{m^{(0)}} \cdot P_{m^{(1)}}, \ldots$$

Also ergibt sich für das Anfangsglied von $\binom{m}{a}$

$$\binom{m}{a} = (-p)^{\frac{s_{a^{(0)}}+s_{b^{(0)}}-s_{m^{(0)}}}{p-1}} \cdot \frac{P_{m^{(0)}}}{P_{a^{(0)}}\,P_{b^{(0)}}} \cdot (-p)^{\frac{s_{a^{(1)}}+s_{b^{(1)}}-s_{m^{(1)}}}{p-1}} \cdot \frac{P_{m^{(1)}}}{P_{a^{(1)}}\,P_{b^{(1)}}} + \cdots$$

Es sei nun speziell $a^{(0)} + b^{(0)} = m^{(0)}$, d. h. $a^{(0)} \leq m^{(0)}$, also wegen $a+b = m$ auch $a^{(1)}+b^{(1)} = m^{(1)}$ also $a^{(1)} \leq m^{(1)}$. Dann sind in der obigen Gleichung der erste und d. zweite Faktor rechts die Anfangsglieder von $\binom{m^{(0)}}{a^{(0)}}$ und $\binom{m^{(1)}}{a^{(1)}}$. In diesem Falle ist also

$$\binom{m}{a} = \binom{m^{(0)}}{a^{(0)}}\binom{m^{(1)}}{a^{(1)}} + \cdots \tag{1.1}$$

Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn $a^{(1)} = 0$, d. h. $a = p^\nu a^{(0)}$ ein Multiplum von p^ν ist. Dann wird $\binom{m^{(0)}}{0} = 1$, also

$$\binom{m}{p^\nu a^{(1)}} = \binom{m^{(1)}}{a^{(1)}} + \cdots = \binom{\left[\frac{m}{p^\nu}\right]}{a^{(1)}} + \cdots$$

und dies ergibt für $\nu = 1$ unseren Fall. Aber die Gleichung (1) ist sehr viel allgemeiner, denn die Bed. $a^{(0)} + b^{(0)} = m^{(0)}$ ist *sehr häufig* erfüllt. Speziell folgt für $\nu = 1$:

$$\binom{m}{a} = \binom{m_0}{a_0}\binom{\left[\frac{m}{p^?}\right]}{\left[\frac{a}{?}\right]} \quad \text{wenn in } m = m_0+\cdots,\ a = a_0+\cdots,\ a_0 \leq m_0 \text{ ist.}$$

1.8 21.03.1923, Hasse an Hensel

Allendorf/Werra, den 21. III. 1923.

Sehr verehrter Herr Geheimrat!

Besten Dank für Ihre Karte, deren Inhalt mich sehr interessiert hat. Der Beweis dieser Formeln mittels Ihrer Formel für Ordnungszahl und Anfangsglied von $m!$ ist sehr schön, einfach und elegant. Ich war damals ohne Kenntnis dieser Ihrer genauen Formel, ganz elementar, ebenfalls auf ähnliche Formeln für $\binom{m}{a}$ gelangt, die aber nicht so allgemein waren, wie Ihre. — Beiliegend übersende ich Ihnen das nunmehr fertiggestellte Manuskript unserer gemeinsamen Arbeit und möchte Sie freundlichst bitten, es noch einmal genau durchzulesen. Ich habe es mit großer Liebe und Sorgfalt bis ins Einzelne durchdacht und eigentlich jedes Wort und jeden Passus eine reiflichen Erwägung unterzogen, wie es wohl am besten sei, zu beweisen. So glaube ich nunmehr eine nach allen Seiten hin ausgeglichene und passende Form gefunden zu haben und bin gespannt, Ihr Urteil darüber zu vernehmen. Im einzelnen möchte ich noch folgendes dazu bemerken:

Den *Titel* habe ich mit Bedacht so gewählt; unter "auflösbaren" Körpern und "relativ–Abelschen" Körpern versteht man ja stets viel allgemeinere Körper als die von uns gemeinten "relativ–zyklischen" Körper.

Daß die Arbeit in *gemeinsamen Besprechungen* zwischen uns entstanden ist, können wir wohl schreiben. Wenn auch jeder von uns wichtige Punkte allein gefunden hat, so ist doch die jetzt vorliegende Form als eine schöne Durchdringung unserer beiderseitigen Ideen anzusehen. Ich für mein Teil kann nur versichern, daß mein Anteil zum größten Teil Ihren wertvollen Anregungen bei unseren Besprechungen Weihnachten (ja auf schon vorigen Sommer) und kürzlich zu verdanken ist.

Was die Ausführungen über die Beziehungen zu Hilbert–Furtwängler anbetrifft, so glaube ich damit das Richtige getroffen zu haben. Tatsächlich scheinen mir die beiden Hauptvorzüge unserer Methode in 1.) der naturgemäßeren Definition und Behandlungsweise des Normenrestproblems, 2.) in der für Primteiler $\mathfrak{l}$ über Furtwängler hinausgehenden genauen Angabe der Normenreste und Nichtreste zu liegen, was ich beides hervorgehoben habe.

Daß ich dabei an zwei Stellen Hinweise auf die weiteren auf Grund dieser Arbeit entstandenen Arbeiten von mir einfügte, werden Sie mir wohl gestatten. Ich habe Hilbert und Furtwängler nicht mit "Herr" zitiert, da dies bei Hilbert wegen seiner überragenden Stellung allgemein nicht üblich ist und Furtwängler nicht anders behandelt werden darf. Letzterer kann sich durch Fortlassen des "Herr" und gleicher Behandlung wie Hilbert nicht gekränkt, sondern nur geehrt fühlen.

Was nun die Bezeichnungen anbelangt, so haben mir diese am meisten Nachdenken verursacht. Ich weiß, wie sehr eine gute Bezeichnungsweise die Verständlichkeit und Beliebtheit einer Arbeit zu heben vermag. Auch da glaube ich es jedenfalls zu einem *relativen* Maximum von Richtigkeit und Schönheit gebracht zu haben. Ich habe *doch* für die Elemente des Relativkörpers die großen griechischen Buchstaben verwendet. Zwar sprach das von Ihnen angeführte Bedenken für die Beibehaltung der Nullen. Wenn jetzt auch rein äußerlich die Arbeit der Fragestellung nach eine direkte Fortsetzung Ihrer ersten Arbeit für $\mathfrak{p}$ prim zu $\mathfrak{l}$ ist, so zeigt doch die ganze Stellung des Problems im Rahmen der Reziprozitätsgesetze und Klassenkörpertheorie, daß es ganz wesentlich verschieden von dem früheren, von Ihnen behandelten ist, daß es vielmehr zu den nun folgenden, sich auf Grund unserer Arbeit aufbauenden Untersuchungen über Reziprozitätsgesetze alg. in viel engerem *inhaltlichem* Zusammenhang steht, als *rein formal* zu dem vorhergehenden. Es ist das allerdings eine mehr gefühlsmäßige Ansicht von mir, vielleicht durch die eingehende Beschäftigung mit diesen *folgenden* Untersuchungen beeinflußt. Rein sachlich fände ich es aber ebenfalls richtiger, wenn in unserer Arbeit, die doch die Grundlage zu näheren, auch auf ihr aufbauenden Arbeiten von mir liefert, auch in der Bezeichnungsweise die *Grundlage* gelegt würde. Ich glaube übrigens durch die Art, wie ich alles angeordnet und die neue Bezeichnung eingeführt habe, den Zusammenhang mit Ihrer früheren Arbeit behalten und dem Verständnis keine Schwierigkeiten bereitet zu haben.

Ich habe ferner in systematischem Zusammenhang dazu den *kleineren* Grundkörper mit k und den größeren Relativkörper mit K bezeichnet, eine Bezeichnung, die durch Hilbert, Furtwängler, Takagi fast zur Regel geworden ist. Demzufolge mußte ich im Falle 0.) $\alpha = \eta_h = 1 + u\lambda^h$ den Grad durch h bezeichnen. (κ wollte ich hier nicht nehmen, da es im Druck dem k so wenig ähnlich sieht, etwas Besseres als h fiel mir nicht ein.) Ein weiteres Leitmoment in der Bezeichnungsfrage war mir die deutliche Trennung der beiden Fundamentalsysteme, durch die einerseits die auf ihren Normenrestcharakter zu untersuchenden β dargestellt werden, und andererseits die Normalform für α in $x^\ell = \alpha$ gewonnen wird. Beide haben gar nichts miteinander zu tun. In unserer Arbeit wird überdies das Fundamentalsystemfür α gar nicht gebraucht, da ja α immer als fest angesehen wird. Erst in den weiteren Untersuchungen über die Einführung des Symbols $\left(\frac{\beta,\alpha}{\mathfrak{l}}\right)$ wird auch die Darstellung von α durch ein Fundamentalsystem notwendig, (das dann ein anderes, wie das spezielle, durch α jedesmal bestimmte für die β ist). Daher habe ich in der Einleitung betr. der Normierung von α einfach auf Ihre frühere Arbeit verwiesen und überhaupt die Einleitung gleich in diesem Sinne angelegt, daß zwischen α und β genau unterschieden ist. In der Bezeichnung habe ich für α in den Fällen

$$\begin{array}{lllll} \text{a.)} & \alpha = & \overline{\eta}_a & = & 1+\overline{w}_0\lambda_0 \\ \text{b.)} & \alpha = & \overline{\lambda} & & \\ \text{c.)} & \alpha = & \overline{\eta}_h & = & 1+u\lambda^h \end{array}$$

Die Konstruktion der beiden Fundamentalsysteme (I.) und (II.) habe ich in den drei Fällen a.), b.), c.) ganz parallel angelegt, d. h. erst immer (II.) konstruiert, dann aus den Relativnormen I.) und dann nachgewiesen, daß die Systeme (I) und (II) die Eigenschaften I) und II) von Satz 1 haben. Durch Anlage und durch die Bezeichnung (Ia.), (IIa.)... glaube ich dem Verständnis soweit als möglich entgegengekommen zu sein.

Striche verwendet, um die nicht überstrichenen Buchstaben für das im Mittelpunkt stehende zu konstruierende Fundamentalsystem für die β frei zu haben.

Die Bezeichnung für die Elemente $\lambda;\ \eta_1,\dots,\eta_\mu;\ \eta_a$ des Fundamentalsystems für die β ist ebenfalls lange durchdacht. Ich halte die Bezeichnung η_a für die letzte "*ausgezeichnete*" Einseinheit für ganz passend. Dies η_a spielt eine von den $\eta_1,\dots,\eta_\mu$ ganz verschiedene Rolle und soll daher auch in der Bezeichnung von ihnen unterschieden sein. Ferner setze ich stets ein ; zwischen η_μ und η_a um die Trennung auch dem Auge deutlich zu machen. Gegen die Bezeichnung

$$\eta_a = 1+w_0\lambda_0$$

wo $\lambda_0 = \left(\sqrt[\ell-1]{-\ell}\right)^\ell$ und $s_{\mathfrak{l}}(w_0) \not\equiv 0 \bmod \ell$ ist, ist wohl nichts einzuwenden. Ich möchte übrigens da bemerken, daß λ_0 nicht voll bestimmt ist, sondern die $\ell - 1$ Werte

$$\lambda_0,\ w\lambda_0, \dots\ w^{\ell-2}\lambda_0$$

haben kann, wenn w eine primitive $(\ell-1)$–te Einheitswurzel ist. Dies werde ich bei der Definition des Normen*nichtrest*symbols geltend machen.

λ_0 und w_0 haben also eine *feste* Bedeutung, die ich zur allgemeinen Einführung empfehlen möchte.

Die in meinem ursprünglichen Manuskript mit σ und τ bezeichneten Größen ($M_{i,\sigma,\tau} = 1 + w_i\lambda'(1-\sqrt[\ell]{\alpha})^2$) habe ich jetzt durch s und t bezeichnet, da σ und τ als griechische Buchstaben besser algebraischen Zahlen vorbehalten bleiben, außerdem bei Hilbert als Zeichen für Relativsubstitutionen Verwendung finden. Kleine Schönheitsfehler in dieser Hinsicht sind noch die Bezeichnung $\mu = ef$, die in einer späteren Arbeit von mir zu Kollisionen führt. Dort will ich die durch quadratische Formen darstellbaren Zahlen durch μ bezeichnen, und werde dann $m = ef$ setzen; hier können wir aber wohl gut das μ beibehalten. Ebenso ist noch unwillkommen, daß der griechische Buchstabe ϱ zur Bezeichnung der Grade der η_r und H_r verwendet ist. Wissen Sie einen besseren Vorschlag ?
Man könnte vielleicht r nehmen, jedoch ist hier über r schon in zweifacher Weise verfügt. Ich hatte mir von vorneherein r als lateinischen Index vorbehalten und diesen Buchstaben daher zuerst für die "η_r", "H_r" nachher für die G_r und S_r verwendet. Gegen letztere Bezeichnung ist doch wohl nichts einzuwenden:

$$\begin{aligned} G_r &= \text{Grundfunktionen} \\ S_r &= \text{Potenzsummen.} \end{aligned}$$

Nun genug über die Bezeichnungsfrage. Ich habe mich redlich bemüht, wenns auch nicht ganz vollkommen geworden ist, hoffentlich finde ich Ihre Zustimmung. Entschuldigen Sie bitte die unsaubere Ausführung der vorigen Seite dieses Briefes. Bei der Niederschrift fielen mir noch verschiedene Änderungen ein, die ich gleich noch angebracht habe, vor allem $\sigma \longrightarrow s$ und $\tau \longrightarrow t$, das finde ich wirklich schöner und passender.

Was die Formel $\binom{rt}{n_1\ell} = \binom{\left[\frac{rt}{\ell}\right]}{n_1} + \cdots$ anbetrifft, so wäre es doch sehr nett, wenn Sie in einer kleinen Note hinterher kurz Ihre mir mitgeteilten Überlegungen, auch über die allgemeineren Formeln dieser Art anfügten. Ich habe absichtlich im Text meine elementare Begründung ausgelassen. —

Ich habe das Manuskript, bis auf einige bei der Korrektur noch einfügbare Zitate gleich druckfertig gemacht. Wenn Sie es für gut befinden, schicken Sie es wohl bald ein. Mir liegt sehr an einem baldigen Erscheinen, da eben alle weiteren Arbeiten von mir darauf setzen. Etwaige Änderungen teilen Sie mir dann wohl noch mit, ich habe ein Duplikat hierbehalten, auch für die Korrektur. —

Fürs Crelle Journal habe ich noch einige Briefe geschrieben.

1.) An den Verlag mit beiliegender Aufstellung für das kommende Doppelheft. Gleichzeitig habe ich dabei einige Vorschläge mit Begründung über schnelleres Drucktempo gemacht.

2.) An Dr. v. Ludwigin dem Sinne, wie wir gemeinsam besprachen.

3.) An Stengel–München, wegen der "Nichtreste der Form $8h + 1$". Er antwortet mir heute, daß er sich betr. neuerer Literatur noch umtun will, solange sollen wir seine Arbeit liegen lassen.

Zu weiteren mathematischen Überlegungen bin ich noch nicht gekommen, und werde wohl auch bis Mitte Sommer wenig machen können. Denn jetzt bin ich ohne Literatur und muß meine Vorlesungen für den Sommer präparieren. Pfingsten wird meine Hochzeit sein. Nichtsdestotrotz behalte ich unsere großen Ziele, vor allem einen vernünftigen Beweis des Reziprozitätsgesetzes dauernd im Auge.

Mit den besten Grüßen und Empfehlungen an Ihre verehrten Angehörigen

Ihr Helmut Hasse.

1.9 28.03.1923, Hensel an Hasse

Redaktion des Journals
für die
reine und angewandte Mathematik
—

Marburg a. d. Lahn d. 28 März 1923.

Lieber Herr Doktor.

Nehmen Sie meinen herzlichen Dank für das schöne Gewand, das Sie nun endgültig meiner neuen Arbeit gegeben haben. Ich war aufs Höchste erstaunt, dass ich schon nach so kurzer Zeit den Brief von Ihnen erhielt und glaubte zuerst, es müsste sich um etwas Anderes handeln.

Es ist aber Alles sehr schön und klar geworden; ich habe die Arbeit mehrere Male genau durchgedacht, und bin vollständig einverstanden. Ich habe gleich alle Zitate genau beigefügt, ausser das von Furtwängler(mit der Auseinandersetzung über unsere Ergebnisse im Vergleich mit Hilbert Furtwängler bin ich auch ganz einverstanden). Ich habe mich sehr gefreut, wie einfach nach unserer letzten Besprechung auch die beiden Hilfssätze ... und ... geworden sind. Man merkt es jetzt garnicht mehr, dass sie eigentlich schwer waren.

Ich bin nun inzwischen Ihrer Anregung gefolgt und habe meine letzte Postkarte an Sie in eine kleine Note (von nur zwei Druckseiten) geschrieben, welche aber gleich allgemeiner von den arithmetischen Eigenschaften der *Polynomial*coefficienten handeln und wo in der Formel um die es sich handelt der Anfangscoefficient $\frac{P_m}{P_a P_b \cdots P_d}$ nur durch die für die Rechnung einfachste Form $\pi(i!)^{\mu_i f(\alpha_i+\beta_i+\cdots+\delta_i)}$ ersetzt wird, wenn $\mu_i,\ \alpha_i, \dots\ \delta_i$ angeben, wie oft in der p–adischen Darstellung von $m,\ a, \dots\ d$ die Ziffer i vorkommt, und wo der Exponent natürlich nur mod $p-1$ zu betrachten ist. Diese Note habe ich an Göschengeschickt und gebeten, sie noch in Bd $153\,{}^1/_2$ aufzunehmen, damit in der Arbeit noch auf sie verwiesen werden kann, wie Sie anregten. Die Anmerkung habe ich schon geschrieben.

Ich möchte nur noch einmal mit lebhafter Freude hervorheben, dass ich mit Ihrer schönen Darstellung dieser Untersuchung sowohl was die Bezeichnung, als auch was den Inhalt angeht, *vollständig* einverstanden bin; ich glaube, man kann diese Untersuchung nicht verständlicher und eleganter darstellen, als Sie das getan haben.

Ich habe nun gestern die Arbeit postfertig gemacht und sie mit einem Brief an Herren Blumenthal geschickt, in dem ich ihn dringend um schnelle Veröffentlichung bitte. Früher hatte er mir 1/2 Jahr garantiert. Hoffentlich macht er es daraufhin schneller.

Heute erhielt ich von Göschen eine Anfrage über eine Anregung, die auch Sie bereits dort mit besprochen hatten, ob man nicht vielleicht Herrn Böhm bei den zweiten Korrekturen *nicht* mizeichnen lassen sollte, um Zeit zu sparen. Ich würde das wärmstens begrüssen, und glaube wir leiten das schon für den nächsten Band in die Wege. Würden Sie vielleicht mit meiner Zustimmung dann dem Verlage dies sagen, wenn Sie sowieso dorthin schreiben. Ich nehme an, dass Sie ganz dafür sind, denn so stellte es mir Herr +++ dar. Ich würde ja auch sehr dafür sein, dass wir auf dem Umschlage von dem jetzt erscheinenden Hefte eine Notiz an die Mitarbeiter +++, nach der der Autor grundsätzlich nur *eine* Korrektur lesen soll; die übrige Korrektur wird mit grösster Genauigkeit durch die Redaktion gelesen. Auch dadurch würden wir, wie auch heute der Verlag schreibt unendlich viele Zeit sparen und *viel* schneller drucken können. Ich weiss aber nicht, ob das Ihnen und Herrn Böhm nicht doch zu viel Arbeit macht? Ist das der Fall, so lassen wir eine solche Notiz, wenn nicht, so wären Sie vielleicht so liebenswürdig, eine solche Notiz dem Verlage gleich noch mit zu senden. Wenn ich übrigens dabei Ihnen Arbeit sparen kann, so tue ich es *sehr* gern und bitte sehr über mich zu verfügen. Wenn ein Ausländer bei mir druckt könnten wir ihm vielleicht, wenn wir es annehmen, gleich dabei schreiben, dass *wir* die Korr gern machen wollen, (das würde ich z. B. sehr gern übernehmen.) denn diese Leute verzögern nur immer ganz entsetzlich.

Jetzt muss ich Beckmesser +++ beendigen und an die Vorlesungen gehen. Ich will die höhere Z. Th. doch dreistündig lesen und zwar die π-adische Theorie so, wie ich sie jetzt lesen kann, ganz allgemein. Im Winter will ich dann anschliessend noch zweistündig die Grössenfragen etc. behandeln. Ich freue mich recht darauf. Ausserdem noch Funktionentheorie und in Prosem. gewöhnl. Differentialgleichungen. Mit bestem Gruss und Wunsch für eine sehr schöne +++ mit weniger Arbeit stets Ihr

K Hensel.

1.10 31.03.1923, Hasse an Hensel, Postkarte

Postkarte
Allendorf, den 31. III. 23.

Sehr verehrter Herr Geheimrat!

Für Ihren freundlichen Brief und die wohlwollende Beurteilung und Absendung unserer gemeinsamen Arbeit danke ich Ihnen bestens. Ich habe inzwischen eine Fortsetzung dazu geschrieben, die den Vertauschungs– und Zerlegungssatz fürden Fall $\mathfrak{l}$ bringt. Den Grundgedanken (gruppentheoretischer Art) erzählte ich Ihnen ja schon neulich. Die Durchführung kam im wesentlichen auf den Nachweis hinaus, daß zu zwei " verschiedenen" α_1, α_2, d. h. zwei solchen Zahlen aus $k(\mathfrak{l})$, zwischen denen keine Relation $\alpha_1^{c_1}\alpha_2^{c_2} = \xi^\ell(\mathfrak{l})$ mit mod ℓ. nicht verschwindenden c_1, c_2 besteht, auch stets *verschiedene* Untergruppen der Normenreste von $k(\sqrt[\ell]{\alpha_1})$ und $k(\sqrt[\ell]{\alpha_2})$ in $k(\mathfrak{l})$ gehören. Dieser Nachweis war zum Teil recht einfach, wenn nämlich α_1 und α_2 "sehr" verschieden sind, etwa $\alpha_1 = \lambda, \alpha_2 = \eta$ oder $\alpha_1 = \eta_a, \alpha_2 = \eta$ wurde aber umso schwieriger, je mehr sich α_1 und α_2 für den Bereich von $\mathfrak{l}$ einander näherten, also z. B. für $\alpha_1 = \lambda_1; \alpha_2 = \lambda_2$ oder $\alpha_1 = 1 + w_1\lambda^h, \alpha_2 = 1 + w_2\lambda^h$ vom selben Grad. Ich habe aber ein Verfahren ersonnen, das sogar in dem schwierigsten Falle, wo $\alpha_1 = 1 + w_1\lambda^h$, $\alpha_2 = 1 + w_2\lambda^h$ und $w_1 \equiv w_2 \bmod \mathfrak{l}$, also α_1, α_2 *äquivalente* Einseinheiten sind, zum Ziele führt. Man braucht dann einen großen Teil der Entwicklungen unserer gemeinsamen Arbeit, insbesondere die beiden Hilfssätze F und F. Nachdem ich einen Tag lang verzweifelte, kam mir am folgenden Tage auf einer Schiefertafel, die jetzt mein Handwerkszeug geworden ist, die Erleuchtung. Vertauschungs– und Zerlegungssatz sind nunmehr bewiesen, und noch etwas mehr, das an die Kummerschen Untersuchungen heranreicht. Die letzteren gedenke ich nunmehr einer genauen Analyse mittels unserer Methoden zu unterziehen. — An Göschen habe ich in Ihrem Sinne geschrieben. Zu Ihren Vorschlägen betr. Korrekturen sage ich natürlich gerne ja und bin Ihnen sehr dankbar wenn Sie mich gegebenenfalls etwas unterstützen.

Mit herzlichen Ostergrüßen Ihr

Helmut Hasse. [1]

---

[1] Auf dem oberen Rand der Vorderseite der Karte steht weiter:
"Falls Sie doch noch den Begleitbrief +++ von Herrn, *+++ haben*, darf ich Sie wohl um gelegentliche Zusendung bitten. Ich kann so nicht beurteilen, was er mit seiner +++ Einsendung will."

1.11 21.04.1923, Hasse an Hensel

Allendorf/Werra, den 21. IV. 23.

Sehr verehrter Herr Geheimrat!

Recht herzlichen Dank für Ihre freundliche Karte. Da ich gerade einmal etwas Zeit habe, sollen Sie gleich eine Antwort darauf erhalten. Ich habe in letzter Zeit, nachdem meine Braut wieder heimgereist ist (sie war über Ostern hier) mein Kolleg über elementare Algebra und Determinanten nach Ihren Vorschlägen vom D–Zug her ausgearbeitet und viel Freude daran gehabt. Außerdem habe ich gerade die Ausarbeitung eines Kollegs über die Klassenkörpertheorie von Takagi vor, die ich mit unseren Methoden sehr schön einfach darstellen kann. Ihre Kollegpläne sind sehr schön. In Bezug auf die analytische Zahlentheorie, vor allem die Anwendungen in der Idealtheorie (ζ–Funktion, L–Reihen etc.) wird Ihnen sicherlich das demnächst erscheinende, ausgezeichnete Buch von Hecke sehr wertvoll sein. — Meine neue Arbeit, die den Vertauschungs– undZerlegungsgssatz für den Fall $\mathfrak{l}$ bringt, führt außerdem wieder zu $\left(\frac{\beta,\alpha}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{\mathfrak{L}(c|d)}$ wo $\mathfrak{L}(c|d)$ eine schiefsymmetrische (mod. ℓ) Bilinearform der Exponentenreihen von α und β ist, die durch geeignete Wahl des Fundamentalsystems in der Form (ihre Koeffizientenmatrix):

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 \\
0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -E_f & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & & \iddots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & -E_f & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & +E_f & & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \iddots & & & & & \vdots \\
0 & +E_f & & & & & & \vdots \\
1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0
\end{pmatrix}$$

angenommen werden kann, wo E_f das f reihige Einssystem ist, und in der Nebendiagonale $\frac{e}{2}$ Systeme $+E_f$ und $\frac{e}{2}$ Systeme $-E_f$ stehen. $\frac{e}{2}$ ist stets gerade (für den jetzt noch übrigen Fall ℓ ungerade, da e durch $\ell - 1$

teilbar ist. Das Resultat ist also die genaue Verallgemeinerung des früheren für den Spezialfall $\ell = 2$. Ich darf die Arbeit wohl gleich an Crelle schicken und bin Ihnen natürlich sehr dankbar, daß Sie sie nehmen wollen. — Die Oystein–Ore–sche Arbeit können wir wohl nach dem, was Sie mitteilten, nicht veröffentlichen. Die kurze Note aus dem Brief an Sie lohnt sich m. E. auch nicht recht, da alles so trivial ist. Wir haben auch glaube ich für den jetzt beginnenden Band 153 für beide Doppelhefte reichlich Material. Das erste wird ja schon zu drucken begonnen und ergibt nach einer mir gestern zugegangenen Übersicht ca. 145 Seiten (also sehr stark !), dabei ist die von Ihnen in Aussicht gestellte Arbeit aus dem Nachlaß woanders mitberücksichtigt. Ich habe vorläufig angeordnet, daß sie an die Spitze kommt. Das muß doch wohl, dem Zweck entsprechend, so sein. Da nun die Druckerei die weiteren Arbeiten gerne bald mit den richtigen Seitenzahlen versehen will, und auch der Druck jetzt sehr schnell gehen wird, da die Korrekturen auf mein Bestreben hin sehr beschleunigt werden, wäre es wünschenswert, wenn diese Arbeit bald dem Verlag zuginge. Übrigens habe ich mich über die "arithmetischen Eigenschaften der Polynomialkoeffizienten" sehr gefreut. Es geht ja alles wunderschön einfach und die Resultate sind viel allgemeiner als ich gedacht hatte. Ich habe die Korrektur gleich gelesen und mit einigen unwesentlichen Verbesserungen (auf der ersten Seite muß ein paarmal m statt a stehen, in dem Zahlenbeispiel ist auf S. 4 eine Ziffer verdruckt, etc.) zurückgesandt, mit dem Vermerk, daß Ihre Korrektur demnächst von Ihnen zugesandt wird. — Ich hoffe, daß der eben fertige Band 152, III/IV in nächsten Tagen heraus kommt. Ich habe die Korrekturen schon seit 2 Wochen fertig und eingesandt. Von Brandt–Aachen habe ich übrigens bis heute (seit 6 Wochen) (trotz Mahnung !) keine Korrektur bekommen, auch Stud. Rat Böhm hat mich 4 Wochen warten lassen, da habe ich natürlich nicht abgewartet, sondern von mir aus eingeschickt, sonst hätte der Band erst viel später erscheinen können. Wie sollen wir es denn mit Stud. Rat Böhm machen; seine Mitwirkung bei der zweiten Korrektur halte ich nicht für erforderlich, wie ich auch dem Verlag schon mitteilte, da es sich doch nur um eine leichte Revision der 1. Korrektur handelt. Außerdem wirkt er sehr verzögernd. Bei der ersten hat er bisher kaum mitgearbeitet. Soll man ihm einfach nichts mehr schicken, wie ich es vorläufig halte, oder eine diesbezügliche Mitteilung zukommen lassen?

Nun noch einiges Mathematische! Ich habe in den letzten Tagen auf verschiedenen, allabendlichen Spazierfahrten per Rad einmal gründlich über das allgemeinste Normenrestproblem nachgedacht, dessen Grundlegung Sie kürzlich gaben. Zunächst etwas Spezielles:

Unsere gemeinsame Arbeit setzt die Existenz der ℓ–ten E. W. in k voraus, gibt also eine vollständige Theorie (mit dem früheren für $\mathfrak{p}$ zusammen) des Normenrestproblems für reine, relativ-zyklische Körper von Primzahlgrad ℓ. Nun habe ich in der Takagischen Arbeit die ganz entsprechende Untersuchung für ganz beliebige relativzyklische Körper von Primzahlgrad ℓ gefunden, also auch solche, die durch nicht reine Gleichungen definiert werden, z. B. den kubischen Körper, wenn er Galoissch ist, etc. Takagi's Methoden sind nicht sehr schön, das Resultat ist folgendes:

1.) Die Relativdiskriminante eines solchen Körpers ist wenn überhaupt genau durch $\mathfrak{l}^{(h+1)(\ell-1)}$ teilbar, wenn Λ eine Primzahl und $\frac{\sigma\Lambda}{\Lambda}$ eine Einseinheit genau vom Grade h ist (h ist invariant !). σ bedeutet die erzeugende Substitution der Relativgruppe $(1, \sigma, \dots \sigma^{\ell-1})$.

2.) *Dies h ist der kritische Grad*, d. h. in Takagi'scher Fassung:
Von allen zu $\mathfrak{l}$ primen Zahlen ist nach einem Modul $\mathfrak{l}^k$ jede Zahl Normenrest, wenn $k \leq h$, dagegen nur der ℓ–te Teil, wenn $k > h$.

3.) h ist im allgemeinen eine zu ℓ prime Zahl der Reihe $1, \dots, \frac{e\ell}{\ell-1}$. Ist es durch ℓ teilbar, so ist es gleich $\frac{e\ell}{\ell-1}$.

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit dieser Behauptungen in unserem Falle eines reinen Körpers. Es ist nur nachzuweisen, daß *unser* kritischer Grad die Eigenschaft 1.), d. h. die Beziehung zu $\frac{\sigma\Lambda}{\Lambda}$ und zur Relativdiskriminante hat.

<u>1.) $k(\sqrt[\ell]{\lambda})$</u>

$$\frac{\sigma\Lambda}{\Lambda} = \frac{\zeta\Lambda}{\Lambda} = \frac{\zeta\sqrt[\ell]{\lambda}}{\sqrt[\ell]{\lambda}} = \zeta = 1-(1-\zeta) = 1-\lambda^{\frac{e}{\ell-1}}\varepsilon = 1-\Lambda^{\frac{e\ell}{\ell-1}}\varepsilon$$

also $h = \frac{e\ell}{\ell-1}$. Tatsächlich resultiert bei uns der kritische Grad $\frac{e\ell}{\ell-1}$, nämlich die ausgezeichnete Einseinheit η_a dieses Grades

<u>2.) $k(\sqrt[\ell]{1+u\lambda^k}) = k(\sqrt[\ell]{\alpha})$</u>

Die Primzahl Λ kann als $\frac{(1-\sqrt[\ell]{\alpha})^{k_1}}{\lambda^{\ell_1}}$ gewonnen werden, wo $kk_1 - \ell\ell_1 = 1$ ist. Dann ist $\frac{\sigma\Lambda}{\Lambda} = \left(\frac{1-\sqrt[\ell]{\alpha}}{1-\rho\sqrt[\ell]{\alpha}}\right)^{k_1} = \left(\frac{1-\rho\sqrt[\ell]{\alpha}}{1-\sqrt[\ell]{\alpha}}\right)^{-k_1}$

Um den Grad dieser Einseinheit zu bestimmen, kann der Exponent $-k_1$, als zu ℓ prim, unterdrückt werden. Ferner ist

$$\frac{1-\zeta\sqrt[\ell]{\alpha}}{1-\sqrt[\ell]{\alpha}} = \frac{1-\sqrt[\ell]{\alpha}+(1-\zeta)\sqrt[\ell]{\alpha}}{1-\sqrt[\ell]{\alpha}} = 1+\frac{(1-\zeta)\sqrt[\ell]{\alpha}}{1-\sqrt[\ell]{\alpha}} =$$

$$= 1+\frac{\Lambda^{\frac{e\ell}{\ell-1}}E\cdot\sqrt[\ell]{\alpha}}{\Lambda^k E'}$$

wo E und E' Einheiten im Oberkörper sind. Denn $(1-\zeta)$ hat wie oben die Ordnungszahl $\frac{e\ell}{\ell-1}$, $1-\sqrt[\ell^n]{\alpha}$ dagegen k, weil $n(1-\sqrt[\ell]{\alpha}) = 1-\alpha = -u\lambda^k$ ist. Also ist

$$\frac{\sigma\Lambda}{\Lambda} = 1+\Lambda^{\frac{e\ell}{\ell-1}-k}\cdot E''$$

und somit $h = \frac{e\ell}{\ell-1}-k$, genau wie unser kritischer Grad.

Auch die Behauptung betr. prim zu ℓ und durch ℓ teilbar stimmt, da im letzten Falle k prim zu ℓ angenommen werden darf.

Schließlich die Invarianz des Takagischen h und Beziehung zur Relativdiskriminante:
Der Exponent h von Takagi läßt sich auch so charakterisieren:

h ist der höchste Exponent, sodaß noch für jede für den Bereich von $\mathfrak{L}$ ganze Zahl A von $K(\mathfrak{L})$ gilt:

$$\sigma A \equiv A \bmod \mathfrak{L}^{h+1}$$

Entwickelt man nämlich A nach Potenzen von Λ

$$A = \alpha_0+\alpha_1\Lambda+\cdots+\alpha_k\Lambda^h+\cdots$$

so dürfen wegen $f_0 = 1$ die Koeffizienten aus dem Koeffizientenkörper von $k(\mathfrak{l})$ genommen werden. Es ist daher:

$$\sigma A - A \equiv \alpha_0+\alpha_1(\sigma\Lambda-\Lambda)+\alpha_2(\sigma\Lambda^2-\Lambda^2)+\cdots+\alpha_h(\sigma\Lambda^h-\Lambda^h) \bmod \mathfrak{L}^{h+1}$$

Nun ist $\sigma\Lambda^i-\Lambda^i$ teilbar durch $\sigma\Lambda-\Lambda$. Ferner ist

$$\frac{\sigma\Lambda}{\Lambda} = 1+(\Lambda^h)$$

$$\text{also } \sigma\Lambda = \Lambda+(\Lambda^{h+1});\ \sigma\Lambda-\Lambda = (\Lambda^{h+1}) \equiv 0 \bmod \mathfrak{L}^{h+1}$$

und somit auch für jedes für $\mathfrak{L}$ ganze A:

$$\sigma A - A \equiv 0 \bmod \mathfrak{L}^{h+1}.$$

Andererseits ist h der höchste derartige Exponent, da $\sigma\Lambda - \Lambda$ genau durch $\mathfrak{L}^{h+1}$ teilbar nach Definition von h.

Die Relativdiskriminante von $K(\mathfrak{L})$ nach $k(\mathfrak{l})$ bestimmt sich auf Grund dieser Eigenschaft von h (Beziehung zu den Verzweigungsgruppen, es existieren genau k von der Einheitsgruppe verschiedene Verzweigungsgruppen) zu

$$\mathfrak{l}^{\overset{(\ell-1)}{\to s_0-1} + \overset{(\ell-1)}{\to 1.\,\text{Verzw. Gr.}} + \overset{(\ell-1)}{\to 2.\,\text{V. Gr.}} + \,\dots\dots + \overset{(\ell-1)}{\to k\text{–te Verzw. Gr.}}} = \mathfrak{l}^{(\ell-1)(h+1)}$$

Man sieht hiernach, daß das Verhalten der Normenreste (der Grad des kritischen Elementes) weitgehend durch die Relativdiskriminante von $K(\mathfrak{L})$ nach $k(\mathfrak{l})$ bestimmt wird. Ist diese genau durch $\mathfrak{l}^{(h+1)(\ell-1)}$ teilbar, so ist h der Grad des kritischen Elementes. Ist sie zu $\mathfrak{l}$ prim, so ist entweder $\mathfrak{l} = \mathfrak{L}_1 \dots \mathfrak{L}_e$ und alle Zahlen Normenreste, oder $\mathfrak{l} = \mathfrak{L}$ und alle Einheiten Normenreste, λ Nichtrest.

Die genauere Charakterisierung des kritischen Elementes erfordert dagegen mehr, nämlich Kenntnis der den Körper definierenden Gleichung $x^\ell - \alpha = 0$, vor allem das Hauptglied von α. Takagi kennt kein kritisches Element, er weist nur nach, daß genau der ℓ–te Teil "Normenreste sind". Es ist übrigens von Interesse, daß er mit den Newtonschen Formeln *alleine* auskommt, also nicht deren Auflösungen benutzt. Unsere Methoden müßten das also auch leisten. Aber das ist ja eine Kleinigkeit. Ich für mein Teil halte die elegante Auflösungsformel und die Diskussion des Minimums für sehr schön und ziehe sie einem Durchgehen der einzelnen Glieder in den Newtonschen Formeln vor.

Wichtig ist aber, daß Takagi die *nicht reinen* Körper mit genau denselben Methoden erledigt.(Auf die reinen geht er an dieser Stelle gar nicht besonders ein). Seine Methoden *sind* λ–adisch und es ist eine Kleinigkeit, wie Sie an obiger Stichprobe sehen, sie zu unseren Zielen zu vervollständigen, d. h. mittels mutliplikativer Normalform des kritischen Elementes zu charakterisieren und so die Anwendung auf höhere Reziprozitätsgesetze in der Art, wie ich sie vorhabe,vorzubereiten. —

Die Takagischen Methoden stellen sich also als der erste Schritt zu der von Ihnen beabsichtigten Verallgemeinerung des Normenrestproblems auf beliebige Relativkörper dar.

Für diesen allgemeinen Fall habe ich nun folgende Gedanken:
Ein ganz beliebiger Relativkörper für den Bereich von $\mathfrak{l}$, also Oberkörper von $k(\mathfrak{l})$, Primteiler $\mathfrak{L}$, Rel. Grad f, Ordnung e, Gesamtgrad m hat folgende Struktur:

1.) Körper k_T f–ten Grades über $k(\mathfrak{l})$, bestimmt durch prim. $p^{f'f}$–te E. W. (f' Grad von $\mathfrak{l}$). Dieser ist rel. zyklisch vom Grade f über $k(\mathfrak{l})$, sein Primteiler $\mathfrak{l}_T$ hat Grad f, Ordnung 1 über $\mathfrak{l}$.
(*Trägheitskörper*).

2.) Darüber baut sich auf:

Körper k_0 e_0–ten Grades über dem vorigen ($e = e_0\ell^{\nu}$), also $e_0 f$–ten Grades über $k(\mathfrak{l})$. Er ist rel.–zyklisch vom Grade e_0 über $k_T(\mathfrak{l}_T)$. e_0 ist Teiler von $p^{ff'} - 1$, also sind die e_0–ten Einheitswurzeln in $k_T(\mathfrak{l}_T)$ enthalten, also dieser Körper durch eine reine Gleichung definiert. Sein Primteiler $\mathfrak{l}_v$ hat den Rel. Grad 1 nach $k_T(\mathfrak{l}_T)$, die Relativordnung e_0. Sein primitives Element kann also als Primzahl λ_v für $\mathfrak{l}_v$ gewählt werden.
(*1. Verzweigungskörper*).

3.) Weiter bauen sich sukzessive auf die *höheren Verzweigungskörper*, deren letzter $K(\mathfrak{L})$ ist. Jeder ist ein Abelscher Körper zum vorhergehenden, dessen Relativgrad eine Potenz ℓ^{ν_i} von ℓ ist $\digamma$. So ist denn $\nu_1 + \nu_2 + \ldots = \nu$ Die Abelsche Gruppe jedes dieser Körper zum vorhergehenden ist vom Typus $(\ell, \ell, \ldots \ell)$ ν_i–mal, also der Körper zusammengesetzt aus ν_i zyklischen Körpern vom Primzahlgrad ℓ. Für den Fall, das ζ in $k(\mathfrak{l})$ vorkommt, sind es also alles reine Körper. Die Primteiler dieser Körper erhöhen sich nur noch in der Ordnung (nicht im Grad) in dem die Ordnung von e_0 in k_0 sukzessive durch e_0 $e_0\ell^{\nu_1}$, $e_0\ell^{\nu_1+\nu_2}, \ldots, e_0\ell^{\nu_1+\nu_2+\cdots} = e_0\ell^{\nu}$ ansteigt.

$\digamma$ es ist $\nu_i \leq f$

Das allgemeine Normenrestproblem müßte sich nun so erledigen lassen, daß man durch diese Körperserie hindurchsteigt. Für den Fall, daß

entweder K schon bei 1.) erreicht ist (also $e = 1$)
oder K schon bei 2.) 〃 〃 (also e prim zu ℓ) und
außerdem (leider!) noch f prim zu $p^{f'} - 1$ ist,

haben Sie das Problem schon erledigt. Es bleibt also bis auf die Einschränkung für f im "oder"–Falle im wesentlichen noch das Gleichungssystem durch die Körperserie 3.), die höheren Verzweigungskörper. Diese Aufgabe setzt sich nun aus 2 Teilen zusammen:

a.) Aufstellung von Gesetzen des "Hindurchsteigens".

b.) Erledigung des Normenrestproblems für den Fall eines relativ–Abelschen Körpersvom Typus $(\ell, \ell, \ldots, \ell)$, also eines aus ν_i zyklischen Körpern vom Primzahlgrad ℓ zusammengesetzten Körpers.

Über a.) habe ich noch nicht viel nachgedacht. b.) glaube ich schaffen zu können und zwar mit Bestimmtheit für den Fall: ζ in $k(\mathfrak{l})$ oder auch nur in $k_v(\mathfrak{l}_v)$ enthalten. Da habe ich nämlich in meiner neuen Arbeit folgenden Satz als Hilfssatz bewiesen:

Ist K ein aus κ unabhängigen zyklischen Körpern vom Primzahlgrad $k_1(\sqrt[\ell]{\alpha_1}), \ldots, k_\kappa(\sqrt[\ell]{\alpha_\kappa})$ komponierter Körper, also genau so ein solcher, wie die höheren Verzw. Körper sind, über $k(\mathfrak{l})$, so lassen sich in $k(\mathfrak{l})$ genau κ kritische Elemente auswählen, die Nichtnormzahlen sind, sodaß ein Element dann und nur dann Normzahl ist, wenn es jene κ kritischen Elemente nicht enthält. Die Normenreste bilden also eine Untergruppe vom Index ℓ^κ.

Ich möchte vermuten, daß a.) sich so erledigt:

Beim Hindurchsteigen durch die Serie 3.) bilden die Relativnormen von $K(\mathfrak{L})$ nach $k_\nu(\mathfrak{l}_\nu)$ eine Untergruppe vom Index $\ell^{\nu_1+\nu_2+\cdots} = \ell^\nu$, d. h. es gibt genau ν kritische Elemente.

Beim weiteren Hinabsteigen kommen dann noch die von Ihnen angestellten Überlegungen hinzu, sodaß man auf $\nu+1$ oder $\nu+2$ kritische Elemente kommen würde.

Es wäre auch denkbar, daß nicht genau sondern weniger kritische Elemente bei 3.) herauskommen, jedenfalls sicher nicht mehr.

Hoffentlich sind Ihnen meine kurzen Ausführungen verständlich, sonst bin ich gerne bereit, Näheres mitzuteilen und zu erläutern. Übrigens habe ich Herrn Tornier vorige Woche ein längeres Manuskript über die Theorie der Trägheits– und Verzweigungskörper mit Ihren Methoden entwickelt, gesandt, das Ihnen Herr Tornier wohl gerne mal zur Verfügung stellt. Sie finden darin die genaue Skizzierung der nur angedeuteten Sätze 1.) — 3.) über diese Körper und zwar aus dem "botokudischen " Hilbertschen Zahlbericht ins "Deutsche" übersetzt und mit Zusätzen versehen.

Mit herzlichem Gruß auch an Ihre hochverehrte Frau Gemahlin, dem sich auch meine Eltern freundlichst anschließen, Ihr getreuer

Helmut Hasse.

Am 16. Mai bin ich zu Heiratszwecken zwei Tage in Marburg, Sie werden es mir aber nicht übelnehmen, wenn ich dann keine Zeit finde, Sie aufzusuchen.

1.12 23.04.1923, Hasse an Hensel, Postkarte

Postkarte
Allendorf/Werra,
a. d. 23. IV. 23.

Sehr verehrter Herr Geheimrat!

Zu meinem allergrößten +++ stellte ich heute ganz plötzlich fest, daß in unserer *Normenrestarbeit ein ganz schlimmer Fehler ist*, der eine große Umwälzung herbeiführen muß. Es ist nicht richtig, in den Potenzsummen

$$S(1-\sqrt[\ell]{\alpha})^{rt} \;=\; \ell \sum_{n=0}^{(?)} \binom{rt}{n\ell}(-1)^n\alpha^n$$

den Bin. Koeffiz. $\binom{rt}{n\ell}$ durch den mod ℓ kongruenten $\binom{\left[\frac{rt}{\ell}\right]}{n}$ zu ersetzen. Denn es entsteht dann folgendes:

$$S(1-\sqrt[\ell]{\alpha})^{rt} \;=\; \ell\left\{\sum_{n=0}^{\left[\frac{rt}{\ell}\right]}(-1)^n\binom{\left[\frac{rt}{\ell}\right]}{n}a^n + \underline{\underline{\text{Glieder mit }\ell}}\right\}.$$

Man kann also nur schließen:

$$=\;\ell\left\{(1-\alpha)^{\left[\frac{rt}{\ell}\right]}+\underline{\underline{\ell a}}\right\} \;=\; \ell\left\{u\lambda^{h\left[\frac{rt}{\ell}\right]}+\underline{\underline{\ell a}}\right\},$$

sodaß die Ordnung von S_r hiernach $s_r \geq \min\left(e+h\left[\frac{rt}{\ell}\right], \underline{\underline{2e}}\right)$ würde, was für alles weitere durchaus unbrauchbar. Man könnte alles retten, wie ich mir überlegte, wenn man folgenden Satz nachreiche:

Ist $n \leq (\ell-1)^2$ (das genügt !) so ist der Ausdruck:

$$A_n \;=\; 1-\binom{n}{\ell}+\binom{n}{2\ell}-\cdots\pm\binom{n}{\left[\frac{n}{\ell}\right]\ell}$$

mindestens durch ℓ^{a_n} teilbar, wo $a_n \geq \frac{n}{\ell-1}-1$ ist.

Der Satz stimmt nach Beispielen und führt zu der folgenden, auch bei Takagi nicht besser zu gebenden Ordnungszahl s_r von $S(1-\sqrt[\ell]{\alpha})^{rt}$:

$s_r \geq \ell + \left[\frac{\{rt-(\ell-1)\}h}{\ell}\right] + 1$ mit der soweit ich sehe, unser Beweis noch ebenso klappt, wie mit der *tatsčhlich* nicht in allen Fällen stimmenden, von uns benutzten $s_r = \ell + \left[\frac{rt}{\ell}\right] h$. Ich sitze fortdauernd in *fieberhafter Aufregung*, kann obigen Satz nicht beweisen, und bin *tief unglücklich*. Muß ich doch die *Schuld* an jenem Fehler *ganz auf mich* nehmen und bereite Ihnen dadurch noch *+++ !* Was sollen wir tun ? *Das Manuskript müssen wir doch schleunigst zurückfordern.*

Mit herzlichem Gruß Ihr tieftrauriger H. Hasse

1.13 26.04.1923, Hasse an Hensel

Allendorf, den 26. IV. 23.
ab 1. V. Kiel, Mathematisches Seminar der Universität.

Sehr verehrter Herr Geheimrat!

Beiliegend sende ich Ihnen das Manuskript (Reinkonzept) meiner neuen Arbeit, die Reinschrift geht mit gleicher Post an de Gruyter. Ich habe in den letzten Tagen noch einige Mühe mit der endgültigen Fertigstellung gehabt und daher auch in das Reinkonzept noch etwas verbessern, insbesondere a. S. 10 unten einen Fehler andeutungsweise verbessern müssen. Hoffentlich finden Sie trotzdem gut durch. Ich denke wenigstens, daß alles gut verständlich ist. Die Exponentialdarstellung $\left(\frac{\beta,\alpha}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{\text{Bilinearform}}$ (siehe übrigens für den Kreiskörper Zahlbericht, S. 413, Gl. (82.) (Nebendiagonalmatrix) und S. 516, Mitte) habe ich nun doch einer weiteren Arbeit vorbehalten, da diese schon lang genug ist und noch einige besondere Untersuchungen notwendig sind. Ebenso habe ich den in meinem vorletzten Brief genannten Satz über die Normenreste eines Körpers $K = (\sqrt[\ell]{\alpha_1}, \ldots, \sqrt[\ell]{\alpha_\nu})$ nicht in größter Allgemeinheit, sondern nur soweit ich ihn nötig habe, nämlich für $\nu = 2$ aufgenommen, da ich eine weitere Arbeit über die Normenreste solcher und etwas allgemeinerer Körper plane. Ich will Ihnen aber den auf Grund meiner Resultate sehr einfachen Beweis mitteilen:

Satz *Sind* $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ *irgendwelche* ν *Zahlen aus* $k(\mathfrak{l})$, *zwischen denen keine Relation*

$$\alpha_1^{a_1} \ldots \alpha_\nu^{a_\nu} = \xi^\ell(\mathfrak{l}) \tag{1.1}$$

mit mod. ℓ *nicht sämtlich verschwindenden, rationalen* a_i *besteht, so bilden die Normenreste des Körpers*

$$K_\nu = k(\mathfrak{l}; \sqrt[\ell]{\alpha_1}, \ldots, \sqrt[\ell]{\alpha_\nu})$$

in $k(\mathfrak{l})$ *eine Untergruppe vom Index* ℓ^ν.

Beweis: Vorweg einige Bemerkungen: 1.) In $k(\mathfrak{l})$ besteht eine *eindeutige* Darstellung:

$$\alpha = \lambda^{c_0}\eta_1^{c_1}\dots\eta_m^{c_m}\eta_a^{c_{m+1}}\alpha_0^{\ell}(\mathfrak{l})\,; \qquad \begin{array}{l}(0 \le c_i \le \ell - 1)\\ (m = ef)\end{array}$$

Hieraus folgt, daß höchstens $m+2$ "unabhängige" α, zwischen denen keine Relation (1.) besteht, existieren können, z. B. die $m+2$ Basiselemente $\lambda;\ \eta_1,\dots,\eta_m;\ \eta_a$. Es ist also $1 \le \nu \le m+2$

2.) Auf Grund einfachster Betrachtungen (Galoissche Theorie) zeigt man leicht, daß im Falle des Nichtbestehens einer Relation (1.) der Körper K_ν ein *Körper* vom Grade ℓ^ν über $k(\mathfrak{l})$ ist, indem $\mathfrak{l}$ nur einen einzigen Primteiler $\mathfrak{L}_\nu$ hat. Ich bezeichne ihn daher sinngemäß mit $K_\nu(\mathfrak{L}_\nu)$. Es ist $\mathfrak{l} \sim \mathfrak{L}_\nu^{\ell^\nu}$. $K_\nu(\mathfrak{L})$ hat eine Reihe Unterkörper, von denen ich die Serie

$$\begin{aligned} k(\mathfrak{l}),\ K_1(\mathfrak{L}_1) = k(\mathfrak{l};\sqrt[\ell]{\alpha_1});\ K_2(\mathfrak{L}_2) &= k(\mathfrak{l};\sqrt[\ell]{\alpha_1},\sqrt[\ell]{\alpha_2});\ \dots\\ K_\nu(\mathfrak{L}_\nu) &= k(\mathfrak{l};\sqrt[\ell]{\alpha_1},\dots,\sqrt[\ell]{\alpha_\nu})\end{aligned}$$

ins Auge fasse. Jeder ist zyklisch vom Grad ℓ und "rein" zum vorhergehenden. Wendet man daher den Satz an, daß die Normenreste eines solchen zyklischen, reinen Körpers ℓ–ten Grades im Unterkörper eine Untergruppe vom Index ℓ bilden, und zwar sukzessive durch die ganze Körperreihe hindurch, so sieht man, wie im Beweis zu Satz 3 S. 15 meiner Arbeit, daß die Relativnormen von $K_\nu(\mathfrak{L}_\nu)$ nach $k(\mathfrak{l})$ in $k(\mathfrak{l})$ eine Untergruppe bilden, deren Index $\le \ell^\nu$ sein muß.

Es kommt nun darauf an zu zeigen, daß der Index genau gleich ℓ^ν ist. Dazu betrachte ich eine andere Reihe von "nebeneinander liegenden" Unterkörpern von $K_\nu(\mathfrak{L}_\nu)$, nämlich:

$$k_1(\mathfrak{l}_1) = k(\mathfrak{l};\sqrt[\ell]{\alpha_1});\ \dots\ k_\nu(\mathfrak{l}_\nu) = k(\mathfrak{l};\sqrt[\ell]{\alpha_\nu})$$

Jede Relativnorm N von $K_\nu(\mathfrak{L})$ nach $k(\mathfrak{l})$ die gleichzeitig Relativnorm n_1 von $k_1(\mathfrak{l}_1)$ nach $k(\mathfrak{l}),\dots,n_\nu$ von $k_\nu(\mathfrak{l}_\nu)$ nach $k(\mathfrak{l})$. Es ist also, wie in der Arbeit S. 16. N Untergruppe des Durchschnitts

$$\overline{N} = (n_1,\dots,n_\nu) \tag{1.2}$$

der Normenzahl–Untergruppen $n_1,\dots,n_\nu$ der ν Körper $k_i(\mathfrak{l};\sqrt[\ell]{\alpha_i})$. Diese Untergruppen sind sämtlich durch lineare Kongruenzen mod. ℓ

$$\mathfrak{L}_i(d_s) \equiv \sum_{s=0}^{m+1} p_s^{(i)} d_s \equiv 0 \text{ mod. } \ell \qquad (i = 1,2,\dots,\nu) \tag{1.3}$$

definiert, denen die Exponenten d_s einer zu ihnen gehörigen

$$\beta = \lambda^{d_0}\eta_1^{d_1}\dots\eta_m^{d_m}\eta_a^{d_{m+1}}\beta_0^{\ell}; \qquad (0 \le d_s \le \ell - 1)$$

genügen müssen. Diese ν Kongruenzen definieren nun nach bekannten Gruppensätzen dann und nur dann eine Untergruppe von $k(\mathfrak{l})$ vom Index ℓ^{ν}, wenn sie "unabhängig mod ℓ" sind, sonst eine Untergruppe von kleinerem Index ℓ^{ν_0} ; $(\nu_0 < \nu)$.

Es ist also nur noch die Unabhängigkeit der Kongruenzen (3.) nachzuweisen. Dann folgt, daß der Index von $\overline{N}$ gleich ℓ^{ν}, also der von N als Untergruppe $\ge \ell^{\nu}$ ist, und folglich genau $= \ell^{\nu}$, $\Big($ und nach (2.) noch $N = (n_1, n_2, \dots, n_{\nu})\Big)$. Damit ist alles bewiesen.

Um die Unabhängigkeit der Kongruenzen (3.) zu zeigen, benutze ich Vertauschungs– und Zerlegungssatz für das Normenrestsymbol.Ist nämlich

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha & = & \eta_0^{c_0}\eta_1^{c_1}\dots\eta_m^{c_m}\eta_{m+1}^{c_{m+1}}\alpha_0^{\ell}(\mathfrak{l}) \\ \beta & = & \eta_0^{d_0}\eta_1^{d_1}\dots\eta_m^{d_m}\eta_{m+1}^{d_{m+1}}\beta_0^{\ell}(\mathfrak{l}) \end{array}\right\} ; \quad \left(\left.\begin{array}{rcl} \lambda & = & \eta_0 \\ \eta_a & = & \eta_{m+1} \end{array}\right\} \text{gesetzt} \right)$$

so gestattet das Symbol $\left(\frac{\beta,\alpha}{\mathfrak{l}}\right)$ die Zerlegung:

$$\left(\frac{\beta,\alpha}{\mathfrak{l}}\right) = \prod_{s,r}\left(\frac{\eta_s,\eta_r}{\mathfrak{l}}\right)^{d_s c_r}$$

oder, wenn für ein *festes*, primitives ζ : $\left(\frac{\eta_s,\eta_r}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{\mu_{sr}}$ gesetzt wird,

$$\left(\frac{\beta,\alpha}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{\sum_{s,r=0}^{m+1}\mu_{sr}d_s c_r} = \zeta^{L(d_s|c_r)}$$

wo $L(d|c)$ wieder eine Bilinearform, diesmal schiefsymmetrisch, ist.
$\left(\left(\frac{\eta_s,\eta_r}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\eta_r,\eta_s}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{\mu_{sr}+\mu_?} \right)$
Die Determinante der Matrix $L = (\mu_{sr})$ ist mod. ℓ von Null verschieden, da sonst L durch eine mod. ℓ ganzzahlige, umkehrbare Transformation auf weniger Variablen d_s, c_r gebracht werden könnte, also für gewisse α, die *nicht* ℓ–te Potenzen in $k(\mathfrak{l})$ sind, *jedes* β Normzahl wäre, was nicht der Fall. Sind nun irgendwelche ν unabhängigen $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_{\nu}$ gegeben, und

ihre Darstellungen

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \prod_r \eta_r^{c_r^{(1)}}\, \xi_1^\ell \\
\alpha_2 &= \prod_r \eta_r^{c_r^{(2)}}\, \xi_2^\ell \\
\cdots & \cdots \cdots \\
\alpha_\nu &= \prod_r \eta_r^{c_r^{(\nu)}}\, \xi_\nu^\ell
\end{aligned}$$

so ist die Matrix $C = (c_r^{(i)})$ mod. ℓ vom Höchstrange ν. Die über den Normenrestcharakter von β entscheidenden Linearformen $L_i(d_s)$ in (3.) entstehen nun aus $L(?|c_r)$, indem die c durch die ν Reihen $c_r^{(i)}$ ersetzt werden. Folglich stellt sich die Matrix der ν Linearformen $L_i(d_s)$ in der Form

$$LC$$

dar, und hat wegen des Nichtverschwindens der Determinante von L denselben Rang wie C, also ebenfalls ν. Also sind die ν Linearformen $L_i(d_s)$ unabhängig, was z. b. w.

Was ich nun weiter plane ist folgendes: Ich sehe eine große Analogie der ganzen hier eingeschlagenen Entwicklungen zu der Theorie der *Gruppen von Idealnormen.*In großen Zügen ist das Bild dort folgendes:

Die Normen der Ideale eines Oberkörpers K bilden im Unterkörper k stets eine gewisse Idealgruppe. Legt man irgendeine (allgemeinste Klasseneinteilung in k zugrunde, so bilden auch diejenigen Klassen aus k, die Idealnormen aus K enthalten eine Klassengruppe H. Für *Galoissche Relativkörper* K gelten nun folgende beiden Tatsachen:

1. Der Relativgrad n des Gal. Körpers K ist stets größer oder gleich als der Index h der Klassengruppe H in Bezug auf die Gruppe aller Strahlklassen.

2. Ist K' Oberkörper von K (beide Galoissch), so ist die zugeordnete Klassengruppe H' von K' Untergruppe von H und umgekehrt.

(Übrigens wird dann der "*Klassenkörper*" zu H einfach so definiert:

> K heißt Klassenkörper zu H, wenn der Index h von H gleich dem Rel. Grad n von k ist, und aus 2.) folgt sofort, daß *nur*

ein Klassenkörper zu jeder Klassengruppe H existieren kann. Takagiweist die *Existenz* in allen Fällen nach, und weiter, daß er sogar rel. Abelsch ist und daß umgekehrt jeder rel. Abelsche KörperKlassenkörper zu einer bestimmten Klassengruppe H in k ist.) Das nur nebenbei.

Die erwähnte Analogie sehe ich nun in den Sätzen 1.) und 2.). Für Zahlnormen in den λ–adischen Körpern scheinen nämlich die ganz entsprechenden Tatsachen zu gelten:

1. Die Relativnormen *jedes* Körpers $K(\mathfrak{L})$ (ein solcher ist stets Galoissch) bilden in $k(\mathfrak{l})$ eine Untergruppe H, deren Index kleiner oder gleich dem Grad des Körpers $K(\mathfrak{L})$ über $k(\mathfrak{l})$ ist.

2. Ist $K'(\mathfrak{L}')$ Oberkörper von $K(\mathfrak{L})$, so ist die Normzahluntergruppe H' von $K'(\mathfrak{L})$ Untergruppe der Normzahl–Untergruppe H von $K(\mathfrak{L})$.

Möglicherweise gilt sogar in 1.) stets: *nur gleich*, was aber nicht anzunehmen ist, schon eher, wenn man Abelsche Körper $K(\mathfrak{L})$ betrachtet.

2.) ist selbstverständlich, da die Relativnormen aus $K'(\mathfrak{L}')$ auch Normen aus $K(\mathfrak{L})$ sind. (Bitte um Entschuldigung, habe $<$ und $>$ verwechselt).[1]

1.) stimmt in allen von mir durchgedachten Fällen, z. B. für Körper $k(\mathfrak{l}, \sqrt[\ell]{\alpha})$, wo der Grad ℓ, der Index auch ℓ ist, auch nach obigem Beweis für $k(\mathfrak{l}; \sqrt[\ell]{\alpha_1}, \ldots, \sqrt[\ell]{\alpha_\nu})$;

Sie erkennen im obigen Beweis übrigens gleichzeitig die große Rolle, die der *Index* der Normzahluntergruppe spielt. 1.) stimmt auch für *rel.zyklische* Körpervom Grade ℓ^ν, z. B. $k(\sqrt[\ell^\nu]{\alpha})$, etc..., wie man wieder durch sukzessive Relativnormbildung durch die ineinandergeschachtelten Unterkörper erkennt. Ich will nun versuchen, diesen allgemeinen Satz, der mir für das allgemeine Normenrestproblemwesentlich scheint beizukommen, und zwar in folgenden Etappen:

1. Behandlung des Normenrestproblems für *nicht reine* (allgemeine) relativzyklische Körper vom Primzahlgrad ℓ und aus solchen komponierte Körper. (im wesentlichen bei Takagi, braucht nur unseren Methoden angepaßt zu werden).

2. Behandlung des Normenrestproblems für relativ–zyklische Körper von Primzahlpotenzgrad ℓ^ν und aus solchen (für gleiches ℓ) komponierte.

[1] Dies bezieht sich offenbar auf vier durchgestrichene Zeilen.

3. Behandlung des Normenrestproblems für Körper die aus relativzyklischen Körpern der Grade $\ell_1^{\nu_1}, \ell_2^{\nu_2}, \ldots, \ell_p^{\nu_p}$ zusammengesetzt sind, und somit für die allgemeinsten relativ–Abelschen Körper.

Bei 2.) und 3.) werden die Richtlinien, die ich in meinem vorletzten Brief entwarf, nützlich sein, also Benutzung der höheren Verzweigungskörper, die hier alle zyklische Unterkörper werden.

Ich glaube, daß dieser Teil, also die Behandlung der relativ–Abelschen Körper sich sehr glatt wird machen lassen. Ob auch die Galoisschen Körper und somit die allgemeinsten Körper $K(\mathfrak{L})$ sich diesen Hilfsmitteln fügen werden, kann ich noch nicht ahnen.

Ich wäre Ihnen sehr dankbar, wenn Sie mir gelegentlich einmal ausführlich Ihre Ansichten zu meinen Ideen mitteilten. Es wäre doch fein, wenn vielleicht sich wieder einmal eine gemeinsame Arbeit ergäbe, sollten Sie dazu Lust haben, so würde ich mit größtem Vergnügen einen Teil der Sommerferien in Marburg zubringen.

Ich möchte nochmals um Entschuldigung bitten, daß mir in der Normenrestarbeit der schreckliche Fehler passiert ist. Sie haben das Manuskript wohl zurückerhalten, und ich bin dann gerne bereit, die erforderliche Änderung in ein paar Tagen anzubringen. Es sind ja nur 4 Seiten neu zu machen, und ich habe es schon im Konzept fertig.

Zum Schluß möchte ich Ihnen noch einmal versichern, mit welch' großem Interesse und Freude ich nunmehr, wo mich die Angelegenheit "gepackt" hat, nochmals Ihre Arbeit über das allgemeine Norm–Problem durchstudiert, und bis ins Einzelne alles durchdacht habe. Ich glaube, wie ich schon schrieb, daß große und schöne Sätze am Ziele winken.

Mit herzlichen Grüßen Ihr getreuer

Helmut Hasse.

1.14 27.04.1923, Hasse an Hensel

A. den 27. IV. 23.

Sehr verehrter Herr Geheimrat!

Nach 2 schrecklichen Tagen kam mir heute früh der rettende Gedanke, der unsere Arbeit wieder auf die Beine hebt, die sie verloren hatte. Es ist allerdings eine Umänderung von ca. 4 Seiten des Manuskripts vorzunehmen, und wir müssen uns daher unbedingt das Manuskript noch einmal zurücksenden lassen. Ich will Ihnen gleich ausführlich mitteilen, wie alles richtig zu machen ist. Dabei füge ich gleich eine bedeutende Verbesserung ein, die darin besteht, daß man die nach unten abzuschätzenden Ordnungszahlen *auf den Primteiler* $\mathfrak{L}$ *des Oberkörpers* bezieht. Dadurch wird 1.) meine Neuerung überhaupt erst möglich, 2.) die Anwendung der Waringschen Formeln unnötig, da die Newtonschen genügen, 3.) die Symbole "$[\quad]$", d. h. "größtes Ganze" vermieden. Der auf meiner Karte genannte Hilfssatz ist richtig und eine einfache Folge der Kreiskörpertheorie:(man bilde die Spur von $(1-\zeta)^n$ die durch $\ell^{\frac{n}{\ell-1}}$ teilbar ist, andererseits sich als

$$\ell\left\{1-\binom{n}{\ell}+\binom{n}{2\ell}-\cdots\right\}$$

ausrechnet, also ist die Klammer $\{\quad\}$ mindestens durch die nächste ganze Potenz von ℓ über $\ell^{\frac{n}{\ell-1}-1}$ teilbar. Ich brauche aber den Hilfssatz gar nicht, da ich $(1-\zeta)^n$ gar nicht auszurechnen brauche. Nun Sie werden ja sehen).

Ich beginne da, wo die Änderung nötig wird. Es wird erst die Entwicklung

$$n(H_{i,s,t}) = n\left(1+w_i\lambda^s(1-\sqrt[\ell]{\alpha})^t\right) = \tag{1.10}$$

$$= 1+w_i\lambda^s G_1(1-\sqrt[\ell]{\alpha})^t + w_i^2\lambda^{2s}G_2(1-\sqrt[\ell]{\alpha})^t+\cdots+w_i^\ell\lambda^{\ell s}G_\ell(1-\sqrt[\ell]{\alpha})^t$$

angesetzt. Es seien ferner für $r = 1,2,\dots\ \ell$:

g_r	die	Ordnungszahlen	der	G_r	in	$\mathfrak{l}$,	ferner	$\overline{g}_r = \ell g_r$	die–sel–ben
s_r	"	"	"	S_r	"	$\mathfrak{l}$,	"	$\overline{s}_r = \ell s_r$	O. Z.
a_r	"	"	"	Glieder in (10.)	"	$\mathfrak{l}$,	"	$\overline{a}_r = \ell a_r$	in $\mathfrak{L}$.

Erstes und letztes Glied lassen sich, wie vorher, angeben:

$$\text{(1.11)} \qquad \text{Erstes Glied} = -w_i \omega^g \lambda^{e+s}, \qquad \text{also} \quad a_1 = e+s$$

$$\text{(1.12)} \qquad \text{Letztes Glied} = w_i^\ell (-u)^t \lambda^{ht+\ell s} = w_i^\ell (-u)^t \lambda^{\overline{\zeta}},$$

$$\shortparallel \qquad a_\ell = ht + \ell s = \overline{\zeta}\,.$$

Für die Potenzsummen $S_\mu(1-\sqrt[\ell]{\alpha})^t$ für $r = 1, 2, \ldots \ell-1$ führe ich nun folgende Rechnung aus:

$$\begin{aligned}
S_r(1-\sqrt[\ell]{\alpha})^t &= S_1(1-\sqrt[\ell]{\alpha})^{rt} = \sum_{\nu=0}^{\ell-1} (1-\zeta^\nu \sqrt[\ell]{\alpha})^{rt} \\
&= (1-\sqrt[\ell]{\alpha})^{rt} \left[1 + \sum_{\nu=1}^{\ell-1} \left(\frac{1-\zeta^\nu \sqrt[\ell]{\alpha}}{1-\sqrt[\ell]{\alpha}} \right)^{rt} \right] \\
&= (1-\sqrt[\ell]{\alpha})^{rt} \left[1 + \sum_{\nu=1}^{\ell-1} \left(\frac{(1-\sqrt[\ell]{\alpha}) + (1-\zeta^\nu)\sqrt[\ell]{\alpha}}{1-\sqrt[\ell]{\alpha}} \right)^{rt} \right] \\
&= (1-\sqrt[\ell]{\alpha})^{rt} \left[1 + \sum_{\nu=1}^{\ell-1} \left\{ 1 + \frac{\sqrt[\ell]{\alpha}}{1-\sqrt[\ell]{\alpha}} (1-\zeta^\nu) \right\}^{rt} \right] \\
&= (1-\sqrt[\ell]{\alpha})^{rt} \left[1 + \sum_{\nu=1}^{\ell-1} \sum_{\mu=0}^{rt} \binom{rt}{\mu} \left(\frac{\sqrt[\ell]{\alpha}}{1-\sqrt[\ell]{\alpha}} \right)^\mu (1-\zeta^\nu)^\mu \right]
\end{aligned}$$

$$\text{(1.13)} \qquad S_r(1-\sqrt[\ell]{\alpha})^t = (1-\sqrt[\ell]{\alpha})^{rt} \left[\ell + \sum_{\mu=0}^{rt} \binom{rt}{\mu} \sqrt[\ell]{\alpha}^\mu \frac{\sum_{\nu=1}^{\ell-1}(1-\zeta^\nu)^\mu}{(1-\sqrt[\ell]{\alpha})^\mu} \right]$$

Aus (13) folgt alles, was man über S_r zu wissen braucht.

Es ist nämlich $(1-\zeta^\nu) \sim \mathfrak{L}^{\frac{e\ell}{\ell-1}}$, also $\sum_{\nu=1}^{\ell-1}(1-\zeta^\nu)^\mu$ teilbar durch $\mathfrak{L}^{\frac{e\ell}{\ell-1}\mu}$
Ferner ist $(1-\sqrt[\ell]{\alpha}) \sim \mathfrak{L}^h$ (wenn $\alpha = 1 + w\lambda^h$), also $(1-\sqrt[\ell]{\alpha})^\mu \sim \mathfrak{L}^{h\mu}$
Dieser ist das μ–te Glied von $\sum_{\mu=1}^{rt}$ teilbar durch $\mathfrak{L}^{\mu\left(\frac{e\ell}{\ell-1}-h\right)} = \mathfrak{L}^{\mu h'}$.

Die Ordnungszahlen der einzelnen Glieder von $\sum_{\mu=1}^{rt}$ sind also sukzessive

$$\geq h', 2h', \ldots, \mu h', \ldots, rth'$$

und dies ist eine wachsende Folge. Die zunächst ganz rohe Abschätzung:

alle Glieder von höherer O. Z. als h'

genügt aber nicht. Vielmehr muß man noch benutzen, daß *die ersten* $\ell - 1$ *Glieder* sicher *sämtlich* von nicht niedrigerer Ordnungszahl als ihr letztes, also $(\ell - 1)h'$ sind.

Es ist nämlich für $\mu = 1, 2, \ldots, \ell - 1$:

$$\sum_{\nu=1}^{\ell-1} (1 - \zeta^\nu)^\mu = \sum_{\nu=0}^{\ell-1} (1 - \zeta^\nu)^\mu = \sum_{\nu=0}^{\ell-1} \sum_{k=0}^{\mu} (-1)^k \binom{\mu}{k} \zeta^{\nu k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\mu} (-1)^k \binom{\mu}{k} \sum_{\nu=0}^{\ell-1} \zeta^{\nu k} = \ell, \text{ da } k \leq \mu \leq \ell - 1$$

Also sind die Ordnungszahlen der ersten $\ell - 1$ Glieder, vorweggenommen noch +++ $\sum_\mu$ folgende ℓ:

$$\geq e\ell, e\ell - h, e\ell - 2h, \ldots, e\ell - (\ell - 1)h, \text{ sämtlich } \geq e\ell - (\ell - 1)h = (\ell - 1)h'$$

und das schließt sich an die nach der ersterhaltenen Reihe folgende, allgemeingültige Fortsetzung $\mu h'$ an. Also sind alle Glieder in $\Big[\quad \Big]$ mindestens von der Ordnung $(\ell - 1)h'$ in $\mathfrak{L}$ und daher unter Berücksichtigung des Faktors $(1 - \sqrt[\ell]{\alpha})^{rt}$ in (13)

$$\overline{s}_r \geq rth + (\ell - 1)h' = rth + e\ell - (\ell - 1)h$$

Für den Übergang zu den G_r genügen die Newtonschen Formeln:

$$S_r - G_1 S_{r-1} + G_2 S_{r-2} - \cdots - (-1)^r G_{r-1} S_1 + (-1)^r r G_r = 0;$$

$$(r = 1, 2, \ldots, \ell - 1).$$

Wegen $S_1 = G_1$ gilt für $\overline{g}_1$ dieselbe unsere Schranke wie für $\overline{s}_1$. Sei schon bewiesen, daß für $\overline{g}_1, \ldots \overline{g}_{r-1}$ *dieselbe* untere Schranke gilt, wie für $\overline{s}_1, \ldots \overline{s}_{r-1}$, also auch

$$\overline{g}_\nu \geq \nu th + (\ell - 1)h'; \quad (\text{für } \nu = 1, 2, \ldots r - 1)$$

ist. Dann sind die Ordnungszahlen von $G_1 S_{r-1}, \ldots, G_{r-1} S_1$ sämtlich

$$\begin{aligned} &\geq \nu th + (\ell - 1)h' + (r - \nu)th + (\ell - 1)h' \\ &= rth + 2(\ell - 1)h' > rth + (\ell - 1)h' \end{aligned}$$

also, da auch die von S_r nach obigem $\geq rth + (\ell - 1)h'$ ist, und r prim zu ℓ ist, auch

$$\overline{g}_r \geq rth + (\ell - 1)h' = rth + e\ell - (\ell - 1)h = e\ell + [rt - (\ell - 1)]\, h$$

und somit

$$\overline{a}_r = rs\ell + \overline{g}_r \geq rs\ell + e\ell + [rt - (\ell - 1)]\, h$$

also

$$a_r = \frac{\overline{a}_r}{\ell} \geq rs + e + \frac{rt - (\ell - 1)}{\ell}\, h\,; \qquad (r = 1, 2, \ldots\, \ell - 1) \tag{1.14}$$

während für $r = 1$ und $\ell - 1$ genau nach (11) und (12)

$$a_1 = e + s \tag{1.15}$$

$$a_\ell = ht + \ell s \tag{1.16}$$

ist.

Die in (14) erhaltene Abschätzung genügt, um die beiden Gleichungen F und F in ganz genau demselben Wortlaut, wie früher zu beweisen. Infolge Fehlens des komplizierten +++ mit der Nebenbedingung und vor allem auch der lästigen eckigen Klammern $\left[\frac{\nu t}{\ell}\right]$, *die in (14) entbehrt werden kann*, (natürlich ist wegen der notwendigen Ganzzahligkeit von a_r sogar $a_r \geq rs + \ell + \left\{\frac{rt - (\ell - 1)}{\ell} h\right\}$, wo $\{\quad\}$ größtes ganzes "über" bedeutet), wird der Beweis der Hilfssätze noch nicht einfacher, als es schon war. Es genügen jedesmal 3 Zeilen Rechnung einfachster Art. Ich brauche das wohl nicht weiter mehr auszuführen.

Nun möchte ich Sie herzlich bitten, diese Überlegungen noch einmal ganz genau durchzugehen und zu prüfen, ob so alles in Ordnung ist. Ich habe seit der grausigen Entdeckung nun schreckliche Angst, daß noch ein Fehler an irgendeiner Stelle stecken könnte, obwohl ich alles mit größter Genauigkeit durchdacht habe. Man ist manchmal direkt blind für ganz elementare Fehler.

Was nun meine weitere Arbeit über "Zerlegungs– u. Vertauschungssatz und reduzierte Exponentialdarstellung des Hilbertschen Normenrestsymbols für Primteiler $\mathfrak{l}$ eines ungeraden ℓ" angeht, so ist diese dadurch auch gerettet. Ich stieß nämlich bei der genauen Ausarbeitung auf den Fehler in der früheren. Da darin der Satz über die Normenreste von komponierten Körpern vom Typus $(\ell, \ell, \dots \ell)$, also k ℓ–te Wurzeln adjungiert, vorkommt, das zu Ihrem allgemeinen Normenrestproblemin Beziehung steht, denke ich Ihnen einen Gefallen zu tun, wenn ich Ihnen nach Fertigstellung der Ausarbeitung mein sehr ordentlich abgefaßtes Reinkonzept sende, dann können Sie gleich Einblick tun, und meine Resultate, die ich Ihnen übrigens in großen Zügen schon in Marburg in halbfertigem Zustand mitteilte, genau kennen lernen. Die Reinschrift sende ich dann gleich an Crelle, da der Verlag mir immer mitteilt, daß er die Manuskripte zur Vorbereitung des Druckes, Abschätzung etc. rechtzeitig hätte. Darf ich diese Arbeit für das im Winter zum Druck kommende Doppelheft 3/4 von Bd. 153 vormerken ? — Gestern hatte ich Nachricht von Herrn Wilton (Adelaide, Australien)daß die bei uns noch lagernde Arbeit von 1914 inzwischen in ganz wenig veränderter Form gedruckt ist. Ich denke, wir wollen Sie dann nicht mehr drucken, obwohl er gegen einen Abdruck nichts einzuwenden hätte. Wir wollen doch lieber neue Sachen nehmen.

In meinem Brief vom Sonnabend vergaß ich noch zu sagen, daß ich nach meinen “überfliegenden ” Überlegungen das “allgemeinste Normenrestsymbol” für außerordentlich wertvoll halte. Ich glaube, daß eine ganz neue Sorte von Reziprozitätsgesetzen auf diese Weise erschlossen werden kann, von denen die bisherigen nur Spezialfälle sind. Als oberstes Ziel möchte ich den Nachweis von

$$\prod_{\mathfrak{P}} \left\{\frac{\gamma}{\mathfrak{P}}\right\} = 1$$

hinstellen, was dann das “allgemeinste”Reziprozitätsgesetz für beliebige Relativkörper darstellen würde. Durch Sätze über die Auswertung von $\left\{\frac{\gamma}{\mathfrak{P}}\right\}$ würden vermutlich Reziprozitätsgesetze über die m–ten Potenzreste (*beliebige* ganze Zahl), aber noch vielmehr, *nämlich Sätze über “nicht Galoissche Kongruenzreste”* folgen, die sich vermutlich in Reziprozitäten zwischen den Relativdiskriminanten äußern und womöglich zu schönen Diskriminantensätzen überhaupt führen. Diese Ziel ist aber noch in weiter Ferne. Denn dazu ist außer der Bestimmung des Symbols $\left\{\frac{\gamma}{\mathfrak{P}}\right\}$ noch ein *ganz entsprechendes Gebäude für* beliebige *Körper notwendig, wie das Hilbert–Furtwängler–Takagische für Abelsche Körper.*

Mit den herzlichsten Grüßen Ihr

Helmut Hasse.

1.15 26.05.1923, Hasse an Hensel

Kiel, den 26. Mai 1923.
Esmarchstraße $16^{\mathrm{I}}\ell$.

Sehr geehrter Herr Geheimrat!
Hochverehrte gnädige Frau!

Nehmen Sie unseren herzlichsten Dank für die wunderbare silberne Keksdose mit dem herrlichen Flieder darin, mit der Sie unsern Hochzeitsgabentisch so reich bedachten. Das prachtvolle Stück wird eine schöne Zierde unseres neugeschaffenen Heimes sein und soll uns stets an die von uns allen beiden so hoch verehrten Geber erinnern. Unser Hochzeitstag, den uns viele liebe Verwandte von mir und meiner Frau mitfeiern halfen, war ein wahrer Freudentag für uns, und wie wir von allen +++ hören, auch für unsere lieben Gäste. Die treue Liebe meiner Schwiegermutter hatte es auch in wundervoller Weise verstanden, alles trotz der heutigen schlimmen Zeit so feierlich und festlich zu gestalten, wie man sich nur denken kann. Eine besondere Freude war es uns, sehr verehrter Herr Geheimrat, Sie persönlich in den Reihen derer zu sehen, die unserer Trauung beiwohnten. Seien Sie für dies Zeichen Ihrer Zuneigung zu dem jungen Ehepaar Hasse noch ganz besonders bedankt. — Nachdem wir eine Woche lang bei nicht ganz wunschgemäßem Wetter uns Hamburg und Umgegend angesehen haben, sind wir nun seit Mittwoch in unserem neuen Heim in Kiel. Wir hatten das große Glück, eine sehr schöne Wohnung hier zu finden; in einer herrlichen, feinen Gegend Kiels gelegen, (dicht bei Töplitz' Wohnung), haben wir den hinteren Teil einer größeren Etage von einer alleinstehenden Dame gemietet. Es sind Wohn– und Schlafzimmer, Badestube und *eigene* Küche. Das ist doch wirklich alles, was man sich wünschen kann, und mehr Glück wie Verstand. Nun sind wir eifrig dabei, uns alles recht behaglich und schön einzurichten. Die Beschäftigung mit mathematischen Dingen will ich in diesem Sommer einmal auf ein Minimum reduzieren, um mich umsomehr meiner jungen Frau widmen und nach den arbeitsreichen letzten Jahren ordentlich erholen zu können. Daß ich hiermit auch einem von Ihnen so häufig geäußerten Wunsch entspreche, ist mir dabei eine besondere Beruhigung. Weiß ich doch so, daß Sie nicht von mir denken werden, ich würde unserer Wissenschaft im allgemeinen und den uns besonders interessierenden Dingen im besonderen untreu. Wenn ich dann Ende des Sommers nach Marburg komme, freue ich mich umsomehr, mit frischem und ausgeruhtem Kopfe an neue Probleme herangehen zu können, ganz besonders, wenn ich dann mit Ihnen, Herr Geheimrat, in gemeinsamer Arbeit Neues schaffen darf.

Nun seien Sie nochmals herzlich bedankt und gegrüßt von Ihrem Ihnen in aufrichtiger Verehrung zugetanen jungen Ehepaar

Hasse.

1.16 07.07.1923, Hasse an Hensel

Kiel, den 7. VII. 1923.

Sehr verehrter Herr Geheimrat!

Für Ihren lieben ausführlichen Brief meinen besten Dank. Ich habe mich sehr darüber gefreut, daß Sie an unserm schönen Glück so freundschaftlichen Anteil nehmen, und auch meine Frau läßt Ihnen für all' Ihre guten Wünsche und herzlichen Worte bestens danken. Ich habe mit der Antwort bis heute gewartet, damit ich Ihnen gleichzeitig meine zwei neuesten Arbeiten (im Konzept) beilegen kann. Sie sind Ihnen ja im Prinzip bekannt, da wir schon in den Osterferien kurz darüber sprachen, jedoch nahm die genaue Ausführung doch noch einige Zeit in Anspruch, besonders, da ich in diesem Sommer naturgemäß nicht so viel an die Arbeit komme. Bitte nehmen Sie es nicht übel, wenn ich Ihnen die noch etwas durchkorrigierten Konzepte sende. Ich möchte die Reinschriften gerne hierbehalten, da in ihnen noch dies und das zu ändern ist, was erst nach Besprechung mit Herrn Artin geschehen kann, der ja an der zweiten Arbeit bei einem Beweis auch beteiligt ist. Die erste der Arbeiten bringt die Fortsetzung zu meinen beiden früheren 1.) Über die Darstellbarkeit des *quadratischen* Normenrestsymbols durch (-1) hoch einer Bilinearform, 2.) Zerlegungs– und Vertauschungssatz, letztere sandte ich Ihnen ja im April schon. Die Hauptresultate sind:

1.) Das Hilbertsche Symbol $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right)$ ist durch seine "vorläufige Definition" 1 oder ζ und Zerlegungs– und Vertauschungssatz *eindeutig* bestimmt, bis auf die einmalige Auswahl von ζ.

2.) Die Auswahl von ζ hat auf Grund der Forderung $\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ zu geschehen. Diese Forderung *ist* nach Hilbert–Furtwängler mit allem bisherigen verträglich.(Hauptinhalt des Hilbert–Furtwänglerschen Reziprozitätsgesetzes.

3.) Auch für ungerades ℓ gilt eine Formel $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{L(x|y)}$ wo L auf eine sehr einfache Normalform gebracht werden kann.

Die zweite Arbeit bringt dann zum Abschluß der ganzen vorhergehenden Untersuchungen die Anwendung unserer Normenresttheorie auf die Reziprozitätsgesetze, die in ziemlich erheblichem Umfang über das bisher bekannte hinaus erweitert werden. Ich dachte über diese Arbeit im September dann einen kleinen Vortrag zu halten und habe deswegen schon an Bieberbach geschrieben. Hecke findet übrigens die Resultate über die Reziprozitätsgesetze sehr schön und interessant. Er kann sie selbst im einfachsten Falle ($\ell = 2$) mit seinen verallgemeinerten Gaussschen Summen und mittels Theta–Funktionen nicht bekommen, sondern erhält nur die trivialen *Vorzeichenfaktoren*, (nicht die *Spuren*).

Ihre Absicht, die algebraische Zahlentheorie in einem neuen Buche darzustellen, begrüße ich aufs lebhafteste. Tatsächlich existiert doch z. Zt. kaum ein vernünftiges Buch, namentlich über die Normenreste und Reziprozitätsgesetze. Der *Zahlbegriff* ist ja in dieser Hinsicht zu speziell, auch nicht schön genug dargestellt, *Weber* hat andere Tendenzen, *Hecke* geht, wie üblich, nur auf Spezialfälle ein ($\ell = 2$). Ich selbst habe mir daraufhin auch schon manches überlegt und finde, daß in ein solches Buch hinein müßte:

1.) Elementare Theorie der algebraischen Körper.
(Grundrichtung: Ihre Arbeit in der Zeitschrift)

2.) Theorie des Galoisschen Körpers
(Zerlegungs, Trägheits, Verzweigungsgruppen u. Körper)
Das läßt sich ja mit Ihren Methoden sehr schön einfach be–gründen

3.) Multiplikative Normalform

4.) Normenreste relativ–zyklischer Körper

5.) Reziprozitätsgesetze.

6.) Kreiskörper.

Ich habe namentlich über 5.) viel nachgedacht. Der Beweis der auch meinen Verallgemeinerungen zugrunde liegenden Hilbertschen Formel

$$\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = 1$$

ist ja, wie Ihnen bekannt ist, eine der schwierigsten Angelegenheiten. Es erfordert bisher in einfachster Aufmachung (neuste Arbeit von Takagi) folgende Gruppen von Hilfsmitteln

1.) Theorie der Einheiten.

2.) Theorie der Kongruenzstrahlenund allgemeinste Klasseneinteilung nach Weber.

3.) Theorie der ζ–Funktion und L–Reihen.

4.) Theorie des Galoisschen Körpers in obigem Umfang.

5.) Theorie der Abelschen Gruppen.

Ich weiß nicht, ob mit Einbeziehung aller dieser Dinge Ihr Buch nicht einen zu gewaltigen Umfang annehmen würde. Im höchsten Grade wünschenswert erscheint sie mir ja, da eben heute kein vernünftiges und sogar überhaupt kein Buch darüber vorliegt.

Als vollständig abgeschlossen möchte ich allerdings meine Untersuchungen über Normenresteund Reziprozitätsgesetze noch nicht bezeichnen. Gerade heute ist mir nämlich erneut die Möglichkeit etwas näher gerückt, vielleicht doch unmittelbar durch unsere Methoden auch das Hilbertsche Reziprozitätsgesetz $\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ direkt beweisen zu können. *) Auch bietet die Anwendung der Methoden und Ergebnisse auf den Kreiskörper, sowie auf Abelsche Körper noch ein reiches Feld meiner Betätigung.

Jedenfalls freue ich mich sehr, mich mit Ihnen recht ausführlich über Ihre Absichten zu unterhalten. Ich werde wahrscheinlich vom 1.–30. September in Marburg sein, sodaß sich dazu hoffentlich reichlich Zeit und Gelegenheit bietet. Sonst bleibe ich auch gern noch etwas länger. Auch über das von Ihnen begonnene neue Normenrestproblem habe ich mir ein paar Gedanken gemacht, in Verfolgung der Richtlinien, die ich Ihnen im April schrieb. Ich glaube, da ist noch viel zu machen und hoffe zuversichtlich, daß wir mit vereinter Kraft Schönes erreichen werden.

---

*) unter alleiniger Anwendung des Satzes von der arithmetischen Progression in algebraischen Körpern, in den dann eben alle transzendenten Hilfsmittel zusammengedrängt werden.

Wußten Sie übrigens schon, daß der große Fermatsche Satz mit der folgenden Behauptung identisch ist:

$$\int_0^{2\pi} \Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-u\nu^\ell} \cos\varphi\nu^\ell \Big)^3 d\varphi = 0 \qquad \text{für} \quad u > 0.$$

Gelingt es, diese Formel für *ein* $u > 0$ zu beweisen, so folgt elementar die Fermatsche Behauptung. Ich habe mir dies zum Anschluß an die Lektüre von Hardys Arbeiten über das Waringsche Problem zurechtgelegt. Anstelle von $e^{-u\nu^\ell}$ kann übrigens auch $\frac{1}{(\nu^\ell)!}$ oder auch $\frac{1}{\nu^{\ell\nu^\ell}}$ in das Integral gesetzt werden, da dies Glied lediglich die Rolle eines Konvergenz erzeugenden Faktors hat. Natürlich erfordert der Nachweis der Behauptung in dieser Form eine genaue Kenntnis der Verteilung der ℓ–ten Potenzen ν^ℓ mod. 2π. Diese hat man aber durch Hardy–Littlewood. Es erscheint mir daher nicht ausgeschlossen, auf diesem Wege durchzukommen, indem man etwa zeigt, für $u \longrightarrow 0$ konvergiert das Integral gegen einen endlichen Grenzwert $< \pi$ bis auf Fehler der Ordnung u, was genügen würde, oder entsprechendes für $u \longrightarrow \infty$.

Wir besprechen in unserem Seminar die Hardyschen Arbeiten sehr genau und haben viel Freude daran. —

Beiliegend erlaube ich mir die Porto–Abrechnung für Crelle für das erste Halbjahr 1923 einzufügen. Der Vorfall mit der Brandtschen Korrektur beruht auf einem bedauerlichen Mißverständnis, entstanden durch den Verlust einer Postsendung. Ich habe an ihn geschrieben und hoffe, daß die Sache durch eine Druckfehlerberichtigung im nächsten Heft in Ordnung zu bringen ist. Übrigens kann von “sinnentstellenden” Druckfehlern nicht die Rede sein, es waren nur einige formale Dinge, die auch keinem sehr auffallen, nicht richtig.

Ob Herrn Weyrichs Arbeitnoch in diesem Doppelheft Aufnahme finden kann, erscheint mir zweifelhaft, denn erstens ist der Rohdruck schon beendet und würde eine neue Arbeit, die erst jetzt kommt, erfahrungsgemäß den Termin des Erscheinens sehr hinausziehen, also jedenfalls sicher bis über Mitte September, zweitens liegen schon 132 Seiten vor und hat sich de Gruyterschon bei der Frage, ob die Kronecker Arbeitnoch dazu könnte, darin geäußert, daß dann eine andere entsprechenden Umfangs fallen müßte. Ich möchte also vorschlagen, Herrn Weyrichs Arbeit für Heft 3/4 vorzumerken.

Übrigens wäre es sehr wünschenswert, wenn unsere gemeinsame Annalen

Arbeit recht bald erschiene, da in dem demnächst erscheinenden Crelle 153 1/2 schon eine Anschluß–Arbeit von mir enthalten ist. Könnten Sie nicht Herrn Blumenthal um Beschleunigungmit dem Hinweis hierauf bitten ?

Herr Böhm arbeitet "praktisch" , ohne benachrichtigt zu sein, schon an diesem Doppelheft nicht mehr mit. Es geht sehr gut, sogar besser, d. h. schneller so. Mit vielen herzlichen Grüßen von Haus zu Haus Ihr sehr ergebener

Helmut Hasse.

1.17 24.07.1923, Hasse an Hensel, Postkarte

POSTKARTE
KIEL, DEN 24. VII. 23

Sehr verehrter Herr Geheimrat!

Für heute folgende kurze Mitteilung: Das allgemeinste Reziprozitätsgesetz im Kreiskörper $k(\zeta)$ lautet:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \zeta^{\varphi(\alpha,\beta)} \quad \text{wobei} \quad \varphi(\alpha,\beta) \equiv \sum_{\nu=1}^{\ell-1} \nu \cdot \frac{S(\zeta^{-\nu}\log\alpha)}{\ell} \cdot \frac{S(\zeta^{\nu}\log\alpha)}{\ell}$$

$$+S\left(\frac{\alpha-1}{\lambda}\right)\frac{N(\beta)-1}{\ell} - S\left(\frac{\beta-1}{\lambda}\right)\frac{N(\alpha)-1}{\ell} \quad \text{mod. } \ell$$

ist. Dabei ist $\alpha, \beta \equiv 1 \bmod \lambda$ $(\lambda = 1-\zeta)$ vorausgesetzt. In dem Exponenten treten die ℓ–adischen Logarithmen im Sinne Ihrer früheren Arbeit auf. Der zweite Ergänzungssatz heißt:

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) = \zeta^{-S\left(\frac{\log\alpha}{\lambda^{\ell}}\right)}; \quad \left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \zeta^{-S\left(\frac{\zeta\log\alpha}{\ell\lambda}\right)} \quad \text{für} \quad \alpha \equiv 1 \bmod \lambda.$$

Nun noch etwas sehr Schönes: Ich habe folgenden Satz bewiesen:
Die Gleichung $x^{\ell} + y^{\ell} + z^{\ell} = 0$ ist in drei ganzen, *zu* ℓ *primen*, rationalen Zahlen höchstens dann lösbar, wenn die $(\ell-3)$te Bernoullische Zahl einen durch ℓ teilbaren Zähler hat, also viel mehr, als Kummer in seiner letzten Arbeit hierzu. Auch kommen die bekannten Kriterien von Wieferich, Furtwängler, Mirimanoff sehr elegant heraus.
Methode: Reziprozitätsgesetz.

Beste Grüße auch von meiner Frau. Ihr ergebener

Helmut Hasse.

1.18 08.10.1923, Hensel an Hasse, Postkarte

Postkarte

Lieber Herr Doktor. Herzlichsten Dank für Ihre lieben Zeilen und Ihren schönen Vortrag, den ich nun noch gern ordentlich verstanden und genossen habe. *So* wird die Darstellung in unserem Buche prachtvoll gehen, so schön wie wohl sonst auf keine Weise, und das, was Ihnen noch fehlt wird sich in der Zwischenzeit sicher auch noch schön fügen. Ich bin jetzt ganz damit einverstanden, dass wir das Eingangsdatum der Crelle Arbeiten bis auf Weiteres heruntersetzen. Wir brauchen in nächster Zeit keine Sorge zu haben, jemand etwa zu verletzen.

Mein kleiner Zusatz zu unserer gemeinsamen Arbeit, auf den ich bei unserem letzten Zusammensein noch hinwies, und den ich jetzt zu Ende gedacht habe, bezieht sich auf Seite 16 zweite Hälfte hinter Formel (22) derselben, wo es sich darum handelt, zu dem Elemente $\eta_h = 1 + ??\,\lambda^{h_0}$ die zugehörige +++ Einseinheit $\eta_{h'} = 1 + u'\lambda^{h'}$ zu bestimmen.
Hier bestimmt sich der Grad h' aus $h + h' = \frac{e\,?}{Z-1} = Ze_0$. Aber etwas vor unserem gemeinsamen Zusammenarbeiten hatte ich auch schon für die Einheit u' die entsprechende Beziehung +++ höchst einfach abgeleitet, die aber damals eben nur bei jener Beschränkung $(h < (Z-1)e_0)$ galt, und ich die Untersuchung für $(Z-1)e_0 < h$ nur sehr unbequem führen konnte. Jetzt ist ja aber diese Schwierigkeit durch Sie behoben worden, und nun gilt mein Schluss ganz allgemein, und macht das so einfach, dass er schon hier in den folgenden Paar Zeilen hätte stehen können.
Etwa Fortsetzung am Ende von S. 16:

u' ist irgendeine von den $f-1$ Einheiten: $w_i^Z u^{Z-1} - w_i \omega^{g_0(Z-1)} = \frac{\omega^{Zg_0}}{u}\Big(\big(\frac{w_i u}{\omega^{g_0}}\big)^Z - \big(\frac{\omega_i u}{\omega^{g_0}}\big)\Big) = \frac{\omega^{Zg_0}}{u}\big(\xi_i^Z - \xi_i\big)$ für $\xi_i = \frac{w_i u}{\omega^{g_0}}$ $(i = 1, 2, \ldots, f-1)$.
+++ linear unabhängige Einheit. Also ist $u' = \frac{\omega^{Zg_0}}{u}\xi_0$, wo $s_k(\xi_0) = \xi_0 + \xi_0^2 + \cdots + \xi_0^{f-1} \not\equiv 0$ d. h. u' ist dadurch bestimmt, dass $s_k(\xi_0) = s_k\big(\frac{uu'}{\omega^{Zg_0}}\big) = s_k\big(\frac{(\eta_h-1)(\eta_{h'}-1)}{\lambda^{h+h'}\omega^{Zg_0}}\big) = s_k\big(\frac{(\eta_h-1)(\eta_{h'}-1)}{(\lambda^{?}\omega^{g_0})^Z}\big) = s_k\big(\frac{(\eta_h-1)(\eta_{h'}-1)}{\lambda_0}\big) \not\equiv 0 \pmod{\ell}$ ist, wo nach S. 3 $\lambda_0 = (-Z)^{\frac{Z}{?-1}}$ zu setzen ist.
Das ist Alles, es ist Ihnen wohl auch ganz bekannt, aber es ist doch schon an dieser Stelle so schön anzufügen, und das hat mich gefreut. —

Haben Sie noch vielen Dank für die Rankbank!! Hat sich jetzt noch etwas in Ihrer Theorie des Primideals geändert? Ich finde es bedenklich, dass +++ +++ eine Nähmaschine fehlen soll und wittere da eine Falle. Wir sind hier bei +++ +++ Wetter herrlich untergebracht (Heidelberg +++ +++ N$^{\underline{o}}$26$^{\underline{a}}$ bei Traumann und wollen uns noch 10 Tage erholen. Ich habe einen +++ +++ an Prof. +++ +++ +++, vielleicht +++ +++. Herzl. Gruss Ihr K. H.

1.19 14.10.1928, Hasse an Hensel, Postkarte

Postkarte

Halle, 14. X. 28.

Lieber Herr Geheimrat!

Besten Dank für Ihre Karte, aus der ich zu meiner Freude entnehme, daß Sie mit Frau Geheimrat ein so schönes Ferienende verlebt haben. Die kubischen Diskriminanten will ich nächste Woche angreifen. Z. Zt. schreibe ich auf Wunsch der Hamburger für deren Abhandlungen eine Reziprozitätsgesetznote.Dabei ist folgende ganz konkrete Frage von *fundamentaler Bedeutung.* Wenn ℓ eine ungerade Primzahl,

ζ eine ℓ–te Einheitswurzel und $\lambda = 1-\zeta$ ist, so schreiten bekanntlich die $\sqrt[\ell]{1-\lambda^\ell}$ und $\sqrt[\ell]{1+\ell\lambda}$ (überhaupt $\sqrt[\ell]{1-\lambda^c+\cdots}$) nach *ganzen* Potenzen von λ fort, wenn sie λ–adisch entwickelt werden. Dagegen kann ich bisher nicht entscheiden, ob dasselbe auch für die $\sqrt[\ell^n]{1-\lambda^\ell}, \ldots$ mit $n>1$ gilt, bezw. *wie die Einseinheit* $\eta = 1-\lambda^\ell+\cdots$ *beschaffen sein muß, damit* $\sqrt[\ell]{\eta}$ *nach ganzen Potenzen von* λ *fortschreitet.* (ζ und λ sollen dabei *genau dieselbe* Bedeutung haben, wie für $n = 1$, *nicht* etwa ζ eine ℓ^n–te Einheitswurzel)

Ich wäre Ihnen *sehr* dankbar, wenn Sie diese Frage beantworten könnten, was mir seit etwa einem Jahr trotz *heißer* Bemühungen nicht glücken will. —

Ich las, daß von Ihnen eine Note in einer Marburger Festschrift erschienen ist. Darf ich die Bitte um einen Sonderabdruck äußern?

Mit herzlichen Grüßen bin ich stets Ihr dankbar ergebener

H. Hasse.

1.20 21.10.1928, Hasse an Hensel

Halle, 21. Oktober 1928.

Lieber Herr Geheimrat!

Endlich kam ich dazu, Ihnen aufzuschreiben, wie sich meine damalige Frage mit der Diskriminantentheorie kubischer Körperin Beziehung setzen läßt. Hoffentlich sind Ihnen meine Ausführungen einigermaßen verständlich. Ich wußte nicht, wieviel ich aus der Klassenkörpertheorie voraussetzen konnte. Auf den Abschnitt 1. kommt es im übrigen weniger an, als auf Abschnitt 2.

Die eigentliche Frage nach der Anzahl der kubischen Körper gegebener Diskriminante habe ich auf die Bestimmung einer Anzahl N_0 der "durchweg" von Null verschiedenen Lösungen eines linearen Kongruenzensystems zurückgeführt.

Selbst wenn man diese Anzahl N_0 nach Ihrer Methode bestimmt, ist man aber noch nicht restlos glücklich. Denn um Ihre Methode anzusetzen, muß man erst einmal die fraglichen linearen Kongruenzen haben. Und darüber, wie diese bei gegebenem d und f aussehen, kann man leider gar keine allgemeine Aussage machen.

Meine Überlegungen, verbunden mit Ihrer Methode führen also zwar zu einer in jedem konkreten Falle brauchbaren Berechnungsvorschrift für die Anzahl N der kubischen Körper vorgegebener Diskriminante D, leider aber nicht darüber hinaus zu einer fertigen Formel, die N als Funktion von $D = df^2$ ausdrückt.

Ursprünglich wollte ich meine " kubischen" Überlegungen publizieren, bin jetzt aber ganz entschieden davon abgekommen. Meine jetzige nochmalige Durcharbeitung zeigte mir, daß die Dinge zum großen Teil, wenn auch in alter Sprache, bekannt sind, und daß sie vor allem auf Grund der Takagischen Theorie so einfach sind, daß man sie als Seminar– oder Staatsexamensarbeit stellen kann. Die wesentlichen Ergebnisse sind eben lediglich "Ausdeutungen" der Takagischen Sätze auf den kubischen Fall.

Über Verallgemeinerungen auf höhere Fälle will ich aber Dissertationen machen lassen, sodaß dann die Methode und die Resultate, als Spezialfälle dieser Dissertationen, später doch im Druck vorliegen werden.

Wir bekommen jetzt Herrn Dr. Baer als Ersatz für Dr. Bessel–Hagen hierher. Mit ihm zusammen habe ich eine kleine Arbeit über "Dimension bewerteter Körper" geschrieben, die ich sehr gern im Crelle–Journal publizieren würde, wenn Sie einverstanden damit sind.

Steinitz' Tod hat auch mich tief erschüttert. Er ist mir in der Kieler Zeit immer wie ein rührender Vater geworden. Seine große Crelle–Arbeit (137) alleine sichert ihm schon die Unsterblichkeit.

Mit den besten Grüßen von Haus zu Haus stets Ihr dankbar ergebener
H. Hasse.

1.21 08.03.1929, Hensel an Hasse, Fragment

REDAKTION DES JOURNALS
FÜR DIE
REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK
———x———

MARBURG A. D. LAHN d. 8. März 1929.
BREITEWEG 7.

Lieber Herr Professor.

Ich habe gerade in diesem Vierteljahr, wo ich Ihnen leider nicht schreiben konnte, so viel Ihrer gedacht und Sie hierher gewünscht, denn es waren so viele Fragen, über die ich besonders gern Ihren Rat und Ihre Ansicht gehört hätte.

Das für mich Interessanteste war ja, dass ich unmittelbar vor den Osterferien die Benachrichtigung erhielt, dass ich vom 1. April ab von meinen amtlichen Pflichten entbunden sei. Da ich ohne mein Zutun erfahren hatte, dass der Minister mich gern noch etwas länger im Amte haben wollte (was ich aber *nur* Ihnen sagen möchte), so hat er vielleicht diesen späten Termin gewählt, damit ich noch den Sommer meine Tätigkeit ausüben sollte; jedenfalls war es ganz unmöglich, für den 25. April bereits einen Nachfolger zu haben, und so wurde in der Fakultät beschlossen, dass in der ersten Sitzung nach den Ferien über die Nachfolgerfrage Beschluss gefasst werden sollte, und dass ich den Sommer noch mein Amt fortzuführen hätte. Das tue ich auch gern; im Winter darauf beabsichtige ich dann nicht zu lesen, sondern mit meiner Frau ein Land milden Winters aufzusuchen, worauf wir uns beide sehr freuen, und was wir uns durch ein tätiges akademisches Arbeitsleben seit 1887 verdient haben. Im Frühling, Sommer und Herbst wollen wir aber immer in unserem lieben Marburg weilen, und im Sommer würde ich ja sehr gern, solange ich kann, weiter lesen, im Winter aber wohl nicht.

Jetzt denken wir natürlich viel an meinen Nachfolger, und zu meiner grossen Freude bin ich mit Prof. Neumannbis jetzt wenigstens *vollkommen* einig. Ich möchte Ihnen da im tiefsten Vertrauen sagen, dass es mein grösster

Wunsch wäre, dass Sie mein Nachfolger würden, denn ich weiss Niemand, dem ich grösseres Vertrauen entgegenbringen würde, dass Sie als Gelehrter und als Lehrer eine Zierde unserer schönen Universität sein würde. Dass ich Sie dann noch für meine späteren Jahre in Marburg haben dürfte spielt ja für meine eigenen Wünsche eine grosse Rolle; aber diese Erwägungen müsste ich natürlich zurückdrängen, wenn ich nicht eben die Ueberzeugung hätte, dass wir für gerade diese Professur keine bessere Wahl treffen könnten. Ich freue mich herzlich, Ihnen sagen zu können, dass Prof. N. darin völlig mit mir übereinstimmt; so zweifle ich eigentlich nicht, dass wir in der Kommission und in der Fakultät durchdringen könnten. Aber nun ist die *eine* grosse Frage: Würden Sie gern nach Marburg gehen? Und die *andere* grosse Frage: Wird Sie jetzt endlich der Minister von Halle fortberufen, wenn wir Sie an bester Stelle vorschlagen? Schreiben Sie mir doch recht bald darüber ein Wort, und reden Sie *bitte* ausser mit Ihrer lieben Frau auf die Sie sich ja doch wohl vollständig verlassen können, *ja mit keinem Menschen* über diese Frage, denn dadurch kann gerade hier der allergrösste Schaden gestiftet werden.
Es wäre zu schön, wenn Sie ganz hierher kämen; Gott gebe, dass es +++.

Heute will ich Ihnen nur noch erzählen, dass ich am 6. April bei der Abelfeierin Oslo zum dortigen Ehrendoktor ernannt werden werde, was mich sehr erfreut hat. Nun leben Sie sehr wohl, lieber Freund, lassen Sie recht bald etwas +++ Hoffnungsweckendes von sich hören, und seien Sie Beide herzlichst gegrüsst von Ihrem

K. Hensel.

Ich schicke sehr bald ein grosses Packet Manuskripte für Crelle ich arbeite schon mit Gewalt an einer Fertigstellung
...

1.22 09.04.1929, Hasse an Hensel

Halle, den 9. April 1929.

Sehr verehrter, lieber Herr Geheimrat!

Nehmen Sie für Ihren freundlichen Kartengruß aus dem schönen Heidelberg recht herzlichen Dank. Hoffentlich können Sie jetzt, nachdem es wieder frühlingsmäßig warm draußen ist, noch eine Reihe erholsamer und friedliche Tage genießen, um sich dann mit frischen Kräften in Ihr letztes Vorlesungssemester begeben zu können. Welche Vorlesungen sind es, mit denen Sie den großen Reigen abschließen wollen? Sicherlich haben Sie doch ein zahlentheoretisches Thema gewählt?

Ich möchte Ihnen heute vor allem auf Ihren langen und ausführlichen Brief in Crelle–Angelegenheiten antworten, bin aber dabei in der glücklichen Lage, weder Ihnen besonders viel Mühe in Ihre Ferienreise zu werfen, noch mir selbst besonders viel Mühe machen zu müssen. Denn dank Ihrer vortrefflichen Vorbereitung hat sich fast alles ganz glatt erledigen lassen.

Über diejenigen Arbeiten, bei denen ich Ihrem bejahenden Votum ohne weiteres zustimmen konnte, brauche ich kein Wort zu verlieren *). Ich schicke sie alle in den nächsten Tagen nach Berlin, zur Seitenzahl–Abschätzung, und werde veranlassen, daß man Ihnen das Ergebnis mitteilt. Ich darf mir erlauben, diesen auch meine drei neuen Arbeiten gleich beizufügen, von denen ich Ihnen im vorigen Brief schrieb. Sie bilden einen zusammengehörigen Zyklus, und ich wäre daher dankbar, wenn sie alle drei, in drei aufeinanderfolgenden Heften des Journals Platz finden könnten. Die Titel lauten:

1. Neue Begründung und Verallgemeinerung der Theorie des Normenrestsymbols.
2. Die Normenresttheorie relativ-Abelscher Zahlkörper als Klassenkörpertheorie im Kleinen.

*) Soweit Sie noch nicht bestätigt hatten, habe ich die Autoren benachrichtigt.

3. Führer, Diskriminante und Verzweigungskörper relativ-Abelscher Zahlkörper.

Übrigens habe ich gleichzeitig noch zwei Arbeiten fertiggestellt, eine kleinere, über die Komposition Galoisscher und Abelscher Körper, und eine größere, über kubische Zahlkörper. Den Inhalt der letzteren kennen Sie bereits aus einem Briefe von mir. Im vorigen Herbst konnte ich mich nicht zur Publikation entschließen, möchte das aber jetzt doch tun, selbst wenn die Leistung mehr in einer systematischen Gesamtdarstellung als in den neuen Ergebnissen liegt. Da ich aber nun das Crellesche Journal soeben mit drei nicht gerade kurzen Abhandlungen "bestürmt" habe, und da ich vorhabe, diesen in nächster Zeit weitere, daran anschließende folgen zu lassen, außerdem auch noch einige zur komplexen Multiplikation in Fortsetzung meiner Festband–Arbeit —, da also das Crellesche Journal in so kurzer Zeit verhältnismäßig viel aus meiner Feder bekommen soll, so werden Sie es begreiflich finden, wenn ich die oben genannten beiden Abhandlungen an die Mathematische Zeitschrift eingereicht habe. Herrn Lichtenstein bin ich sowieso schon lange schuldig, mein Versprechen einzulösen und ihm etwas von mir zu schicken.

In der Arbeit über kubische Zahlkörper habe ich vorläufig noch keinerlei Ankündigung gemacht, daß Sie einen Satz über lineare Gleichungen beweisen können, mittels dessen meine Anzahlbestimmung ausführbar wird.Bei der Korrektur kann ich das immer noch nachholen. Ich hoffe, Sie inzwischen gesprochen zu haben, und insbesondere über diesen Punkt ausführlich mit Ihnen beraten zu haben.

Nun aber von meinen eigenen Angelegenheiten zurück zum Crelleschen Journal. Kritisch waren nur folgende fünf Fälle:

1.) **v. Görgey.** Hier habe ich Szegö befragt und die Antwort erhalten, daß es sich um eine einfache Übungsaufgabe handele, die nicht einmal interessant zu sein scheint. – Daher habe ich das Manuskript zurückgeschickt.

2.) **Semiganowski.** Hier konnte ich selbst erkennen, daß etwa das Gleiche gilt, und habe auch dieses Manuskript gleich zurückgeschickt.

3.) **Lubelski.** Hier habe ich Brandt befragt,nachdem ich selbst nach eingehender Prüfung zu einem ablehnenden Urteil gekommen war. Brandt schreibt mir wörtlich:

“ Die Arbeit des Herrn L. ist nach meiner Meinung in dieser Form *vorläufig unbrauchbar*. Es mögen hier ja ganz interessante Fragen angeschnitten sein. Um so mehr ist es notwendig, sie in allgemeinen Zusammenhang zu stellen. Wenn er es gewohnt ist, quadratische Formen in einer Weise zu behandeln, wie das *vor Legendre* üblich war, so ist das seine Sache. Wir sind jedenfalls gewohnt, die Fortschritte, die seitdem gemacht sind, beachtet zu sehen. Es ist dann aber nicht unsere Sache, aus diesem Gestrüpp herauszusuchen, worauf es ankommt, sondern das ist seine Sache. Es sieht aber so aus, als ob er von quadratischen Formen *keine Ahnung* hätte.Seine Probleme hängen doch aufs engste mit reduzierten Formen, ambigen Formen, Geschlechtern, Klassenzahlen, Komposition zusammen, und doch kommen alle diese Begriffe überhaupt nicht in der Arbeit vor. Dabei bezieht er sich noch immer auf Frobenius, dessen Arbeit, obschon sie nur mathématique amusante sein will, doch auf einem ganz anderen Niveau steht. ...... Ob seine Sätze und Beweise alle richtig sind, vermag ich beim besten Willen nicht zu sagen. Keinesfalls sind aber seine Beweise, selbst wenn man die *barbarische Form* mit in Kauf nimmt, ganz einwandfrei. Wie Sie auch bemerken, ist die Arbeit *gar nicht durchgearbeitet*. ...... Die Probleme sind ja keineswegs überwältigend, wenn sie auch in meiner Formulierung nach etwas aussehen. ...... ”

Doch nun genug. Ich glaube wohl das genügt, um Ihr ursprünglich zustimmendes Urteil einer Revision zu unterziehen. Ich wäre dafür die Arbeit “zur völligen Umarbeitung” zurückzuschicken. Wir können uns das umso eher leisten, als wir kürzlich eine andere Note dieses Autors zum Druck annahmen. Sie soll in Bd. 161 erscheinen.

4.) **Kawanko** (d. i. die durch Bohr eingesandte Arbeit)

5.) **Ambarzumian** Diese beiden Arbeiten [1] habe ich an Hellinger zur Begutachtung geschicktund warte noch auf Bescheid. Ich werde Ihnen seinerzeit noch darüber berichten.

[1] Dies bezieht sich auf **4.)** und **5.)**

Damit ist alles erledigt.

Mit herzlichen Grüßen an Sie und Frau Geheimrat, auch von meiner Frau, stets Ihr getreuer

H. Hasse.

1.23 12.04.1929, Hensel an Hasse

Montreux–Ferritet Hotel Bristol
d. 12. April 1929.

Lieber Herr Professor.

Herzlichsten Dank für Ihren lieben Brief, der heute in meine Hände kam, und dafür, dass Sie die Crellefragen so schnell und schön erledigt haben. Dass wir 3 Abhandlungen von Ihnen und besonders auch solche, welche mich so sehr interessieren demnächst veröffentlichen sollen, ist mir dabei eine ganz besondere Freude. Auch auf die beiden weiteren Arbeiten freue ich mich sehr. Es ist auch sehr interessant, wenn die über die kubischen Zahlkörper doch veröffentlicht wird.Meine Ergebnisse über die linearen Gleichungen möchte ich dann auch in einer ganz kleinen Note veröffentlichen, weil mir die da auftretende und notwendig gebrauchte Aequivalenzdefinition solcher Systeme, welche *nicht* symmetrisch in bezug auf vordere und hintere Multiplikatoren ist, und also nicht auf Elementarteilerrelationen sich zurückführen lässt, interessant gewesen ist. Inzwischen habe ich auch meine Arbeit für 161^{III} grossenteils ganz umgearbeitet, wobei ich Ihre damaligen Wünsche genau überdacht und wie mir scheint ganz erfüllt habe; sie ist schon bei der de Gruyter; ich wäre sehr dankbar, wenn Sie die Vorrede und den letzten Abschnitt derselben, welche eben ganz umgearbeitet sind, und auch das Ende von Abschnitt II, wo ich den Fall $\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}^{\infty}$ aber jetzt wohl in völlig bedenkenfreier Weise zu erledigen glaube, noch einmal kurz ansehen wollten; ich habe an diesen Ueberlegungen viel Vergnügen gehabt. — Mit Ihrer Erledigung der Arbeit Lubelskibin ich völlig einverstanden. Ihm bleibt ja dann die Möglichkeit, seine Arbeit völlig umzuarbeiten, wenn er das Wertvolle an ihr retten will.

Ich bin Ihnen sehr dankbar, wenn Sie ihm also seine Arbeit zu völliger Umarbeitung zurücksenden wollen. Ich bin sehr gespannt, was Hellingerzur Arbeit Kowankoschreiben wird.

Nun möchte ich Ihnen im strengsten Vertrauen (auch vielleicht vorläufig Prof. Neumann gegenüber) etwasvon unseren Plänen für meine Nachfolge erzählen, und Sie, falls Sie dies tun wollen, auch um Ihren Rat bitten. Ich möchte da gleich meinen Kollegen Neumann sehr loben, denn er hat sich bis jetzt in dieser so wichtigen Angelegenheit durchaus sachlich und sehr einsichtig benommen. Er war vollkommen meiner Ansicht, dass auf diese Stelle notwendig ein sehr guter Arithmetiker und Algebraiker gehört, nicht etwa ein rein analytisch eingestellter Gelehrter, da sonst die Arithmetik und Algebra in Marburg glatt ausfallen würde, während die Analysis dreifach besetzt wäre. Wir waren uns auch darin einig, dass wir die allerbesten Männer in diesem Gebiete vorschlagen müssten, die neben ihrer wissenschaftlichen Bedeutung auch hervorragend gute und anregende Dozenten sein müssten.

Das Schwierige ist dabei nur diese rarissimae aves richtig festzulegen. Dass wir Sie an erster Stelle vorschlagen und besonderen Nachdruck auf unseren lebhaften Wunsch legen wollen, gerade Sie zu gewinnen, habe ich Ihnen ja schon angedeutet. Ich hoffe auch dass wir dies so überzeugend werden machen können, dass das Ministerium uns beipflichtet. Ich nehme auch an, dass unser vorzüglicher Kurator auf meine Bitte eingehen und gerade Ihre Wahl vielleicht besonders befürworten wird.

Jedenfalls müssen wir aber die beiden anderen Vorschläge so machen, dass auch für sie die oben gestellten Anforderungen möglichst erfüllt sind. Ich hatte nun eine längere Liste bereits gemacht, und sie schon mit Prof. Neumann durchgesprochen. Da blieben dann hauptsächlich als in Frage ko$\overline{m}$end

Haupt für die zweite Stelle.
Schmeidler für die dritte Stelle.

Bei *Haupt* hat mich besonders seine neue Algebra beeinflusst, welche mich sehr interessiert hat, und die mir als eine beträchtliche algebraisch–arithmetische Leistung erscheint, wenn sie auch ohne Steinitzund ohne Sie ganz undenkbar ist. Ich hätte ihm dieses Buch eigentlich vorher garnicht zugetraut. Ich glaube, er ist auch ein klarer und beliebter Dozent. Auch persönlich stelle ich ihn als Charakter hoch, und glaube, man könnte ihn gut an zweiter Stelle nennen und +++.

Auch Schmeidlers Arbeitsrichtung erscheint mir sehr wertvoll, seine Arbeiten haben mich zum Teil lebhaft interessiert, aber — ich kenne ihn wenig persönlich, ich weiss wenig über seine akademischen Erfolge, und so bin ich da etwas im Zweifel.

Da wollte ich Sie nun zunächst fragen, was Sie von diesen beiden Herren und von ihrer Eignung für diese Stelle halten, und ob Sie mir, falls Sie diese Nennung günstig beurteilen sollten, mir besonders über Herren Schmeidler möglichst viel aus Ihrer Kenntniss seiner Arbeiten, seiner akademischen Tätigkeit und seiner Persönlichkeit mitteilen könnten. Das würde mich zu grossem Danke verpflichten, und mir die Sache ausserordentlich erleichtern.

Ich hatte ausser diesen Namen auch an Kamke,Krull, v. Neumann, Prüfer, Rademacher und Schreier gedacht,aber nun schienen doch die beiden zuerst genannten am meisten in Betracht zu kommen.

Wenn Sie nun vielleicht noch einen anderen Namen für noch geeigneter halten sollten, und mir Beweismaterial dafür angeben könnten, so wäre ich Ihnen furchtbar dankbar dafür und würde es sicher nach besten Kräften benutzen.

Fränkelkommt ja jetzt natürlich nicht in Betracht, denn wir können die Stelle doch nicht so lange verwaist lassen, bis er aus Jerusalem zurückkom̄t. Ausserdem ist Neumann seine ausschliessliche wissenschaftliche Einstellung auf die Mengenlehre doch nicht voll sympathisch. Das spricht übrigens auch gegen Herrn von Neumann, wenn dieser auch m. E. ungewöhnlich tief und vielseitig in seinen eigenen Gedanken ist.

Seien Sie mir nicht böse, lieber Herr Hasse, dass ich Sie mit diesen Dingen belästige, aber sie liegen mir so sehr am Herzen, und ich schätze Ihr Urteil so hoch, dass ich mich Ihnen und im Wesentlichen Ihnen allein anvertrauen möchte. Wenn Sie mir möglichst bald noch hierher (Hotel Bristol) eine Antwort senden könnten, täten Sie mir einen grossen Gefallen.

Herzlichste Grüße Ihnen Beiden auch von meiner Frau
stets Ihr

K. Hensel.

1.24 16.04.1929, Hasse an Hensel

Halle, 16. 4. 29.

Lieber Herr Geheimrat!

Durch Ihren Brief bringen Sie mir ein so hohes Vertrauen entgegen, daß ich Ihnen von ganzem Herzen dafür dankbar sein muß. Zugleich aber ist die Lage, in die ich dadurch komme eine so ungewöhnliche, daß es mir sehr schwer wird, den rechten Weg und die rechten Worte für die Antwort an Sie zu finden.

Ich habe mir gestern und heute überlegt, ob es nicht richtiger wäre, ich enthielte mich in diesem Falle jeder Äußerung. Aber Ihre Bitte kommt so eindringlich und vertrauensvoll, daß ich Ihnen nicht den Schmerz einer völligen Nichterfüllung bereiten kann, zumal ich in genau derselben Situation Herrn Fraenkelseinerzeit die gleiche Bitte erfüllt habe. Da bin ich nun zu dem Entschluß gekommen, Ihnen wenigstens einige meiner Ansichten zu unterbreiten. Allerdings möchte ich Sie sehr bitten, es doch in keinem Falle bei diesen *meinen* Ausführungen bewenden zu lassen. Vielmehr scheint es mir unbedingt geboten, daß Sie sich diese von *anderer* Seite bestätigen oder berichtigen lassen. Und da gerade Herr Fraenkel seinerzeit ein so umfangreiches Auskünfte–Material gesammelt hat, darunter auch die Namen, die Sie nennen, und die ich noch nennen werde, so möchte ich Ihnen eigentlich angelegentlichst empfehlen, sich von Herrn Fraenkel die Briefe oder Auszüge daraus zu besorgen. Sicherlich tut er das sehr gerne. Verzeihen Sie, wenn ich Ihnen diesen Vorschlag in so dringlicher Form mache. Aber ich finde wirklich, das er im gegenwärtigen Falle unbedingt nötig ist, um einen naturgemäß einseitigen und nachher vielleicht falsch auszulegende Einfluß meinerseits in den richtigen Grenzen zu halten.

Ihr Vorschlag *Haupt*scheint mir in jeder Beziehung gerechtfertigt. Seine eben erschienene Algebra habe ich vollständig und genau gelesen. Sie ist wissenschaftlich wie didaktisch ein Glanzstück, das ihn mit seinen Arbeiten zusammen in die Reihe der besten unserer Algebraiker stellt. Über seine Lehrtätigkeit weiß ich nur Gutes, durch F. K. Schmidt, den dortigen Assistenten,mit dem ich ein eingehendes Gespräch über Haupt hatte. Auch persönlich habe ich von ihm nur den allerbesten Eindruck. Ihn für Marburg zu bekommen, wäre ein schöner Erfolg für Marburg.

Leider kann ich zu *Schmeidler*Ihnen nicht ebenso vollständig und unbedingt schreiben. Ich kenne ihn zwar persönlich und verehre in ihm meinen Lehrer, der mich in Göttingen erstmalig in die Algebra einführte. Diese Vorlesung war sehr gut. Er selbst ist mir als ein angenehmer Mensch von hochanständigem und ehrenwertem Charakter bekannt, und das Echo das ich — als sein Nachfolger in Kiel — von ihm dort zu Ohren bekam, war ein lange nachhallendes, volltönendes und gutklingendes. Leider kann ich aber über seine wissenschaftlichen Arbeiten und Ansichten hier nichts Positives sagen, da ich sie bisher nur überfliegen, nicht studieren konnte. Die Dinge, die er treibt, liegen mir ferner. Infolge einer +++ +++ Andeutung, die mir Fraenkel damals machte, möchte ich gerade zu diesem Punkte bitten, daß Sie Fraenkels Urteil einholen. Sonst kommt zur Beurteilung vor allem Emmy Noetherin Frage, die wohl inzwischen aus Moskau zurück sein wird. Ich möchte *sehr* empfehlen, davon Gebrauch zu machen. Sie ist, neben Ihnen und vielleicht Haupt +++ eine der wenigen, die Schmeidler's Arbeiten so recht aus der Tiefe würdigen kann, weil sie selbst von diesem Arbeitsgebiet ausgegangen ist.

Nun möchte ich aber doch sagen, daß ich *Krull*für fraglos von größerem Format halte als Schmeidler, übrigens auch als Haupt. Krull ist wohl neben der Emmy Noether der genialste, erfolgreichste und zukunftsvollste unter unseren heutigen jüngeren Algebraikern. Als Lehrer ist er, wie ich weiß und von vielen Seiten bestätigt höre, in ganz ungewöhnlich hohem Maße geschickt und anregend. Ich weiß nur nicht, ob Sie ihn schon jetzt wieder dort fortholen sollen, wo er doch erst eben hinberufen ist. Ich muß übrigens gestehen, daß — wenn es mir schon beschämend ist, der Person Haupt und Schmeidler als Jüngerer vorangestellt zu werden — ich das gleiche bei Krull, obwohl *er* der Jüngere ist, als absolut ungerechtfertigt bezeichnen müßte.

Auch Herr *v. Neumann*scheint mir von gleichem, wenn nicht noch höheren Format zu sein. Allerdings halte ich es für zweifelhaft, ob er sich in der Hauptsache der Algebra und Zahlentheorie widmen wird, wie Sie es gerne sehen würden. Seine eigentlichen Interessen liegen doch auf axiomatischem Gebiet.

Herrn *Kamke*kenne ich zu wenig, um etwas sagen zu können. Jedenfalls ist er doch kein Algebraiker oder Zahlentheoretiker.

Herr *Rademacher*Breslau ist ein Zahlentheoretiker von feinen Qualitäten und als Dozent ungemein geschickt und fruchtbar. Er ist mein getreuer Kamerad auf den beiden Kieler Listen gewesen. Es fällt mir sehr schwer, ihn gegen die zuerst besprochenen Algebraiker abzuwägen, doch ist das ja nicht meine Aufgabe. Als Mensch ist er von edelstem Charakter und bei jedem, der ihm nähersteht, hochbeliebt.

Herr *Schreier*ist einer unserer besten Gruppentheoretiker. Seine Arbeiten habe ich ganz genau gelesen und halte *sehr* viel davon. Über seine Lehrtätigkeit weiß ich wenig, die beginnt ja jetzt erst eigentlich; aber nach seinen Vorträgen zu urteilen, muß er alles ganz glänzend klarmachen können.

Herr *Prüfer*ist ein sehr tiefgründiger und gründlicher Mathematiker. Wir hatten ihn seinerzeit mit Krull zusammen hier als Extraordinarius vorgeschlagen (die Stelle, die nachher in einen Lehrauftrag umgewandelt wurde). Nun hat aber seine Produktivität seit drei Jahren aufgehört. Er sitzt, wie ich von ihm weiß, an Grundlagenfragen und hofft, eine neuartige Begründung und Weiterbildung der HilbertschenWiderspruchfreiheitsbeweise geben zu können. Aber es ist bis jetzt nichts Positives da.
Seine damaligen Arbeiten über Abelsche Gruppen sind erstklassig.

Nun möchte ich aber von mir aus noch zwei Lanzen brechen.

Erstens nämlich für *Brandt.*Das ist doch auch ein Zahlentheoretiker und Algebraiker der es durchaus verdient, mit Haupt, Schmeidler, Rademacher in einer Linie genannt zu werden. Vielleicht entsinnen Sie sich noch, was ich Ihnen bei einer Marburger Unterredung über seine neuesten, geradezu bahnbrechenden Arbeiten erzählte. Ausgehend von den Quaternionen (in Gestalt der quaternären, quadratischen Formen)machte er plötzlich *die* Entdeckung, die bisher noch fehlte, um eine vernünftige Zahlentheorie bei nicht–kommutativer Multiplikation durchzuführen, und nun ist unter seinen Händen eine ebenso schöne und erfolgreiche Zahlentheorie der hyperkomplexen Zahlen entstanden, wie es die algebraische Zahlentheorie ist. Daß Artin dieselbeTheorie, nachdem er Kenntnis von Brandts Idee bekommen hatte, gleichzeitig fand und eher in endgültiger Form veröffentlichte, kann natürlich Brandt's Leistung und seine Ansprüche auf Priorität der Idee nicht beeinträchtigen. Nun muß ich zudem sagen, daß allem Anschein nach die hyperkomplexe Zahlentheorie *das* große Zukunftsfeld ist, auf dem sich die kommende Generation betätigen wird. Alles dies läßt es gerechtfertigt erscheinen, daß man den Namen Brandt in allerernsteste Erwägung zieht. Wie ich persönlich weiß ist Brandt nicht sehr glücklich in der "technischen" Luft und würde sich gerne von dort trennen, um an einer anregenderen Wirkungsstätte mehr Zeit und Kraft zu haben, sich seinen Lieblingsinteressen, den hyperkomplexen Zahlen u. a. zu widmen. Als Mensch ist Brandt mir *sehr* sympathisch, und ich glaube auch, daß er ein guter Lehrer ist, den seine Studenten sehr schätzen. Seine Tagungsvorträge sind mir als gut durchdacht und hochinteressant bekannt.

Und zweitens für unseren hiesigen Privatdozenten *Baer*.Er ist vor allem algebraisch interessiert, aber auch axiomatisch, mengentheoretisch, topologisch und funktionentheoretisch. Auf allen Gebieten har er bereits schöne und zum Teil erstklassige Arbeiten publiziert. Ganz besonders gilt das von seinen Arbeiten zur Algebra und Gruppentheorie. Hier hat er sich, angeregt durch die Freiburger algebraische Schule Krull–Loewy, vor allem mit dem Gruppoidbegriff und seiner Auswirkung in der Galoisschen Theorie beschäftigt. Ferner hat er, in *höchst origineller* Weise, die Topologie auf die Algebra angewandt und auf diese Weise sehr interessante Sätze über Körper und Gruppen bewiesen. Dies neuartige Gebiet, das ganz unter seinen Händen entstanden ist, scheint mir sehr zukunftsreich zu sein. Nähert sich doch auf der anderen Seite die Topologie immer mehr den Methoden und auch Sätzen der abstrakten Algebra an, sodaß die Synthese beider Gebiete heute ein vor der Verwirklichung stehendes Programm ist.
Dazu hat Herr Baer schon schöne Beiträge geliefert und wird es, so hoffe ich als einer der wenigen gründlichen Kenner *beider* Gebiete, auch des weiteren tun. Seine Lehrtätigkeit hat er hier, soviel sich bis jetzt sagen läßt, mit gutem Erfolg begonnen. Allerdings ist ja Herr Baer erst seit einem Jahr habilitiert. Immerhin wäre es durchaus ungerechtfertigt, ihn neben Schreier, Prüfer ganz zu verschweigen.

Allen, die ich nannte voran, muß ich übrigens *Artin* nennen,den ich für einen der genialsten derzeit bekannten Mathematiker überhaupt halte, und auf den das, was ich über Krull und v. Neumann schrieb, ganz sicher in der Potenz zutrifft. Und ebenso *Siegel.* Aber ich kann verstehen, daß weder der eine noch der andere Ihnen in Frage zu kommen scheint, ganz abgesehen davon, daß bei allen beiden die Antwort hochwahrscheinlich "nein" sein würde.

Nun sind meine Ausführungen unter der Hand doch breiter geworden, als ich es ursprünglich beabsichtigte, und ich habe manches gesagt, was ich vielleicht lieber ungesagt gelassen hätte. Da ich mich aber bemüht habe, jedem so weit ich in der Lage bin gerecht zu werden, so brauche ich nicht zu fürchten, die Situation, in der ich selbst mich hierbei befinde, in unerlaubter Weise ausgenutzt zu haben. Der Zweck dieses Briefes ist erfüllt, wenn er Ihren Wunsch erfüllt und Ihnen diesen oder jenen neuen Gesichtspunkt geliefert hat.

Besten Dank für Ihre freundlichen Worte über meine Arbeiten. Ich schreibe jetzt fleißig an meinem Bericht über das Reziprozitätsgesetz,den ich nun auf ganz neue Grundlagen stellen mußte.

Ihre Korrektur will ich gerne noch einmal überlesen. Ich sende Ihnen dann ein Examplar.

Ihre Veröffentlichung über lineare Gleichungen mit lauter von Null verschiedenen Lösungen würde ich natürlich lebhaft begrüßen.

Ihnen und Frau Geheimrat sende ich, auch von meiner Frau, die besten Wünsche und Grüße in Ihren schönen Ferienaufenthalt.
Ist es nicht merkwürdig, daß unsere Hausgenossen (Professor Diehl),genau in Ihrem dortigen Hotel wohnten (vor etwa 3 Wochen), und unsere besten hiesigen Freunde waren auch dort in einem anderen Hotel.

In steter Verehrung und Dankbarkeit
Ihr H. Hasse.

1.25 02.05.1929, Hensel an Hasse

<table>
<tr>
<td>REDAKTION DES JOURNALS
FÜR DIE
REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK
——x——</td>
<td>MARBURG A. D. LAHN
BREITEWEG 7.</td>
<td>d. 2. Mai 1929.</td>
</tr>
</table>

Lieber Herr Professor.

Ich danke Ihnen vielmals dafür dass Sie meine Bitte so schön und liebenswürdig erfüllt haben. Ihre Anregungen sind für mich vom allergrössten Werte und werden meine schwierige Aufgabe jetzt sehr erleichtern. Ich habe auch von Fränkeleinen sehr aufschlussreichen Brief erhalten, der manches Wichtige enthält. Ich schreibe Ihnen später wohl noch mehr davon, wenn wir erst weiter sind. Herr Fränkel schrieb so *sehr* begeistert von van der Waerden.Ich weiss von ihm gerade leider sehr wenig. Stellen Sie ihn auch als Forscher und Lehrer so ungeheuer hoch ?

Nun muss ich Ihnen zweitens herzlich für die Durchsicht meiner kleinen Arbeit und für Ihre mir sehr interessanten Bemerkungen dran danken, von denen ich den Satz zu der Einleitung mit Dank in diese aufnehmen möchte.

Dass ich mich in Fahne 5 so wenig deutlich ausgedrückt habe, dass Sie die betreffende Stelle "*sehr* schwer finden, und sie ohne nähere Erläuterung nicht verstehen" können, tut mir sehr leid, und ich werde da noch einen Satz hinzufügen, wodurch das dort Angeführte *ganz* deutlich wird. Erlauben Sie mir, dass ich Ihnen diese Stelle noch kurz ausführe:

Ich hatte gezeigt, dass wenn

$$A = (h_1 \dots h_k \dots h_n) \qquad \beta = (\mathfrak{p})_k A = (h_1 \dots \mathfrak{p} h_k \dots h_n)$$

ist, dass dann A und B entweder äquivalent

9) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \mathfrak{p}a_1 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$

oder äquivalent

$$9^a) \qquad \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & (\mathfrak{p})'_{k'} A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{sind.}$$

je nachdem das kleinste Element von A *nur* in h_k auftritt oder nicht.

Ich fügte nun hinzu: Ist das aus den $n-1$ Horizontalreihen $(h_1 \dots h_{k-1} h_{k+1} \dots h_n)$ gebildete System äquivalent dem normalen Diagonalsystem $(a_1 \dots a_\nu 0 \dots 0)$, ist also a_ν sein letzter von Null verschiedener Elementarteiler und ist der Divisor von h_k gleich oder grösser als +++ $\mathfrak{p} a_\nu$, so tritt bei der obigen successiven Ueberführung von A und B in die ihnen äquivalenten normalen Diagonalsysteme *immer* die *zweite* Eventualität (9^a) auf, und hier fanden Sie die Schwierigkeit.

Ist aber diese Voraussetzung erfüllt, so ist zunächst das kleinste Element a_1 *nicht* in h_k enthalten (oder wenigstens nicht allein). Also tritt hier *zuerst* die Eventualität (9^a) auf, und wir erhalten zuerst

$$10) \qquad A \sim \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \qquad \beta \sim \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & (\mathfrak{p})'_{k'} A_{22} \end{pmatrix}$$

Bei den hierzu nötigen Umformungen werden aber die Horizontalreihen $(h_1 \dots h_{k-1} h_{k+1} \dots h_n)$ *nur in sich* umgeformt, sie bleiben also äquivalent dem normalen Diagonalsystem $(a_1 a_2 \dots a_\nu 0 \dots 0)$. Also ist nach Weglassung des Randes $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$ das in A_{22} nach Weglassung von $h_{k'}$ bleibende System äquivalent $(a_2 \dots a_\nu 0 \dots 0)$.

Ferner wird durch die obigen Elementartransformationen welche zu (10) führten die Zeile $h_{k'}$ nur so verändert, dass ihre Elemente ganzzahlig mit einander verbunden werden, und dass ihr erstes Element zu Null gemacht wird; dadurch wird aber der Divisor von $h_{k'}$ *höchstens vergrössert.*

Also wird auch bei dem Systeme A_{22} der $(n-1)$ Ordnung wieder der Teiler von $h_{k'}$ gleich oder grösser sein als der letzte Elementarteiler a_ν von dem Systeme $(h_2 \dots h_{k'-1} h_{k'+1} \dots h_n) \sim (a_2 \dots a_\nu)$

Also tritt bei der Umformung von A_{22} wieder die *zweite* Event (9^a) auf +++ und damit ist der Beweis vollständig erbracht.

Ich wäre Ihnen sehr dankbar, wenn Sie mir möglichst schnell eine Karte schicken könnten, ob nun Ihr Bedenken *vollständig* behoben ist. Ich möchte nämlich nun schnellstens an dieser Stelle ein Paar kurze Sätze in diesem Sinne zum vollen Verständnis einschalten, und ich muss doch jetzt dringend und schnellstens die Korrektur zurücksenden, damit nun keine Verzögerung mehr eintritt.

Ich sitze jetzt tief in dem Beginn der neuen Vorlesungen, die sehr +++voll beginnen (Diff.–Rechn. ca. 180, Zahlentheorie ca. 130). Wir werden ja auch voraussichtlich dieses Mal auf 4000 Studenten kommen.

Unsere Reise war zwar nicht so sehr vom Wetter begünstigt, aber doch ganz wunderschön und herrlich erholsam. Hoffentlich geht diese Erholung nicht zu schnell fort, wozu einige Möglichkeit vorliegt. Dass mein Sohn einen Ruf als Ordinarius nach meiner alten Heimat Königsberg erhalten hat und hoffentlich hingeht, haben Sie vielleicht schon gehört. Wir freuen uns *sehr*.

Herzlichsten Gruss Ihres

K. Hensel.

1.26 04.05.1929, Hasse an Hensel, Fragment

Mathematisches Seminar
der Universitaet Halle.

Halle (Saale), den 4 Mai 19 29
An der Universitaet 9.

Lieber Herr Geheimrat!

Ihren liebenswürdigen Brief, den ich heute früh erhielt, will ich sogleich beantworten.

Ich freue mich, daß ich Ihnen mit meinen Anregungen dienlich sein konnte. Daß Herr FraenkelIhnen auch ausführlich schrieb, ist mir sehr beruhigend. Er hat eine umfassende Kenntnis und auch einen guten Blick für die Menschen.

Sie fragen nun noch nach v. d. Waerden.Dieser junge holländische Mathematiker ist mir wohl bekannt, und ich liebe und schätze ihn sehr. Sein Alter ist im Jahresbericht nicht angegeben, es ist aber jedenfalls das einzige was an ihm als *sehr geringwertig* zu bezeichnen ist. Er ist ein überaus gescheiter Kopf, der bereits eine große Zahl schöner, grundlegender und wertvoller Arbeiten auf abstrakt–algebraischem Gebiet aufzuweisen hat, ein glänzender Vortragender und ein äußerst liebenswürdiger Charakter. Sicherlich ist Ihnen bekannt, daß er vor nicht allzulanger Zeit in Rostock (mit Krull und Schreier zusammen) genannt war, dann aber ein Angebot in Groningen annahm, ich weiß nicht ob als Ordinarius oder Extraordinarius. Ich trage kein Bedenken, v. d. Waerden mit Krull in eine Linie zu stellen.

Nun möchte ich nochmals auf Ihre Crelle–Arbeit zurückkommen. Die Zusätze, die Sie mir jetzt schrieben, dienen in der Tat dazu, die fragliche Stelle verständlicher zu gestalten. Ich sehe jetzt, wie der Schluß zustandekommt. Nur eine Kleinigkeit sehe ich im Moment nicht ein. Mir liegt aber nur Ihr Brief, nicht mehr der Korrekturabzug vor, sodaß es gut möglich ist, daß meine Unklarheit sich durch das in der Arbeit vorangegangene erledigt. Ich meine folgendes:

Sie schließen zunächst, daß unter der fraglichen Voraussetzung über h_k gilt:

$$A \sim \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \qquad B \sim \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & (\mathfrak{p})'_{k'} A_{22} \end{pmatrix} ,$$

ferner, daß hierbei die Horizontalreihen $h_1 \ldots h_{k'-1}\ h_{k'+1} \ldots h_n$ wieder dem normalen Diagonalsystem $(a_1 \ldots a_\nu\, 0 \ldots 0)$ äquivalent sind. Dann fahren Sie fort: "Also ist nach Weglassung des Randes $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$ das in A_{22} nach Weglassung von $h_{k'}$ bleibende System äquivalent $(a_2 \ldots a_\nu\, 0 \ldots 0)$." Ich sehe das nicht recht ein. Aus einer Beziehung:

$$P \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} Q \;=\; \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & A_{22}^{\#} \end{pmatrix}$$

kann doch auf

$$P_0 A_{22} Q_0 \;=\; A_{22}^{\#}$$

so ohne weiteres nur dann geschlossen werden, wenn P und Q vom Typus

$$P \;=\; \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & P_0 \end{pmatrix} \qquad Q \;=\; \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & Q_0 \end{pmatrix}$$

sind. Folgt das hier aus dem Vorhergehenden? Oder wird der früher bewiesene Satz angewandt, daß jedes System einem *und nur einem* normalen Diagonalsystem äquivalent ist? Ich vermute eigentlich das letztere. Nur fände ich dann einen Hinweis, wie diese Anwendung des Näheren gedacht ist, erwünscht.

Bitte nehmen Sie es mir nicht übel, wenn ich an dieser Stelle so schwer mitkomme. Ich entsinne mich, daß mir die Stelle auch schon damals Schwierigkeiten machte, als Sie sie mir vorlasen.

...

1.27 o.Datum, Hasse an Hensel, Fragment

[1]

Mathematisches Seminar der Universitaet Halle.

Halle (Saale), den 19
An der Universitaet 9.

...

Ihre großen Hörerzahlen sind ja erstaunlich. Da kommen wir bei weitem nicht mit. Ich habe in diesem Semester in der Algebra vielleicht 50, in den Diff. Gl. der theor. Physik etwa 90 Hörer. Den wissenschaftlichen Mittelpunkt dieses Semesters bildet ein Vortragsseminar über die Theorie der hyperkomplexen Zahlen, nach Dicksons Buch "Algebren u. i. Zahlentheorie", das Herr Jung, Herr Baer und ich gemeinsam veranstalten. Wir versprechen uns sehr viel von einem gründlichen Eindringen in diese schöne neue Theorie, die für die Weiterentwicklung der Arithmetik ganz sicher von ausschlaggebender Bedeutung sein wird. Außerdem haben wir ein Mathem. Kolloquium eröffnet, das in Vorträgen hiesiger und auswärtiger Mathematiker besteht. Im vorigen Semester hatten wir mit einem privaten Zirkel begonnen, wollen aber jetzt lieber an die Öffentlichkeit treten. Die jüngeren Mathematiker der umliegenden Hochschulen Jena, Leipzig, Cöthen nehmen öfter teil daran.

Zur Berufung Ihres Herrn Sohnes als Ordinarius nach Königsberg nehmen Sie meinen allerschönsten Glückwunsch. Ich kann mir vorstellen, wie sehr Sie sich darüber freuen. Bitte übermitteln Sie doch auch bei Gelegenheit Ihrem Herrn Sohn meine Glückwünsche.

Pfingsten gedenken wir in Allendorf bei meinen Eltern zu verleben, die sich schon seit langer Zeit auf den Besuch des Enkelsohnes freuen. Das Kind lernt jetzt täglich mindestens 10 Vokabeln und kann auch schon bis 6 zählen. Das soll in Allendorf an Hühnern und Tauben praktisch geübt werden.

Mit den besten Grüßen von Haus zu Haus
Ihr H. Hasse.

[1] Fortsetzung des Briefes vom 4. Mai 1929 ?

P. S.

Ich habe de Gruyter auf Anfrageerklärt, daß es *nicht* wünschenswert sei, wenn das geplante Register für Band 141–160 zwei Druckbogen für die wissenschaftlichen Beiträge fortnähme. Vielmehr müsse er dies Register auf zwei besondere Bogen drucken. Nun wird er sich in dieser Frage an Sie wenden. — Ich finde es wirklich im gegenwärtigen Augenblick höchst unerwünscht, wenn dadurch wieder eine Verzögerung eintritt. Wir sind so schon weit genug zurück, und nun haben wir doch neuerdings eine Fülle von schönen und wertvollen Beiträgen namhafter Autoren. Wir *dürfen* diese nicht zu lange warten lassen, sonst verstimmen wir sie, und ihre nächsten Beiträge gehen an eine andere Zeitschrift.

1.28 25.06.1929, Hensel an Hasse

Redaktion des Journals
für die
reine und angewandte Mathematik
———x———

Marburg a. d. lahn d. 25. Juni 1929.
breiteweg 7.

Lieber Herr Professor.

Heute möchte ich Ihnen vor allen Dingen berichten, dass die Berufungsangelegenheit für meine Nachfolge zu meiner grössten Freude an der Fakultät so schön und glücklich verlaufen ist, wie ich nur irgend wünschen konnte.
Das war vorher doch nicht ganz sicher, da in zwei ähnlichen Fällen der bisherige Fachvertreter von der Fakultät überstimmt worden war, was dann schwere Complikationen ergeben hatte.

Da aber in diesem Falle zu meiner grössten Freude Herr Neumanngenau dieselben Ansichten und Wünsche hatte, wie ich und da unsere Sektion volles Vertrauen zu uns Beiden hatte, so ging unsere Vorschlagsliste einstimmig angenommen an das Ministerium.

An erster Stelle haben wir Sie vorgeschlagen und aufs Deutlichste hervorgehoben, dass und warum wir Sie mehr wünschen als die anderen in Frage kommenden Gelehrten.
Mit der Bitte um strengste Verschwiegenheit für Sie und Ihre liebe Frau, zu der ich auch nach dieser Richtung das vollste Vertrauen habe und die natürlich Mitwisserin unserer Geheimnisse sein darf, teile ich Ihnen nun mit, dass wir, wie ich Ihnen schon andeutete, an zweiter Stelle Hauptan dritter Stelle Krullvorgeschlagen haben.

Ich weiss ja, dass das Ministerium besonders auf Herrn Richters Einfluss,der Sie gern in Halle fesseln möchte, schwer dazu gebracht werden kann, Sie nach Marburg zu berufen. Deshalb habe ich mich auf Anraten unseres Kurators, der Ihre Berufung hierher auch dringend wünscht und diesem Wunsch bei seiner baldigen Anwesenheit in Berlin auch starken Ausdruck geben will, dazu entschlossen, an den Herrn Minister +++, den ich auch etwas persönlich kenne, einen Brief geschrieben, in dem ich ihm die Gründe, weshalb wir Ihre Mitarbeit in Marburg so sehr wünschen, noch einmal gründlich klargelegt habe und die Bitte der Fakultät auch von mir persönlich aus warm unterstützt habe. Nun muss man eben sehen, wie die Dinge laufen. Ich hoffe eigentlich doch, wir könnten dieses Mal Erfolg haben, und damit würde mir ein grosser Wunsch erfüllt werden. Ich glaube auch sicher, Sie könnten und würden in Marburg eine segensreiche und Sie selbst befriedigende Lehrtätigkeit ausüben und Sie würden es nicht bereuen einem Rufe hierher gefolgt zu sein. Quod dis bene vertent.

Nun möchte ich Ihnen noch erzählen, dass ich Ihnen in den nächsten Tagen eine Sendung Manuskripte für Crelle zusende.
Von diesen möchte ich eine kleine Abhandlung von Hausdorffüber das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetzhervorheben, und Sie bitten, sie doch gleich anzusehen ob sie originell genug ist, um sie zu veröffentlichen, was ich ganz *besonders* gern möchte, oder ob der Beweisgang sich schon in den anderen Beweisen ganz vorfindet.

Nun leben Sie sehr wohl, lieber Herr Hasse, grüssen Sie die verehrte Gattin herzlichst und lassen Sie doch recht bald etwas von sich hören.

In alter Freundschaft bin ich stets
Ihr K. Hensel.

1.29 04.10.1929, Hensel an Hasse

Heidelberg den 4. Oktober 1929.

Hotel Victoria
Heidelberg

Lieber Freund

Der Augenblick, als ich heute früh Ihr Telegramm erhielt, gehört zu den schönsten meines Lebens, und ich weiss nicht, ob ich vor ganzen 27 Jahren eine grössere Freude darüber empfunden habe, dass *ich* nach dem schönen Marburg gehen sollte, oder heute, wo ich erfahren habe, dass gegründete Hoffnung dafür besteht, dass *Sie* unserer Universität angehören werden.

Ich hoffe sicher, dass das Ministerium, nachdem es zu unseren Gunsten seinen Wunsch, Sie an Halle zu fesseln, überwunden hat, nun auch alles tun wird, um Ihnen den Uebergang nach Marburg erwünscht und wertvoll zu machen. Darüber müssen wir noch genauer sprechen, und ich freue mich von ganzem Herzen auf unser Wiedersehen in Marburg.

Meine Frau war hier im Sanatorium Speierershof zu einer vierwöchen Kur, welche morgen (Sonnabend) abläuft und Gottlob sehr befriedigend verlaufen ist. Die Aerzte verlangen aber unbedingt eine kurze Nachkur, wenn nicht der ganze Erfolg in Frage gestellt werden soll.
Nur deshalb bat ich in meinem Telegramm, ob wir uns erst am 11 in Marburg sehen und sprechen dürfen; denn am Donnerstag Abend würden wir dann in Marburg eintreffen und Freitag Sonnabend und Sonntag wäre ich ganz zu Ihrer Verfügung. Geht es aber von Ihnen aus dann nicht mehr, worüber +++ das von Ihnen erbetene Telegramm wohl noch heute Abend Auskunft geben wird, so geben wir eben doch die Nachkur meiner Frau auf und reisen so nach Hause, dass ich eben Dienstag den 8 zu Ihrer Verfügung in Marburg bin. Denn das ist jetzt natürlich die Hauptsache!

Ich kann Ihnen garnicht sagen, wie mich die Hoffnung, Sie in Marburg zu wissen, beglückt. Ich hoffe nur noch genug Zeit und Kraft zu behalten, um diese schöne Zukunft auch in beglückende Gegenwart umzuwandeln. Wie sehr meine Frau und ich uns auf Ihre liebe Gattin freuen, das können Sie sich wohl vorstellen. Es *soll* ein schönes reiches Leben werden.

Mit herzlichsten Glückwünschen und Grüssen bin ich Ihr Ihnen treu ergebener

K. Hensel.

1.30 o.Datum, Hensel an Hasse, Fragment

...
brachte, aber darauf war ich schon vorbereitet, denn dieser Gedanke ist ziemlich neuartig, es gibt wenig Präzedenzfälle an anderen Universitäten. Ich glaube doch nicht, dass Sie hier alles durchsetzen werden, aber vielleicht einen Bruchteil dieses Betrages, womit man auch schon viel anfangen könnte, besonders wenn man vorläufig von unserem ziemlich beträchtlichen Seminarfonds etwas hinzunähme. — Sehr freue ich mich, dass unsere Wünsche in Bezug auf ein Vorrecht auf mathematische Auditorien doch eine gewisse Unterstützung durch das Ministerium finden soll. Dass für Krafftnichts Festes zu gewinnen war, ist mir schmerzlich, aber ich fürchtete es schon.

Alles in Allem muss ich Sie aufs Wärmste zu Ihren Verhandlungserfolgen beglückwünschen. Ich darf jetzt doch wohl die sichere Hoffnung hegen, dass Sie zu uns kommen werden, und ich bin darüber *sehr* glücklich und hoffnungsvoll für Marburgs mathematische Entwicklung. Wenn Sie mir Weiteres mitteilen wollen,
...

1.31 16.10.1929, Hensel an Hasse, Postkarte, Fragment

Postkarte

K. H. **MARBURG · LAHN,** d. 16 Oktober 1929.

Lieber Herr Professor.

Herzlichen Dank für Ihren Brief mit den Mitteilungen über das bisherige Ergebnis Ihrer Verhandlungen, das ich jetzt schon für ausserordentlich gut halte. Die fast wichtigsten Punkte, die Gehaltsfrage, die Honorargarantie, die Umzugsfrage, die Wohnungsfrage scheinen doch ganz nach Ihren Wünschen geregelt zu sein. Dass Ihnen auch die *beiden* Assistenten fest zugesagt wurden ist sehr schön und sehr wichtig. Natürlich ist es etwas traurig, dass man Ihrem Wunsche nach M · 1000 im Jahre für Kolloquiumsvorträge von auswärtigen Gelehrten wenig Verständnis entgegen

...

so würde mich das sehr glücklich machen.

Herzlichste Grüsse und Wünsche. Stets Ihr

K. Hensel.

1.32 21.10.1929, Hensel an Hasse

Marburg den 21. Oktober
1929.

Lieber Herr Professor.

Sofort nach Empfang Ihrer Karte sah ich meine Crellebestände durch und fand zu meiner grossen Freude auch sofort die 3 Seiten a,b,c von Kommerell, welche ich Ihnenbeiliegend auch sofort sende.

Ich *glaube* mich zu entsinnen, dass wir bei unserem vorletzten Beisammensein unter sonstigen Crellefragen auch über diesen Zweck sprachen. Leider muss ich damals versäumt haben zu den übrigen Arbeiten für das Journal auch diese 3 Seiten beizulegen. Ich hoffe nur, dass damals dieses Versehen von mir Ihnen keine zu grosse Mühe und dem Erscheinen der nächsten Hefte keine Verzögerung erwachsen ist. Nach dem, was Sie schreiben scheint ja wenigstens das letztere nicht zu befürchten zu sein.

Ich bin ja nun natürlich höchst gespannt, wie Ihre Angelegenheit mit Berlin weiter geht. Lassen Sie nur doch ja gleich wissen, wenn sich alles entschieden hat.

Mit herzlichstem Grusse stets
Ihr
K. Hensel.

Ich bin jetzt gerade an einer kleinen Arbeit über allgemeine Potenzreste, dem Eulerschen Kriterium und dem Gaussschen Lem̄a für diese allgemeinen Potenzreste, womit ich Hölderan seinem 70 Geburtstage in einer Festnum̄er der Math. Zeitschrift überraschen will. Hoffentlich werde ich noch damit fertig.

1.33 11.11.1929, Hensel an Hasse, Postkarte

POSTKARTE

K. H. **MARBURG · LAHN,** d. 11 November 1929.

Lieber Herr Professor und Nachfolger.

Nehmen Sie meinen herzlichsten Glückwunsch zu dem für Ihr eigenes Wirken und für unser mathematisches Marburg so sehr glücklichen Abschluss Ihrer Verhandlungen mit Berlin, das sich hier doch m. E. sehr einsichtig und recht grosszügig gezeigt hat. Ich hoffe nur, dass man Ihren eigenen Bedürfnissen als Gatte und Familienvater auch in zufriedenstellender Weise Rechnung getragen hat.

Dass Ihr Wunsch wegen des Fonds für Vorträge etc. so schön erfüllt ist hat mich sehr erfreut. Das könnte eine schöne Sache werden, durch die die Mathematik in Marburg und in Deutschland wirklichen grossen Gewinn haben würde. Auch ich möchte gern zum Gelingen dieses Planes vielleicht dadurch ein wenig beitragen, dass ich, falls dies irgend möglich ist, d. h. ziemlich häufig, die Vortragenden bei mir aufnehme. Wie viel könnten wir alle von dem reichen Strom von wissenschaftlicher Anregung haben, das sich dann auf unser glückliches Marburg ergiessen würde.

Und wie sehr befruchtend würde dieser engere Verkehr mit den besten Männern unserer Wissenschaft auch auf unser Crelle'sches Journal einwirken. — Kurz, ich bin froh und hoffnungsvoll und begrüsse Sie Beide herzlichst. Stets Ihr

K. Hensel.

1.34 14.11.1929, Hensel an Hasse, Postkarte

Postkarte

Marburg/L. d. 14–11–29.

Lieber Herr Professor.

Herzlichen Dank für Ihren Brief, nach dem wir auch nun sicher hoffen dürfen, dass alles in Ordnung ist. — In Bezug auf die Möbelfrage kann ich Ihnen nur sagen, dass das ganze Problem mich völlig überrascht hat. Ich hatte nie daran gedacht meine Sachen in dem Amtszimmer zu lassen, hatte also natürlich auch mit niemand darüber gesprochen. Da wir nach Herrn FränkelsWeggang wieder unsere Ober–Zimmer zu unserer Verfügung haben, so sind uns diese Möbel auch sehr willkommen zur Möblierung +++ Zimmer. So passt ja alles sehr gut mit Ihren eigenen Wünschen. Ich kann die Möbel natürlich jederzeit aus der Universität abholen lassen. Herzliche Grüsse, ich muss eilig in +++ Vorlesung

Bald mehr. Stets Ihr K. Hensel.

1.35 28.11.1929, Hensel an Hasse, Postkarte

Postkarte

Marburg d $^{28}/_{11}$ 29.

Lieber Herr Professor.

Ich habe mich über Ihre schöne Nachricht, dass nun alles in Ordnung ist von ganzem Herzen gefreut. Ich wollte noch warten, bis auch die Universität die Nachricht erhalten hatte, gestern Abend sagte mir aber unser Dekan, er wüsste officiell noch nichts. Da aber unser Kurator schon orientiert zu sein schien, so ist das wohl eine der wohlbekannten, fahrplanmässigen Verspätungen, welche meine Freude nicht im Geringsten trübt. — Ich habe mir vorgenommen, am Sonntag zur Einweihung des +++ neuen mathematisch–amerikanischen Institutes nach Göttingen zu reisen; ich wollte so gern auch besonders Hilbert nach so langer Zeit, aber auch Landau und Courant wiedersehen. — Wie herrlich wäre es, wenn Sie auch dorthin ko$\overline{m}$en könnten. Das wäre mir eine sehr grosse Freude! Ich treffe voraussichtlich Sonntag 12 Uhr 16 dort ein und wohne wieder in dem guten Hotel in der Hauptstrasse (ich glaube Krone). Herzlichen Gruss Ihres K. Hensel.

1.36 22.01.1930, Hasse an Hensel

22. 1. 30

Lieber Herr Geheimrat!

Unsere Briefe haben sich gekreuzt — haben Sie herzlichen Dank für Ihre freundlichen Zeilen.

Heute komme ich mir einer weiteren Crelle Angelegenheit, deren Entscheidung ich in Ihre Hände legen möchte. Bieberbach schreibt mir, daß J. Schur plant, bei der mathematischen Zeitschrift ein Schottky–Heft anzuregen, anläßlich des 80. Geburtstages von Schottky am 24. 7. 31. J. Schur will aber diesen Gedanken erst dann verfolgen, wenn er weiß, daß nicht das Crellesche Journal schon Absichten hat; denn dieses wäre ja wohl der richtigste Ort für eine solche Festschrift.

Das finde ich nun auch, zumal Schottky doch seit Jahren unser Titelblatt ziert. Und so möchte ich eigentlich vorschlagen, daß wir diese Anregung aufgreifen und ein *Doppel*heft als Festschrift herausbringen. Ob und wen wir allerdings da um Beiträge bitten sollen, das sind Fragen, auf die Sie bei Ihrer genaueren Kenntnis von Schottky's Person, Freundeskreis und Arbeitsgebiet sicher besser antworten können, als es mir gerade in diesem Falle möglich ist.

Jedenfalls wäre ich Ihnen sehr dankbar, wenn Sie mir zunächst einmal möglichst bald schreiben wollten, ob Sie auch meinen, daß *wir* und nicht die Mathem. Zeitschrift diese Festschrift herausbringen sollen. Denn ich muß ja Herrn Bieberbach auf seine Anfrage, die schon eine Woche bei mir liegt, nun schnell antworten.

In meinem Brief vom Sonntag vergaß ich leider, auf diesen Punkt einzugehen. Denn die Notiz Bieberbachs war mir nicht mehr gegenwärtig, da sie sich am Schluß desjenigen Briefes befand, der seine Stellungnahme zur Frage meiner Nachfolge enthielt und bei diesen Akten lag.

In der letzteren Frage ist nun gestern die Entscheidung der Fakultät gefallen. Da, wie ich glaube, Ihr Interesse an dieser Frage nicht klein ist, so möchte ich Ihnen ganz vertraulich das Resultat mitteilen:

1.) Brandt, 2.) Krull, 3.) Prüfer + Rob. Schmidt.

Mit herzlichen Grüßen von Haus zu Haus
Ihr ergebenster
H. Hasse.

P. S. Neulich hat sich Herr Tornier bei uns habilitiert, nachdem er schon seit Semesterbeginn den Lehrauftrag in Kiel vertretungsweise versieht. Ich freue mich, diese Sache *hier* noch zum Abschluß gebracht zu haben.

1.37 24.02.1936, Hasse an Hensel

DIE SCHRIFTLEITUNG DES

JOURNALS FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK

(CRELLES JOURNAL)

PROF. DR. HELMUT HASSE

GÖTTINGEN, DEN 24. 2. 1936

MATHEMATISCHES INSTITUT

BUNSENSTR. 3–5

Lieber Herr Geheimrat!

Im Anschluß an meinen letzten Brief wollte ich Ihnen nur noch kurz mitteilen, wie das abschließende Ergebnis über die Kennzeichnung der unverzweigten Erweiterungskörper vom Grade p^n eines π–adischen Körpers durch ein p^n–tes Radikal lautet:

Sei k ein π–adischer Zahlkörper, der die p^n–ten Einheitswurzeln enthält, und sei ζ_n eine primitive p^n–te Einheitswurzel in k, sowie $\pi_n = 1-\zeta_n$ das zugehörige Primelement. Dann ist eine Zahl η aus k dann und nur dann p^n–primär, d. h. $k(\sqrt[p^n]{\eta})$ unverzweigt über k, wenn

$$\eta = (1-\pi_n)^{p^n\xi} \cdot \eta_0^{p^n} = \zeta_n^{p^n\xi} \cdot \eta_0^{p^n}$$

mit einer Zahl η_0 aus k ist. Dabei ist ξ eine ganze p–adische Zahl

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 p + \xi_2 p^2 + \cdots ,$$

deren Koeffizienten ξ_ν keineswegs $(q-1)$–te Einheitswurzeln aus dem Koeffizientenkörper von k sind, sondern höhere, nämlich $(q^{p^\nu}-1)$–te Einheitswurzeln, die aber dadurch eingeengt sind, daß zwischen ξ und

$$\xi^{(p)} = \xi_0^p + \xi_1^p p + \xi_2^p p^2 + \cdots$$

die Differenzengleichung

$$\xi^{(p)} - \xi = \alpha = \text{ganze } p\text{–adische Zahl aus dem Koeffizientenkörper von } k$$

besteht. Mittels dieser Darstellung, die auch an sich interessant ist, wird die durch $\xi^{(p)} - \xi = \alpha$ beschriebene Erweiterung des Koeffizientenkörpers in Beziehung gesetzt zu der Erzeugung derselben Erweiterung durch das Radikal $\sqrt[p^n]{\eta}$.

Zum Verständnis der Normalform $\zeta_n^{p^n\xi}$ möchte ich noch bemerken, daß aus $\zeta^{p^n} = 1$ keineswegs auch folgt $\zeta_n^{p^n\xi} = 1$ für *beliebige* ganze p–adische ξ, sondern lediglich $\zeta_n^{p^n a} = 1$ für *rationale* ganze p–adische a.
Auch ist $\zeta_n^{p^n\xi}$ zwar formal die p^n–te Potenz von ζ_n^{ξ}, aber ζ_n^{ξ} gehört nicht mehr dem Ausgangskörper k an, sondern eben dem unverzweigten Körper vom Grade p^n über k.

Ich hoffe durch Ausbau dieser Methoden bald zu weiteren und auch abschließenden Resultaten für die expliziten Formeln zum Reziprozitätsgesetzzu gelangen. Einstweilen aber wird meine heute abend beginnende Englandfahrt dies ein wenig unterbrechen.

Mit herzlichen Grüßen

Stets Ihr
H. Hasse.

1.38 13.06.1939, Hasse an Hensel

13. Juni 1939

Lieber Herr Geheimrat,

Bei der herzlichen Freundschaft, die Sie mir durch lange Jahre erwiesen haben und für die ich Ihnen immer dankbar bin, halte ich es für meine Pflicht, Ihnen ganz vertraulich und persönlich zu sagen, dass in den letzten Wochen in der Frage der Mitgliedschaft zur Deutschen Mathematiker–Vereinigung eine Sachlage eingetreten ist, die es für Sie vielleicht doch angenehmer erscheinen lässt, wenn Sie von sich aus Ihre Mitgliedschaft aufgeben. Unser Vorsitzender, Herr Süss, von dem ich heute einen Brief über diese Fragen bekam, ist nach den vor einigen Jahren getroffenen Verabredungen dem Reichserziehungsministerium verantwortlich, und handelt in der Mitgliederfrage durchaus in diesem höheren Auftrage. Nach dem Einblick, den ich als Vorstandsmitglied in den gegenwärtigen Stand der Frage bekommen habe, ist es gewiss, dass in ganz kurzer Zeit u. a. auch die Frage Ihrer Mitgliedschaft von dieser Seite her aufgerollt wird. Ich schreibe Ihnen diesen Brief, ohne dass irgend jemand davon weiss, weil ich glaube, dass es Ihnen lieb ist, nicht plötzlich vor eine vollendete Tatsache gestellt zu werden. Glauben Sie mir, dass mir dies sehr nahegeht.

Herzlichst Ihr
H. Hasse

1.39 16.06.1939, Hensel an Hasse

Marburg, d. 16. 6. 1939.

Lieber Herr Professor.

Beifolgend sende ich Ihnen einen Beitrag für Ihre Zeitschrift, die durch ein Missverständniss des Autors an mich gekommen ist. Herr D$^{\underline{r}}$ R. Sprague, Enkel von Schwarz, Urenkel von Kummer, der Sohn einer Tochter vonSchwarz, die ich früher sehr gut kannte und hochschätzte, scheint den Weg seiner mathematischen Vorfahren mit grosser Begeisterung und erfolgreich zu gehen. Selbstverständlich möchte ich Ihr Urteil über die vorliegende Arbeit in keiner Weise beeinflussen. Vielleicht könnten Sie ihm möglichst schnell schreiben.

Die Anregung Ihres letzten Briefes, der ich sofort gefolgt bin, möchte ich nicht weiter berühren, da mir ihr Gegenstand zu schmerzlich ist.

Ihr ergebener
K. Hensel.

Kapitel 2

Aus der Crelle–Korrespondenz

2.1 10.02.1931, Hensel an Hasse

Berlin d. 10–2–1931

von der Heydtstr. 1. Pens. Fink

Lieber Herr Professor.

Nehmen Sie meinen herzlichsten Dank für Ihren lieben Brief, der mich sehr interessiert und erfreut hat. Ich möchte Ihnen zunächst von meinen Vorlesungen erzählen, die mir zwar sehr viel Arbeit aber auch viele Anregung und Freude geben. Ich habe viele und durch Schur besonders gut vorbereitete Zuhörer, die bis jetzt gut ausgehalten haben, also doch wohl Interesse an der Zahlentheorie haben. Schur, Spitzer und die jüngeren Dozenten hören wohl ständig und besonders die eingehenden Gespräche mit Schur sind mir sehr anregend. Ich habe für diese Vorlesungen den ganzen Gegenstand nochmals sehr eingehend durchgedacht und kann jetzt die ganze Theorie der algebraischen Zahlen in einer Form geben, die gegen meine Darstellung in der Math. Zeitschrift sehr viel einfacher und völlig einheitlich geworden ist. Auf dieser Grundlage will ich nun ganz so wie in diesen Vorträgen meinen ersten Teil unseres Buches gleich schreiben. Ich hoffe ganz sicher, dass er Ihre Zustimmung finden kann. Die mathematischen Kollegen sind alle sehr liebenswürdig und freundlich zu uns. Vorigen Sonnabend waren wir auf einer sehr hübschen Gesellschaft bei Schur's diesen Sonnabend sollen wir bei Bieberbach's sein, die in Dahlem ein sehr schönes Haus gekauft haben.

Zu dem Schottkyheft hat auch Köbe einen kleinen Beitrag für den 15 April in Aussicht gestellt. Remak ist auch im Wesentlichen fertig und wird seine Arbeit bald einschicken.

Dass Sie Herrn Vennekohl angeregt haben, Ihren Beweisgedanken für das Reziprocitätsgesetz weiter zu verfolgen finde ich sehr schön. Hoffentlich gelingt es ihm, ein Stück weiter zu kommen. Eine schönere Aufgabe konnte er nicht finden.

Sehr interessant waren mir auch Ihre musikalischen Erlebnisse in Kassel. Das Brahms'sche Horntrio habe ich kürzlich auch mit `[...]`[1] gespielt. Es ist ergreifend schön und natürlich mit Horn noch sehr viel eindrucksvoller als

[1] vielleicht 'Rhodes' ?

mit dem Cello. Kaiser selbst spielt doch wundervoll. Man müsste es doch zu erreichen suchen, dass er auch einmal wieder in Marburg spielt.

Ich freue mich von Herzen, dass Sie nun aus den Sorgen mit der Uebersiedelung und Neueinrichtung heraus sind. Jetzt werden Sie auch die richtige Freude an Ihrem schönen Heim haben.

Ich freue mich *sehr* darauf, etwa am 12 März Sie und Ihre liebe Gattin wiedersehen zu dürfen und bin mit den herzlichsten Grüssen und Wünschen auch von meiner Frau, die sich hier mit Begeisterung wieder der Malerei in die Arme geworfen hat stets Ihr

K. Hensel.

2.2 10.08.1933, Hensel an Hasse

Marburg, d. 10. August 1933.

Lieber Herr Professor.

Meiner Karte vom gestrigen Tage, die hoffentlich bei Ihnen angekommen ist lasse ich heute gleich einen Brief folgen, denn inzwischen ist ja nun die Antwort unseres Verlegers bei mir (und wohl auch bereits bei Ihnen) eingetroffen, und da ist es mir ein lebhaftes Bedürfniss Ihnen wenigstens kurz zu schreiben. Ausführlich lässt es sich ja schriftlich schlecht machen, das führt etwas weit, aber ich hoffe, wir sehen uns doch in nicht zu ferner Zeit, und können uns dann aussprechen. —

Dass unsere Gegengründe gegen das Ausscheiden von Schl. anerkannt wurden ist ja gut. Sonst aber habe ich doch grössere Bedenken gegen fast alle Punkte des Briefes, aber ich kann und will nichts Wesentliches antworten ohne Uebereinstimmung mit Ihrer Ansicht; dieser Gedankenaustausch mit Ihnen kann aber nur mündlich erfolgen, und ebenso kann ein solcher Austausch mit Berlin nur mündlich zu Stande kommen (hier noch viel mehr wie zwischen uns Beiden, da uns doch unsere Berliner Herren nur nicht nahe genug stehen.)

Ich hatte also, (und darüber möchte ich gern Ihre Ansicht, und wenn sie meinem Vorschlage günstig ist, Ihre Zustimmung haben), die Absicht, jetzt nach Berlin etwa Folgendes zu schreiben:

Die in dem Briefe von Berlin angeregten Punkte sind so wichtiger und weittragender Natur, dass wir Beide uns darüber *mündlich* eingehend besprechen müssen und dass wir dann auch *mündl* mit dem Verlag sprechen müssen. Ich werde meine Abreise von hier deshalb bis Anfang September verschieben, wo ich Sie zurückgekehrt hoffen darf, und ich werde dann Ende September (nach meiner Marienbader Kur) sofort nach Berlin zu einer mündlichen Besprechung kommen. (Herrlich und höchst erwünscht wäre es wenn Sie auch dort sein könnten oder vielleicht könnten wir auch Herren Grethlein zu einer Besprechung nach Marburg Anfang September bitten; damit wäre ja viele Zeit gewonnen) — In jedem Fall könnten wir das Erscheinen von Bd. 170 *ohne Verzögerung in der Drucklegung* so lange verzögern, ev. auch dadurch, dass wir Heft 1 und 2 zu einem Doppelhefte zusammenziehen, was wir ja schon öfter gemacht haben.

So wollte ich etwa schreiben, sowie ich Ihre Ansicht darüber kenne. Sachlich wollte ich mich vorläufig zu dem Berliner Briefe nicht äussern. Könnten Sie mir vielleicht *schnell* ein Wort schreiben[1], ob Sie damit einverstanden sind.

Mit den herzlichsten Grüssen und Wünschen für gutes Wetter und gute Erholung bin ich wie immer Ihr

K. Hensel

[1] undeutlich

2.3 28.08.1933, Hensel an Hasse

Percha a/Starnbergersee d. 28–8–33.

Lieber Herr Hasse.

Ich bin hier auf drei Tage in eine wunderschöne ruhige Erholung gekommen, welche mir nach der vielen Anstrengung und Aufregung der vergangenen Wochen unendlich wohltut. Wie gerne hätte ich etwas von dieser schönen Zeit mit Ihnen zugebracht, aber es war ja in diesem Jahre wirklich nicht möglich, mit dem Auto in irgendwie erträglicher Weise von Meran nach München zu fahren.

So habe ich gleich nach Empfang Ihrer letzten Karte nach Berlin geschrieben, dass ein Zusammentreffen in München oder Marburg unmöglich sei, und dass ich nach gründlicher Verständigung mit Ihnen gern Anfang Oktober zu einer Besprechung nach Berlin kommen würde.

Soeben wird mir eine Antwort von Berlin aus Marburg nachgesandt, nach der sie, "herzlich betrübt zwar" sich mit der Verlegung auf den Oktober einverstanden erklären, und dann das nächste Heft erst dann und das zweite 8–14 Tage danach ausgeben wollen, oder dann gleich ein Doppelheft ev. mit revidiertem Titel erscheinen lassen.

Wir müssen uns nun beide schriftlich über unsere Ansichten und unsere Stellungnahme verständigen; ich glaube aber, es wird nicht zu schwierig sein. Vielleicht können Sie mir, in der nächsten Woche etwa, ein Wort zukommen lassen ob Sie eine Aenderung in Beirat, Redaktion etz. für nötig halten, und welche Massregeln Ihnen da vorschweben würden. Ich würde dann sofort antworten und ich glaube, wir werden so bald über unsere eigenen Gedanken einig werden die dann allerdings in Berlin besprochen und vertreten werden müssen. Ihre Briefe treffen mich in Marienbad Hotel Rauscher, wohin ich am Donnerstag d.31. August mit meiner Frau reise.

Ihnen und Ihrer lieben Gattin sende ich die herzlichsten Grüsse und Wünsche für das Andauern der schönen Meraner Erholung

Herzlichst Ihr K. H.

2.4 07.09.1933, Hasse an Hensel, mit Antwort von Hensel

Marburg–Lahn, den 7. 9. 33

Lieber Herr Professor[1]

Vielleicht ist es Ihnen doch erwünscht, Ihren Entwurf für die erläuternden Worte bei der definitiven Redaktion vor sich zu haben. Deshalb sende ich ihn meinem Briefe gleich nach. Ihre Bestätigung an de Gruyter geht von mir mitunterschrieben soeben nach Berlin ab. Ebenso die Probedrucke des Kronecker[2] *an Sie. Herzl. Gruss Ihr ergebener*

K. Hensel

Lieber Herr Geheimrat!

Heute erhalte ich mit den Reproduktionen des Kroneckerschen Briefes das beigelegte Schreiben unseres Verlegers. Es tut mir leid, wenn ich Sie mit dieser Angelegenheit doch in Ihren Ferien "behelligen" muß. Aber ich glaube, daß Sie doch unter allen Umständen sich persönlich von der Ordnungsmäßigkeit der Reproduktion überzeugen wollen. Auf die Fragen der Verleger habe ich den beigefügten Antwortbrief aufgesetzt, dem Sie hoffentlich zustimmen werden. Insbesondere bitte ich Sie, meinen Vorschlag für die Überschrift am Kopf zu prüfen und gegebenenfalls nach Ihrem Gutdünken abzuändern.

Für die geplanten erläuternden Worte von uns als den Herausgebern kommt nach der ganzen Lage wohl nur der noch freie kurze Raum am Schluß von Seite 3 in Frage. Dort könnten wir gut das zu Sagende gerade unterbringen. Für eine ausführlichere sachliche Erläuterung sehe ich keinen Anlaß, da die ausgesprochenen Gedanken und Tatsachen in ihrer Klarheit für sich selbst sprechen.

Außer vielleicht ein paar persönlich–historischen Zeilen, deren Formulierung Sie wohl auf Grund Ihrer Kenntnis der Situation und der Persönlichkeit Kroneckers leicht finden werden, könnte man sagen, daß wir hier ein bisher unveröffentlichtes Dokument aus dem Nachlaß Kroneckers zum Abdruck

[1]Von Hensel handschriftlich angebrachte Antwort
[2]undeutlich

bringen, dessen Original in Ihrem Besitz ist, und das eine wertvolle Ergänzung zu den großen und berühmten Kroneckerschen Arbeiten über die Theorie der elliptischen Funktionen darstellt. Kronecker findet hier als großen leitenden Gesichtspunkt für die allgemeine Theorie der elliptischen Funktionen die Darstellung der "irrationalen" Teilwerte, dargestellt durch ihre "Relativkoordinaten" σ, τ (relativ zum Periodenparallelogramm), und damit also des gesamten Wertvorrats der Funktion, als Invarianten eines arithmetischen Äquivalenzbegriffs in der Theorie der quadratischen Formen. Dieser Zusammenhang bot sich ihm zunächst in dem Spezialfall der singulären Moduln und rationalen Teilwerte dar. Dort ist Kroneckers Auffaßung wesentlich identisch mit dem Grundgedanken der "Komplexen Multiplikation", der in diesen singulären Teilwerten Invarianten für die arithmetische Äquivalenz der *ganzzahligen* quadratischen Formen (Ringklassen) mit linearen Nebenbedingungen (Strahlklassen) feststellt. Seine hier mitgeteilte Entdeckung zeigt, daß die allgemeinen (irrationalen) Teilwerte bei beliebigen (auch nichtsingulären) Moduln in ganz der entsprechenden Beziehung zu einem entsprechend verallgemeinerten Äquivalenzbegriff für *beliebige* quadratische Formen stehen.

Ich denke, das sind genug Richtlinien, um daraus unser Nachwort zu komponieren, das wir dann wohl am besten mit "Die Herausgeber" unterzeichnen.

Es tut mir wirklich leid, daß ich Sie mit dieser Angelegenheit jetzt in Ihren Ferientagen stören muß. Um Ihnen so viel als möglich abzunehmen, habe ich den Brief an de Gruyter schon fertig aufgesetzt, Sie brauchen ihn nur zu unterschreiben, und ich lege Ihnen auch ein passendes Kuvert für die Weitersendung mit ein, entweder direkt an de Gruyter, oder — falls Sie gerne hätten, daß ich das Nachwort vor der Drucklegung noch einmal ansehe — an mich zurück.

Mit herzlichen Grüßen und Wünschen

stets Ihr

H. Hasse

2.5 17.09.1933, Hensel an Hasse

Marienbad, d. 17. 9. 1933

Hotel Rauscher

Lieber Herr Professor.

Ich danke Ihnen herzlichst für Ihren lieben Brief; ich bin sehr gerührt darüber, dass Sie in dieser für Sie so schweren Zeit unter dem Druck der Erkrankung Ihrer lieben Frau die Zeit gefunden haben, mir so eingehend über die Fragen zu schreiben, die uns Beide jetzt beschäftigen.

Vor allen Dingen möchte ich aber die Hoffnung aussprechen, dass der Anfall Ihrer Gattin jetzt vorüber ist, und daran die Frage knüpfen, ob sie nicht doch einen Versuch mit einer "[...]kur" machen möchte, welche ich schon so oft und immer mit dem allerbesten Erfolg angewendet habe. Es ist nichts als präparierter Rettigsaft, der aber von wunderbarer Wirkung auf die Galle ist; übrigens ein sehr bekanntes und von den Ärzten viel empfohlenes Mittel. Sollten Sie daran denken, so bitte ich um eine Karte hierher und sende Ihnen dann *sofort* alles Nähere.

Das was Sie über unsere Crellefrage schreiben hat mich natürlich ganz stark beschäftigt und es ist mir eine richtige und grosse Freude, dass ich in *allen* von Ihnen berührten Punkten *genau* so wie Sie denke. Ich reise zum 1. Oktober nach Berlin, und werde da in einigen wohl etwas anstrengenden und aufregenden Sitzungen unseren gemeinsamen Standpunkt vertreten.

Dass wir dann am besten die Neuregelung schon mit Band 170 eintreten lassen und diesen dann auch aus den von Ihnen angegebenen Gründen mit einem Doppelhefte eröffnen wird sich dann wohl zwangsläufig ergeben. Viel vorher wird ja auch die Kroneckerreproduktion mit Ihren ganz ausgezeichneten erläuternden Worten nicht fertig sein können. Auf[1] die etwas verkleinerte Reproduktion des Briefes ist ganz wunderschön. Ich habe mit Absicht die Rücksendung an Sie etwas verzögert, damit die Herren in Berlin dem Plane eines Doppelheftes geneigter werden.

Die Frage des vierten Herausgebers liegt, wie Sie meiner Ueberzeugung nach sehr richtig bemerken, auf einem ganz anderen Felde, als auf dem des

[1] undeutlich

Titel's "... und angewandte Mathematik" Ich glaube fest an den Druck von oben, fast ebenso fest an den von Herrn K. Th. V. selbst, und ich glaube, dass wir da noch einen schweren Stand haben werden; ich werde aber meine ganze Kraft daran setzen, hier unseren gemeinsamen Standpunkt durchzusetzen. Ich begrüsse es hier lebhaft, dass Sie den Namen Schmeidler ausgesprochen haben. Ich war nicht auf ihn gekommen, bin aber auch von meiner Seite *sehr* für seine Zuwahl, wenn wir Haupt nicht durchsetzen können. So will ich aber in Berlin zu wirken versuchen. Dass von den vier jüngeren möglichen Herren keiner hier in Betracht kommen kann, scheint auch mir fraglos. Besonders gilt das von Herrn T in Kiel aus einem Grunde, den ich Ihnen dann mündlich in Marburg sagen möchte; es wäre hier zu lang.

Das, was Sie Herrn Töplitz über die Verweisungen auf die Webersche Arbeit schreiben wollen, ist meiner Ansicht nach durchaus notwendig.

Darf ich nun noch ganz kurz auf die freundliche Nachschrift Ihres Briefes antworten. Den Eingang Ihrer Zinsen hatte ich überhaupt noch nicht vermisst. Bitte erledigen Sie doch das erst dann wenn es Ihnen ganz bequem ist. Von mir aus wird eine Aenderung des Zinssatzes oder gar eine Bitte um eine Kapitalrückzahlung nach menschlichem Ermessen nicht in Frage kommen. Ehe das eintritt müssten alle anderen Möglichkeiten für mich erschöpft sein, was der Himmel verhüten möge.

Nun darf ich noch auf Ihre liebenswürdigen Begleitworte zur Reproduktion des Kroneckerschen Briefes sprechen. Ich bin zunächst von der kleineren Wiedergabe ganz entzückt und ich glaube auch sicher, dass die Leser unserer Zeitschrift die Ueberzeugung gewinnen werden, hier nach Form und nach Inhalt etwas ganz Bedeutsames zu erhalten.

Dieser bedeutenden Veröffentlichung entsprechen vollständig die skizzierten Worte, die Sie in unser beider Namen hinzufügen wollen. Sie sind ganz ausgezeichnet und treffen m. E. das Wesentliche des Kroneckerschen Gedankenganges so wundervoll, dass dieser Zusatz so und nicht anders von Ihnen gemacht werden muss. Natürlich *von Ihnen*, denn ich könnte ja doch nur Ihre Worte etwas paraphrasieren und machte es dadurch sicher etwas weniger schön, als Sie das in Ihrer Skizze schon gemacht haben.

Zur Geschichte dieses Festbriefes möchte ich nur kurz bemerken, dass ich bei seiner Abfassung im Jahre 1890 als junger Dozent zugegen war; Kronecker hat ihn mit besonderer Liebe geschrieben; er sah in ihm ein Gegenbild zu seiner arithmetischen Festschrift 10 Jahre vorher. Wie jene das beste zusammenfasst, was K. über die Arithmetik der Algebra zu sagen hatte, so sollte dieser Brief das Beste geben, was es über die Arithmetik der Analysis geben konnte. Und seine Ueberzeugung war es damals dass dieses Beste eben in der Aufstellung und richtigen Fassung der Invarianten der analytischen Funktionen bestünde.

Dieser Gedanke trat damals immer und immer wieder in seinen Gesprächen, seinen Vorlesungen, seinen Arbeiten (besonders über die Theorie der elliptischen Funktionen) hervor und er ist auch der leitende Gedanke in diesem schönen Briefe mit seiner concreten Illustration in demselben.

Nach der Ueberreichung des Briefes über die Kummer sich noch sehr gefreut hat, war dieser Brief eigentlich verschollen. Ich hörte nichts weiter von ihm, sonst hätte ich ihn natürlich in die Werke Kroneckers mit aufgenommen. Offen gesagt habe ich auch nicht bei der Abfassung des Verzeichnisses aller (gedruckten!) Werke K's an diesen ungedruckten Brief gedacht. Um so merkwürdiger war es mir nun, dass ich ihn seit dem Jahre 1910 ohne es zu wissen in meinem Besitze hatte. In diesem Jahre (glaube ich) hielt ich nämlich die Gedächtnisrede auf Kummer in Berlin und erhielt zum Dank von der Witwe Kummers das Widmungsexemplar der Festschrift, welches ich, da ich 4 andere Exemplare bereits besass und sie beinahe auswendig kannte, so sehr liebte ich sie, nicht gelesen hatte. Als ich dieses Exemplar aber vor etwa einem Jahr ganz durchblätterte fand ich mitten darin steckend ein Jugendbild Kroneckers und diesen Brief. Aus d. Freude über diesen Fund ist der Wunsch einer Reprod. im Crelle geboren.

Natürlich ist diese Darstellung nur für Sie bestimmt, sie ist für die Publikation ohne Interesse. Ich möchte Sie bitten aus ihr nur einige Worte (etwa "ein glücklicher Zufall und der nochmalige Dank an Kummers Witwe") aufzunehmen und hieran Ihre eigenen Bemerkungen zu knüpfen. Sollten diese doch zuviel Raum einnehmen, so könnte man doch ganz gut diesen ganzen Text auf S. 4 setzen und Ihre grosse Arbeit erst auf S. 5 anfangen lassen. Vielleicht wäre das auch noch schöner. Jedenfalls darf Ihr Commentar nicht zu kurz kommen. Ich schicke Ihnen also die ganze Sendung zurück und erkläre mich im Voraus dankbarst einverstanden mit jeder Fassung die Sie den Bemerkungen der Herausgeber geben wollen. Ich brauche diese Sendung dann auch nicht mehr vor dem Druck zu sehen, sehe ich sie doch bei meinem Besuche in Berlin. Sehr gern würde ich allerdings von diesem Briefe und den Bemerkungen eine Anzahl (etwa 70–100) Abzüge erhalten, um diese mit meinen beiden jetzt fertig gewordenen Arbeiten zu verschicken, doch möchte ich dem Verlage mit dieser Bitte nicht etwa grosse Kosten machen.

Nun muss ich schliessen, damit dieser ausführliche Brief bald in Ihre Hände kommt. Später möchte ich Ihnen gern noch erzählen, wie gern und wie lebhaft ich mich mit der Anwendung der Gruppentheorie auf die arithmetische Auflösung der Gleichungen beschäftigt habe. Mir selbst sind die hier gewonnenen Ergebnisse neu und sie haben mich sehr interessiert, aber ob sie wirlich neu sind?

Ich hätte so gern noch eine kurze Karte von Ihnen hierher, ob es Ihrer lieben Frau schon besser geht und wie es Ihnen selbst geht und ob die kleine Jutta wieder ganz wohl ist.

Wir reisen hier wohl den 28. ab und sind voraussichtlich um den 12. Oktober in Berlin.

Mit den herzlichsten Grüssen "for self and partner" bin ich

stets Ihr

K. Hensel

2.6 05.10.1933, Hensel an Hasse

Wannsee Berlin
Strasse zum Löwen
b/D Georg Hahn d. 5–10–33.

Lieber Herr Professor.

Ich möchte Ihnen doch gern gleich von dem Ergebnisse meiner $2^1/_2$ stündigen Conferenz mit den beiden Herren unseres Verlages berichten, mit dem ich im Ganzen recht zufrieden war, besonders weil ich merkte, dass Beide auch "im Grossen" wertvolle und anständige Männer sind, mit denen sich vernünftig sprechen lässt.

Zunächst besprachen wir die Frage dess Beirates und stellten fest dass es nicht anders gehen würde, als dass seine Existenz auf dem Titel unterdrückt würde. Ich stellte aber fest, dass wir ihn notwendig brauchten und dass er im Uebrigen bleiben und jeder auch weiter sein Freiexemplar erhalten müsse und dass ihnen die Tatsachen in bester Form gemeldet werden müssen. Die Herren stimmten mir dann auch in Allem bei, hatten aber die grösste Sorge wegen der *schriftlichen* Uebermittlung dieser Erwägungen und Entschlusse. Zuletzt sagte ich dann, dass Sie ja mit einigen Herren schon in Würzburg gesprochen hätten; diese könnten ja dann von Ihnen *kurz* bezugnehmend auf Ihre Besprechung benachrichtigt werden. `[...]` wäre ich bereit zu besuchen (in Frankfurt und Bonn) indem ich dann noch einmal hinreiste. Herr Fr. aus Kiel könnte ja dann auch direkt verständigt werden mit Bezug auf seine Ihnen zugegangene Bereiterklärung. Die wenigen übrigen können dann wohl noch direkt verständigt werden. So würde sich diese Frage wohl günstig erledigen; sehr wichtig ist ja dabei, dass Sie in Wannsee schon mit einigen Herren direkt mit gutem Erfolge gesprochen haben.

Ueber dass Verbleiben von Sch. in `[...]`[1] war besonders Herr `[...]` noch sehr aufgeregt und ängstlich, obwohl beide Herren dabei blieben, dass `[...]` sie `[...]` an eine Beseitigung von ihm nicht gedacht werden könnte. Ich sagte dazu meinerseits nichts Neues, will aber auf der Reise Frankfurt–Bonn Schl. nochmal besuchen, das Gespräch auf diese Fragen bringen und vielleicht ohne ihn aufzuregen, zu erreichen suchen dass Schl. wieder in den Beirat

[1] vielleicht 'Giessen'?

zurücktritt. Wenn ich aber im Geringsten merke, dass er sich dabei aufregt, so kann ich *absolut keinen* weiteren Druck auf ihn ausüben.

Was nun endlich den vierten Herausgeber anbetrifft, so konnte ich zu meiner Freude feststellen dass der mehrfach wiederholte Vorschlag von V. *nicht* von anderer Seite, geschweige denn von diesem selbst den beiden Herren gemacht worden ist, sondern diese Idee ist allein von ihnen ausgegangen. Auf die Frage der angewandten Mathematik gingen sie auch überhaupt garnicht ein, so dass sie ihr sicher keine grosse Bedeutung beimessen. Dagegen legte besonders Herr G., der überhaupt nach dieser Richtung wesentlich feuriger dachte, als Herr C. der eigentliche Chef, sehr grossen Wert darauf, dass der neu zu wählende dritte auch wirklich ein überzeugter activ gerichteter und eingestellter Herr sein sollte, um damit eine bestimmte Wirkung hervorzubringen, und dann auch in den wichtigen Fragen freie Hand zu behalten. Herr G. war dann etwas im Zweifel ob `[...]`[2] in Erlangen nach dieser Richtung allen Anforderungen entspräche, über Schm. in Breslau wollte er sich noch genauer erkundigen. Ausserdem warf er noch die Namen Kowalewski und Erh. Schmidt in die Debatte. Was meinen Sie `[...]` dem `[...]`? (der zweite nimmt es sicher nicht an, entspricht auch `[...]`[3] Einstellung und nicht den Anford. wie ich weiss). Wir werden noch einmal zusammenkommen; so lange muss und werde ich hier ausharren. Wenn Sie mir unter obiger Adresse noch ein Wort über Ihre Ansichten zukommen lassen können, wäre ich sehr dankbar;

Auch wenn Sie bei Ihrer Vorlesungsankündigung auch wieder für mich zu demselben Datum schreiben lassen könnten, wäre ich Ihnen zu grossem Dank verpflichtet. Leben Sie sehr wohl mit den besten Grüssen und Wünschen bin ich stets

Ihr K. Hensel.

[2]vielleicht 'H'?

[3]vielleicht 'dessen'

2.7 Datum ?, Hensel an Hasse, Postkarte

(Postkarte)

Lieber Herr Professor

Heute möchte ich Ihnen nur schreiben, dass Herr Prof. Engel, Giessen mich um Aufnahme einer längeren Arbeit seines früheren Schülers Dr [...][1] in Worms in das Journal gebeten hat. Sie behandelt die allgemeinste mit der projectiven G_q[2] der Ebene ähnliche Gruppe von Berührungstransformationen, eine wichtige aber schwierige Aufgabe. Da E. in diesem Gebiete die erste Autorität ist, so schrieb ich ihm soeben, wir würden die Arbeit gern aufnehmen, wenn er sie genau kennte und sie uns empfehlen könnte. Ist das der Fall, so bat ich ihn, sie Ihnen direkt zu schicken, da wir dann keinen besseren Experten brauchten. Hoffentlich sind Sie dann auch damit einverstanden, sie zu nehmen; es ist ja eine wichtige Frage in einem interessanten Gebiete, die in der Arbeit behandelt und wohl auch wesentlich weiter geführt werden wird. — Haben Sie herzlichst Dank für Ihren Brief über den ich mich sehr freute und den ich bald eingehend beantworte. Viele herzliche Grüsse

Ihr K. H.

[1] vielleicht ‘Neumer’
[2] undeutlich

2.8 09.01.1934, Hensel an Hasse

Marburg a/L d. 9/1 1934

Die beiliegende Arbeit von K. Geissler glaube ich nicht zur Aufnahme empfehlen zu können. Ich bitte dazu den beiliegenden Brief der Verfasser zu vergleichen. In jedem Falle ist Vf. zu benachrichtigen unter Benutzung des von ihm beiliegenden Portos.

Viele Grüsse und besten Dank für Ihre freundlichen Zeilen.

Stets Ihr

K. Hensel

2.9 16.03.1934, Hensel an de Gruyter

Abschrift !

Marburg a.d. Lahn d. 16. März 1934

Breiteweg 7

Meine sehr geehrten Herren!

Ich danke Ihnen verbindlichst für Ihren freundlichen Brief vom 15. d.Mts. Auch ich freue mich ganz ausserordentlich, dass die Episode Math. Zeitschrift nun definitiv in für unser Journal günstiger Weise erledigt ist, und das die Tätigkeit von Herrn Professor Hasse in vollem Umfange unserer Zeitschrift erhalten bleibt.

Ich freue mich nach wie vor, dass es durch die Vereinbarung über das Honorar für den dritten in jedem Jahr erscheinenden Band Crelle möglich wurde, Herren Hasse unserer Zeitschrift zu erhalten, denn ich weiss, dass er wirklich für die gute Entwicklung derselben schlechthin unentbehrlich ist. Mit der von Ihnen gegebenen Erläuterung zu dieser Massregel bin ich auch einverstanden, und wir wollen versuchen durch geeignete Werbung besonders auch im Ausland ausgezeichnete Beiträge in möglichst grossem Umfang für uns zu gewinnen.

Ich werde selbst bei einer Erholungsreise nach Italien, die der schöne aber anstrengende Wintervorlesungsbetrieb für mich sehr notwendig machte, damit den Anfang machen; möchte es doch etwas nützen.

Wir wollen nur jetzt mit Energie drucken. Die 13 Seiten M S, die der neue Band 171 noch erfordert, werden zur Zeit wohl sicher da sein.

Dass Sie vorsichtshalber den Preis dieses Bandes auf RM 30.– festsetzen wollen scheint mir auch sehr richtig, doch hoffe ich zuversichtlich, dass die Bezieherzahl auf der bisherigen Höhe bleiben wird.

Ich habe Frau Prof. Schlesinger den von Ihnen gütigst mir überwiesenen Beitrag von RM 30.– für Ihres Mannes redaktionelle Tätigkeit am letzten Heft übermittelt und ich bin beauftragt, Ihnen ihren verbindlichsten Dank auszusprechen. Ich möchte noch hinzufügen, dass wir Prof. Schlesinger gerade eine besonders grosse Anzahl wertvoller Beiträge bedeutender Gelehrter zu verdanken hatten. Es wird nicht leicht sein, die durch seinen Tod verursachte grosse Lücke einigermassen auszufüllen.

Darf ich noch hinzufügen, dass ich für etwaige wichtige Briefe vom 17–21 April in Rom Hotel de la ville erreichbar bin.

Mit den besten Grüssen und Empfehlungen bin ich

Ihr ganz ergebener

gez. K. Hensel.

2.10 28.07.1934, Hasse an Hensel

H./Tr. 28. Juli 34

Lieber Herr Geheimrat!

Aus dem noch vorhandenen Material habe ich beiliegende Disposition für Band 172 Heft 2 zusammengestellt und auch gleich an de Gruyter geschickt, die schon danach gefragt hatten.

Würden Sie bitte die Plamitzersche Arbeit auch bald an de Gruyter einsenden, damit der Umfang festgestellt werden kann und man einen Plan für die weiteren Hefte machen kann. Sehr schön wäre es, wenn wir die in Aussicht gestellte Brendelsche Arbeit sehr bald bekommen könnten. Ich selbst habe vor 2 Tagen noch ein Manuskript von Davenport und mir eingesandt, ausserdem, wie Sie aus einer Mitteilung de Gruyters gesehen haben noch eine Arbeit von Schneider–Frankfurt über Transzendenz und eine Kleinigkeit von einem Schweden Petterson, der einige Wochen hier in Göttingen verbracht hat.

Nächsten Montag fahre ich noch einmal nach Berlin, um über meine Stellung hier mit Vahlen zu sprechen.

Mit herzlichen Grüssen stets Ihr

H. Hasse

2.11 23.08.1934, Hensel an Hasse, Postkarte

(Postkarte)

Lieber Freund. —

Ueber Ihre l. Karte habe ich mich sehr gefreut, wenn ich es auch sehr bedauere, dass Ihnen dieser wunderbare Zugspitzenblick so ganz und so unangenehm verhüllt gewesen ist; aber der Wettersteingrat muss ja herrlich und die Besteigung beneidenswert schön gewesen sein. So machen Sie nur weiter; das ist das Beste, was ich Ihnen jetzt wünschen kann. Ich quäle mich hier, Tschechokronen genug zu bekommen um nach Marienbad abreisen zu können. Leider aber will der Segen nicht genügend fliessen, so dass ich nicht weiss ob wir dorthin kommen können. Geht es nicht, so gehen wir nach Baden–Baden und von dort auf 14 Tage nach Berlin, worauf wir uns sehr freuen. Ich habe hier eine 9 grosse Seiten lange Arbeit von Herrn H. Kober, einem Schüler Knesers bekommen, welcher 1910 seinen Doctor in Breslau machte und Bd 140 eine *gute* Arbeit im Crelle veröffentlichte. Sie heisst "Transf. von Potenzen der Riemannschen ζ–Funktion und von verwandten Funktionen". Sie scheint mir recht gut und interessant zu sein. M. E. könnten wir sie ruhig nehmen, umso lieber weil wir Arbeiten *brauchen*. Soll ich sie annehmen und gleich zu de Gruyter schicken?

Ich selbst sitze sehr tief in mathematischer Arbeit, die mich *sehr* interessiert. Jetzt sehe ich Land. Sollte ich durchkommen, so schreibe ich Ihnen. Heute Ihnen Beiden herzlichste Grüsse und Wünsche Ihres

K. H.

2.12 07.09.1934, Hasse an Hensel

den 7. 9. 34

Lieber Herr Geheimrat!

Herzlichen Dank für die freundlichen Zeilen Ihrer Gattin und von Ihnen selbst. Wir sind seit Anfang dieser Woche wohlbehalten und gut erholt aus Partenkirchen nach Göttingen zurückgekehrt. Vor zwei Wochen schrieb ich Ihnen aus Partenkirchen, wahrscheinlich haben Sie diese Nachricht nicht bekommen. Ich stimmte darin der Annahme der Koberschen Arbeit über die Zetafunktion zu und teilte gleichzeitig mit, daß ich zwei Zusendungen bekommen habe, die wir wohl annehmen müssen, und die ich einstweilen schon zur Abschätzung nach Berlin geschickt habe: Deuring über Klassenkörpertheorie und Doetsch über Darbouxsche Integrale. Haben Sie Kober nach Berlin geschickt? Manuskripte werden jetzt dringend benötigt. Ich habe zudem noch eine Zusendung über analytische Geometrie (Harmonicalen) meines früheren Lehrers Wolff, die ich gerne aufgenommen hätte. Sie ist gestern zur Prüfung an Haupt gegangen.

Mit besten Ferienwünschen für Sie beide von uns beiden

stets Ihr

H. Hasse

2.13 08.09.1934, Hasse an Hensel

8. September 34

Lieber Herr Geheimrat!

Auf den heute bei mir eingegangenen und auch an Sie im Durchschlag gerichteten de Gruyter–Brief hin habe ich beiliegende Disposition entworfen, von der Heft 1 und 2 bereits früher festgelegt waren und nur Heft 3 jetzt neu gemacht ist.

Haben Sie wohl inzwischen außer der Arbeit von Kober noch Zusendungen für unser Journal bekommen?

Übermorgen reise ich auf 3 Tage zum Kongreß nach Pyrmont. Ich bin sehr gespannt, wie sich das Schicksal der D.M.V. dort entscheiden wird.

Mit herzlichen Grüßen

stets Ihr

H. Hasse

2.14 10.09.1934, Hensel an Hasse

Marienbad Hot. Rauscher 10–9–34.

Lieber Herr Professor.

Herzlichen Dank für Ihre Karte und Ihren heutigen Brief. Ich freue mich *sehr*, aus Ihrer Disposition für Crelle 172^{1-3} zu sehen, dass auch dieser Band voll gesichert erscheint, denn auch Heft IV wird ja mit Kober (ca 12 Seiten) und Wolff, dem man wohl ca 8 Seiten zurechnen kann, und der doch hoffentlich auch genommen werden kann, was mich ganz besonders freuen würde, auf 58 Seiten kommen, und 6 Seiten werden doch schon noch dazu kommen; ich hoffe eigentlich sicher, dass ich selbst mit meinen Ueberlegungen die hier ganz gut fortschreiten, zur Zeit werde fertig werden können; die Resultate sind für mich sehr interessant und ganz sicher neu. — *Dass* wir aber so weit kommen ist vollkommen Ihr Verdienst, denn es ist wirklich bewundernswert, mit welcher Fülle von schönen Arbeiten Sie das Journal und die Wissenschaft beschenken wollen. Die beiden ersten Arbeiten (in Heft I) kann ich mir nach dem was Sie mir persönlich und in Ihrer Vorlesg gesagt haben, ganz gut denken, ebenso die kleine Arbeit über ternäre Formen deren Entstehung ich wohl durch meine Bitte an Sie am Schluss meiner Wintervorlesung beschleunigt habe. Aber dann kommt die Arbeit über "Unverzweigte Körper" und die grosse "Davenport–Hasse", auf die ich mich beide riesig freue mit grosser Spannung; die *Richtung* der letzteren kann ich mir auch gut vorstellen. Es ist wirklich *sehr* bewundernswert, was Ihnen in dieser schweren und aufgeregten Zeit von schöner bester Wissenschaft eingefallen ist. Gehen Sie nur nicht in *diesem* Tempo weiter, denn jetzt steht Ihnen doch auch so viele äussere Arbeit bevor, die einen grossen Mann fordert. Ich bin ja auch über die D–M–V Frage in grosser Sorge und ich wäre Ihnen nach Ihrer Rückkehr von Pyrmont für ein andeutendes Wort auch darüber von Herzen dankbar.

Nun noch ein Wort über die Arbeit Kober. Ich hatte sie bei meiner Abreise noch nicht an de Gruyter gesandt, weil Herr K. mir noch einen kurzen Zusatz in Aussicht gestellt hatte. Dieser Zusatz ist gestern eingetroffen auch er scheint mir interessant zu sein, und ich möchte für die Aufnahme der Arbeit auch jetzt stimmen. Ich möchte aber doch sehr gern, dass Sie, dem doch dieses Gebiet so nahe und am Herzen liegt, über die Aufnahme der Arbeit ganz von sich aus entscheiden können, denn ich bin nicht so in diesen Fragen darin, um entscheiden zu können, ob das hier Gefundene neu ist, und ganz durchrechnen konnte ich sie auch nicht, um festzustellen ob sie keinen Fehler enthält. Sie aber erkennen das mit einem Blick. So schicke ich Ihnen morgen jenen Zusatz als Drucksache, und lasse Ihnen zugleich von Marburg aus die übrige Arbeit zugehen. Wenn Sie auch der Ansicht sind, dass wir sie nehmen können, so schicken Sie doch bitte Herrn Dr. Kober Breslau Opitzstr 68^{I} eine Benachrichtigung und schicken Sie zugleich bitte die ganze Arbeit zur Abschätzung an de Gr.

Mit herzlichsten Grüssen und besten Wünschen bin ich stets Ihr

K. Hensel.

Die Kobersche Gebrauchsanweisung für diesen Zusatz liegt diesem Briefe bei.

2.15 17.10.1934, Hensel an Hasse

Marburg a/L d. 17–10–1934

Lieber Herr Professor.

Seit drei Tagen sind wir nun wieder in Marburg, das mir ohne sie garnicht recht schmecken will. Ich hoffe doch sehr, dass der schriftliche Gedankenaustausch einigen Ersatz bieten wird; aber so schön wie bisher kann es doch nicht mehr werden. Meine Gedanken sind viel bei Ihnen in Göttingen, und ich möchte gern sehr viel Gutes von Ihnen hören. Dazu ist ja augenblicklich noch reichlich Raum vorhanden. Augenblicklich denke ich mit einiger Besorgniss an Ihren siebenten Besuch in B. Ich glaube ja auch, dass die Zusammenarbeit mit T. auf dieser Grundlage sehr schwer und eigentlich nicht recht möglich ist, ich bin aber überzeugt, dass sie das einsehen müssen, und dass Sie bei Ihrem über allem Kleinlichen stehenden Charakter die rechten Worte und Gründe finden werden um das Unerlässliche durchzusetzen. Keinesfalls aber dürfen Sie der Stelle verloren gehen, an die Sie jetzt wirklich gehören; das muss jetzt der Allem voranstehende Gedanke sein. Der zweite Gedanke aber muss sein, dass Sie sich nicht durch diese Dinge zu sehr angreifen lassen, so sehr dass Ihre Gesundheit darunter leidet.

Ueber unsere Berufung hierher war ich auch des Todes erstaunt; persönlich ist es mir eine grosse Freude, dass dieser arme Mann endlich wieder in eine Tätigkeit eingesetzt wird, nachdem er $1^1/_2$ Jahre in Sorge und Ungewissheit gelebt hat. Er und seine Frau haben meinem armen lieben Sohne sehr nahe gestanden, dessen Schicksal ja auch so schwer gewesen ist (sein Todestag ist morgen, ich schreibe diesen Brief in schmerzlichstem Gedenken an ihn). Deshalb wollen wir Beide alles tun, um ihm seinen neuen Aufenthalt möglichst angenehm zu machen, und sicher werde ich von ihm auch viel lernen und grosse Anregung haben. Aber im Interesse der Sache finde ich es schade, dass unsere Vorschläge so vollständig missachtet worden sind und es tut mir furchtbar leid, dass wir unseren Erlanger Kollegen nicht hierher bekommen, obwohl unser Rector noch am Tage von R's Ernennung in Berlin die feste Zusicherung erhielt, dass S. hierher kommen sollte, dass alles festgelegt sei.

Was nun Crelle angeht, so habe ich mit Häntzel[1] fest verabredet, dass wir eine grosse Arbeit baldigst von ihm bekommen. Auch von mir selbst wird

[1] Name kommt im Verlauf noch in verschiedenen Schreibweisen vor.

wohl bald eine grössere Arbeit fertig sein. Ausserdem wollte ich Reidemeister bitten, uns doch bald eine Arbeit zu geben. Ich glaube dass er etwas Gutes fertig hat. Ist Ihnen das recht? Ausserdem hat Robert Remak eine grössere und, wie mir scheint, recht interessante grössere Arbeit fast fertig. Aber *soll* ich ihn darum bitten? Er ist ein nicht sehr bequemer Mitarbeiter, wie wir wissen, jedoch könnte man ihm Bedingungen auferlegen. Aber er ist, wie wir auch wissen, nicht arisch und zu viele solche Beiträge könnten Schwierigkeiten geben. Ich glaube aber, es würde gehen. Bitte schreiben Sie mir auch darüber Ihre Ansicht. Jedenfalls glaube ich, unser schöner Plan mit Crelle wird sich doch realisieren lassen.

Nun leben Sie wohl, lieber Freund, seien Sie und Ihre liebe Frau herzlichst von uns Beiden gegrüsst und lassen Sie bald etwas und hoffentlich etwas Gutes von sich hören. Herzlichst Ihr

Kurt Hensel

Bitte grüssen Sie doch meinen alten Freund Hilbert Herzlichst wenn Sie ihn sehen und Dr Ullrich[2] und viele mehr.

[2] Name nicht eindeutig

2.16 19.10.1934, Hasse an Hensel

19. Oktober 34

Lieber Herr Geheimrat!

Vielen herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief▶, den Sie mir gleich nach Ihrer Rückkehr aus den Ferien geschrieben haben. Die Lage hier in Göttingen beginnt sich zu klären. Wenn auch wahrscheinlich nicht 100% meiner Forderungen erreicht werden, so hat die Schärfe, in der ich sie gestellt habe, denn doch zumindest schon jetzt den Erfolg gehabt, dass der Störungsfaktor von allen massgebenden Stellen in seiner wahren Natur erkannt und dadurch in seiner Macht eingeschränkt worden ist. Im übrigen werde ich wohl im Laufe der nächsten Woche selbst noch einmal nach Berlin fahren müssen, um in einer vertraulichen Aussprache den durch Einwirkung von dritter Seite erreichten Erfolg zu sichern und auszubauen.

Zur Wiederkehr des Todestages Ihres lieben Sohnes möchte ich Ihnen beiden, auch zugleich im Namen meiner Frau, warm die Hand drücken; ich kann mir denken, wie schwer es für Sie ist, jetzt die schrecklichen Oktobertage des vorigen Jahres noch einmal in Gedanken zu durchleben, besonders wo Sie durch Herrn Reidemeister so sehr an alles erinnnert werden.

Für F.K. Schmidts Zukunft habe ich ernste Befürchtungen, seine Aussichten in Jena werden, wie ich gehört habe, von anderer Seite bedroht. Es wäre wirklich schade, wenn dieser ausgezeichnete Mensch, nicht zuletzt durch seine Verquickung mit dem Göttinger Sommerwirbel, jetzt in Deutschland nicht den Platz finden würde, der ihm gebührt.

Die Aussichten für Crelle beginnen sich erfreulicherweise zu bessern. Es ist schön, dass Sie so gute Nachrichten in dieser Hinsicht geben konnten. Mit Ihrer eigenen Arbeit und der von Haentzel können wir demnach bestimmt rechnen und auch Reidemeister wird bei seinem grossen Fleiss sicherlich bald etwas liefern. Remak ist sicherlich kein angenehmer Autor, nach den früheren Erfahrungen zu urteilen, aber das dürfen wir doch nicht in Rechnung stellen. Ich würde dafür sein, ihn um seine neue grössere Arbeit zu bitten. Auch die Bedenken, die Sie hinsichtlich seiner Abstammung geäussert haben, möchte ich nicht teilen, denn es war doch ausdrücklich mit dem Verlag besprochen, dass wir gelegentlich nichtarische Publikationen, besonders wenn sie ausgezeichnet sind, aufnehmen wollen, und ein Übermass haben wir gewiss in der letzten Zeit nicht gehabt. Ich selbst habe in den letzten Tagen noch drei Zusendungen für Crelle bekommen, nämlich eine hochinteressante Arbeit von Deuring: "Über die Zetafunktionen quadratischer Formen, seine für Göttingen in Aussicht genommene Habilitationsarbeit, ferner eine Fortsetzung der Arbeit von Studienrat K. Bögel, Halberstadt über "Mehrdimensionale Differentiationen, deren 1. Teil wir in Band 170 gedruckt haben und schliesslich eine kurze Note von Herrn Reichardt über "Die Diskriminante in hyperkomplexen Zahlsystemen". Alle drei Arbeiten können wir wohl ohne Bedenken annehmen. Ich habe sie nach Berlin zur Feststellung des Umfanges geschickt.

Ihre freundlichen Grüsse an Hilbert und Ullrich werde ich ausrichten. Seien Sie selbst und Frau Geheimrat sehr herzlich gegrüsst von

Ihrem

H. Hasse

2.17 26.10.1934, Hasse an Hensel

26. Oktober 34

Lieber Herr Geheimrat!

Die lange erwartete Aussprache in Berlin hat nun am vorigen Mittwoch stattgefunden. Es ging hart auf hart. Ich habe immerhin ein so befriedigendes Zugeständnis bekommen, dass ich mich entschlossen habe, jedenfalls noch den kommenden Winter hier auszuhalten. Was dann wird, muss man abwarten.

Übrigens traf ich Herrn Reidemeister in Berlin. Er war auf dem Wege nach Hamburg und wird von dort aus dann nach Marburg fahren. Wie er mir sagte, wird er bei Frau Dr. Flothmann wohnen.

Beiliegend habe ich eine Disposition für Band 172/4 zusammen gestellt, die hoffentlich Ihren Beifall findet. Gerade heute ging übrigens die nach meinen Anweisungen umgearbeitete Kobersche Arbeit wieder ein. Ich habe sie noch nicht durchgesehen, denke aber, dass wir sie jetzt nehmen können.

Beiliegenden Ausschnitt aus dem Hannoverschen Kurier fand ich zufällig auf meiner Reise. Ich kann nicht glauben, dass Sie wirklich der Autor von dieser Geistlosigkeit sind, aber vielleicht macht sie Ihnen etwas Spass.

Mit herzlichen Grüssen allerseits

stets Ihr

H. Hasse

2 Anlagen

2.18 08.11.1934, Hensel an Hasse

Marburg a.d. Lahn d. 8. November 1934.

Lieber Herr Hasse.

Gern hätte ich Ihren Brief vom 26. Okt.▶ schon früher beantwortet, aber es kam der Beginn der Vorlesungen, der programmässig, allerdings mit sehr wenig Zuhörern vor sich ging, auch bei Reidemeister, der aber ganz zufrieden ist, und die Vorlesung über Algebren mit Passion hielt; er hat jetzt auch eine schöne Wohnung (im Bröckingschen[1] Hause mit dem wundervollen Garten in der Universitätsstrasse bei der Bismarckstrasse gemietet und freut sich auch darüber. Bis jetzt geht auch sonst alles gut. Heute fährt Herr Krafft allein nach Königsberg, wo er in diesem Semester die Mathematik vertreten soll. Es tut mir leid, ihn im Winter zu vermissen, aber ich bin doch froh, dass etwas mit ihm geschieht; Sie haben wohl auch für ihn gesprochen. Herr R. will im S. S. Arithmetische Theorie der algebr. Fkt einer Variablen lesen, was mich sehr freut.

Leider traf uns wieder ein schwerer Verlust: der Bruder meiner Frau der Hygieniker Prof. Hahn in Berlin ist leider einem Herzleiden erlegen. Meine Frau, die ihn ganz besonders liebte ist nach Berlin gefahren. Wir sahen ihn noch vor wenigen Tagen und hatten grosse Freude an diesem ausgezeichneten wertvollen Manne; auch für mich ist sein Tod ein sehr schwerer Verlust; wir standen uns seit unserer Kinderzeit nahe.

Ich bin aufs Höchste auf Nachrichten aus Göttingen gespannt. Ihre Nachrichten haben mich doch gefreut; ich glaube und hoffe, dass Sie am Ende des Winters über Alles gute Nachricht geben können, aber vorher erfahre ich doch noch von Ihrem Ergehen?

Von R. Remak erhielt ich einen Brief mit warmem Danke, aber die Arbeit von der er mir erzählte wird wohl erst in 5 Monaten fertig sein. Vorher würde er mit einer kleineren Arbeit zu Rande kommen. Reidemeister wird sehr gern möglichst bald einen Beitrag liefern. Ihre Disposition für Bd 172/4 ist sehr schön ich bin *sehr* mit ihr einverstanden.

Ich würde mich sehr über eine gute Nachricht von Ihnen und Ihrer lieben Gattin freuen, die ich herzlich zu grüssen bitte.

[1] Name schwer lesbar

Herzliche Grüsse Ihnen Beiden

stets Ihr

K. Hensel

Die beiliegende Notiz müssen wir doch wieder drucken?

2.19 12.11.1934, Hasse an Hensel

Göttingen, den 12. November 1934.

Lieber Herr Geheimrat!

Es hat uns sehr leid getan, zu hören, dass Sie durch den Tod Ihres Herrn Schwagers einen neuen schweren Verlust in Ihrer Familie erfahren haben. Wir drücken Ihnen und Frau Geheimrat im Geiste warm die Hand.

Hier hat der Beginn des Semesters die erregten Geister auf die sachliche Arbeit konzentriert. Die Zusammenarbeit mit der Studentenschaft vollzieht sich, trotz der oder jener sachlichen Meinungsverschiedenheit, zufriedenstellend. Die grossen Entscheidungen über die zukünftige Gestaltung der Dinge hier liegen in der Hand des Ministeriums und man muss hoffen, dass sie bald und im befriedigenden Sinne fallen.

Die Notiz über Trefftz habe ich nach Berlin zum Druck weiter gegeben.

Weitere Eingänge für Crelle: *Kober* wird gegenwärtig von Rohrbach, dem Hilfsarbeiter von de Gruyter in Berlin, geprüft. *Wolff* (Über harmonikale Abbildungen) ist wieder eingegangen, nach Vorschlägen von Haupt umgearbeitet; ich habe diese Arbeit jetzt angenommen. Von *W. Franz* bekomme ich eine Arbeit über "Die Teilwerte der komplexen Multiplikation", die auf meine Anregung hin zustande gekommen ist. Ich stehe noch im Briefwechsel mit ihm darüber; die Arbeit scheint mir brauchbar. Von *F.K. Schmidt* erwarte ich nächster Tage seine lange versprochene Arbeit zur Theorie der unendlichen inseparablen Körper, eine wichtige Fortführung der Steinitzschen Theorie. Vielleicht bekomme ich auch noch eine weitere Arbeit von ihm über "Algebraische Funktionskörper mit unvollkommenem Konstantenkörper. Dass er seit Anfang des Semesters die Nachfolge Haussners in Jena angetreten hat, werden Sie gehört haben. Ich freue mich sehr, dass diesem verdienten Mann nun endlich Gerechtigkeit geschehen ist. Gestern bekam ich noch eine sehr schöne Arbeit meines hiesigen Assistenten Dr. *Witt* über das "Existenztheorem der Klassenkörpertheorie bei algebraischen Funktionenkörpern, die ausserdem noch einige geistreiche Vereinfachungen und Ergänzungen zu Schlussweisen der Klassenkörpertheorie enthält.

Wie steht es mit der in Aussicht stehenden Arbeit von *Haentzel*? Von *Reidemeister* und *Remak* dürfen wir ja nach Ihrer Mitteilung in Kürze etwas erwarten und ebenso von *Ihnen* selbst. Da haben wir dann doch eine ganze

Menge, sodass wir für die Zukunft des Journals zunächst keine Sorge zu haben brauchen.

Zu mathematischen Arbeiten komme ich noch immer sehr wenig, es ist tagsüber viel an allem möglichen anderen Dingen zu tun und zu besprechen und abends bin ich fast immer zu müde. In unserem kleinen Heim fühlen wir uns sehr wohl. Wir haben mancherlei Besuch gehabt, auch von ausserhalb. Hoffentlich können wir auch Sie bald einmal hier begrüssen.

Mit herzlichen Grüssen von Haus zu Haus Ihr

H. Hasse

2.20 30.11.1934, Hasse an Hensel

Göttingen, den 30. November 1934.

Lieber Herr Geheimrat!

Herzlichen Dank für Ihre freundliche Karte! Die Arbeit von Herrn Dr. Neumer ging mir gestern durch Herrn Engel zu. Ich stimme der Aufnahme aufgrund der Empfehlung Engels ebenfalls gern zu. Ich werde die Arbeit gleich an die Verleger nach Berlin schicken und benachrichtige gleichzeitig Herrn Engel und den Verfasser von der Annahme.

Sehr dankbar wäre ich Ihnen, wenn Sie mir in dem in Aussicht gestellten Briefe auch schreiben wollten, an welche Stelle ich die Abzahlung der Hälfte meiner grossen Schuld an Sie leisten kann — ich möchte das gern bald erledigen.

Mit herzlichen Grüssen

stets Ihr

H. Hasse

2.21 05.03.1935, Hensel an Hasse

Marburg a.d. Lahn d. 5. März 1935.

Lieber Herr Hasse

Morgen früh, unwahrscheinlich früh reisen wir nach Locarno (Hotel Reber au lac) ab und wollen erst am 3 April Abends zurückkommen. Da möchte ich Ihnen in grösster Herzlichkeit und grösster Eile Lebewohl sagen und die besten Wünsche für Ihre Erholung und Erfrischung in England zufügen.

Ich füge noch drei Arbeiten für Crelle hinzu (folgen anbei als Druckms), deren Aufnahme ich Ihrem Ermessen anheimstelle.

Die erste kleine Arbeit von unserem Kollegen Krafft über den oft behandelten und oft bewiesenen Weierstrass'schen Vorbereitungssatz können wir m.E. sehr wohl aufnehmen sie scheint mir sehr einfach und hübsch zu sein, unterscheidet sich auch genügend von unserer [...]'schen Arbeit. Ich glaube auch, dass es für Krafft wichtig ist, dass wieder einmal etwas von ihm erscheint.

Was die Arbeit von Hawkesworth anbetrifft, so weiss ich nicht, ob wir starken Bedarf an Material haben, sonst wäre ich auch etwas "lukewarm" für Arbeiten dieser Art. Aber vielleicht würde ein Specialist hierfür ein angewandter Mathematiker Schönheiten und Fortschritte entdecken, die eine ganz kurze Note rechtfertigen könnte.

Aehnlich stünde es vielleicht auch mit der dritten Arbeit, für welche wohl auch unser Journal nicht ganz der rechte Ort sein würde.

Alle 3 Herren müssten aber wohl eine Empfangsbestätigung erhalten und eine Annahme oder Ablehnung.

Ich widerstehe der Versuchung noch über meine eigenen Pläne Ihnen zu erzählen, denn die Zeit drängt dringend.

Viele herzliche Grüsse Ihnen Beiden von meiner Frau und mir, die wir Sie *sehr* vermissen.

In alter Treue Ihr

K. Hensel

2.22 02.04.1935, Hasse an Hensel

2. April 1935.

Lieber Herr Geheimrat,

herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief▶, den Sie mir kurz vor Ihrer Abreise schrieben. Er erreichte mich doch erst in England, wo wir einen schönen und eindrucksvollen Monat verbrachten. Wir waren erst 14 Tage in Cambridge, dort war ein sehr reges mathematisches Leben, später haben wir noch Mordell in Manchester besucht und sind dann eine Woche in Wales und Südengland herumgefahren. Hin– und Rückreise haben wir mit den Dampfern der Hamburg–Amerika–Linie gemacht. Das war auch ein schönes Erlebnis.

Die Arbeit von Krafft habe ich mir angesehen, ich stimme Ihnen gern zu, dass wir sie drucken sollen, nur habe ich Krafft gebeten, doch in der Einleitung noch zu sagen, wie sich sein Beweis von den bereits vorhandenen abhebt.

Sehr amüsiert hat mich die Arbeit von Hawkesworth und seine launigen philatelistischen Briefe dazu. Ich habe meinen englischen Freund Sadler, der Spezialist für numerisches Rechnen am Royal Naval College, Greenwich ist und dessen numerischem Befehl Sonne, Mond und Sterne gehorchen müssen, um sein Urteil über diese Arbeit gefragt. Ich bin selbst recht skeptisch über die Geeignetheit für uns.

Bei der dritten von Ihnen zugesandten Arbeit von Prof. Hanftmann über die Architektur des Würzburger Domes teile ich Ihre Ansicht, dass unser Journal keinesfalls der richtige Ort dafür ist. Ich habe das Material an den Verfasser mit einigen freundlichen Worten zurückgesandt.

Bei mir sind in letzter Zeit noch drei kleine Manuskripte eingegangen: 1.) Petterson (Schweden) über Irreduzibilität von Polynomen. In der äusseren Form ist diese Arbeit ganz unfertig. Der Verfasser hatte mich auch von vornherein gebeten, ihm Anregungen für ev. Aenderungen zu schreiben. Ich habe damit jetzt unseren Dr. Rohrbach beauftragt. 2.) Witt über verschränkte Produkte, eine schöne, ganz kurze Arbeit von höchstens 2 Seiten, in der eine Verallgemeinerung mit sehr elegantem Beweis einer der formalen Hauptregeln aus der Theorie der verschränkten Produkte entwickelt wird. 3.) Eine Arbeit des Japaners Sugawara, in der versucht wird, eine von mir ausgesprochene Vermutung in der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen zu bestätigen. Ein früherer in Japan veröffentlichter Versuch des Verfassers wurde von Herrn Franz als fehlerhaft herausgestellt. Ich habe jetzt wieder Herrn Franz gebeten, das neue Manuskript auf seine Richtigkeit zu prüfen.

Herr E.A. Weiss, Bonn, musste kürzlich sein bereits abgesetztes Manuskript über apolare Flächen, das in Band 172 | 2 veröffentlicht werden sollte, zurückziehen, da sich inzwischen herausstellte, dass die Hauptergebnisse bereits vor langen Jahren von Severi gefunden worden waren. Auf Grund von Verhandlungen mit dem Verlag hat sich Herr Weiss bereit erklärt, die entstandenen Unkosten von 100,– Mk. zu tragen. Ich habe anstelle dieser Arbeit die gleich lange von Holzer über die Fermatsche Gleichung für Heft 2 vorgesehen.

In England traf ich Herrn Watson, dieser fragte mich wegen eines auf Kronecker bezüglichen Zitates in Dicksons history of the theory of numbers Bd. 3 Seite 109. Dort wird ohne nähere Angabe festgestellt, dass Kronecker mit Hilfe von Klassenzahl–Relationen die Klassenzahl der ungeraden binären quadratischen Formen für alle ungeraden Diskriminanten von 1–10 000 berechnet habe. Wissen Sie wohl etwas darüber, wo diese Kroneckerschen Rechnungen zu finden sind? Ich versprach Watson Erkundigungen darüber einzuziehen.

Hoffentlich haben Sie auf Ihrer Locarno–Reise eine gute Erholung gefunden und können jetzt mit frischer Kraft ins neue Semester gehen.

Mit herzlichen Grüssen

stets Ihr

H. Hasse

2.23 15.04.1935, Hasse an Hensel

15. April 1935.

Lieber Herr Geheimrat!

Wenn es vor zwei Wochen noch ziemlich trübe mit den Aussichten für unsere nächsten Crelle–Hefte stand, so scheint es jetzt wieder etwas aufwärts zu gehen. Ich habe vor einigen Tagen zwei grössere Arbeiten des Ungarn *L. Rédei* über die Pellsche Gleichung und gewisse Dichtigkeitsfragen im Zusammenhang damit, bekommen, deren Inhalt ich aus mündlichen Berichten des Verfassers — er ist augenblicklich als Humboldt–Stipendiat hier — bereits kenne und die ich zur Aufnahme empfehlen kann. Ferner ist Herr *Witt*, der Fleissigste und Produktivste von uns allen hier, gegenwärtig mit Aufschreiben zweier Arbeiten über quadratische Formen und über zyklische Körper von Charakteristik p beschäftigt, von denen mindestens eine uns sicher ist. Das sind ganz besonders schöne Sachen. Weiter hat mir Herr *Richard Brauer* die Anregung gegeben, seine allerdings bereits vor 5 Jahren geschriebene Begründung der modernen Arithmetik Theorie der Gruppen linearer Substitution im Anschluss an Frobenius und Schur als eine Art Bericht im Crelle Journal abzudrucken. Ich möchte das sehr befürworten. Diese Art der Begründung ist ein Seiten–Stück zu der Begründung mittels hyperkomplexer Zahlensysteme, das sein selbständiges Interesse für alle die hat, die zwar die Gruppen linearer Substitutionen in ihren Grundzügen kennen, denen aber die moderne Theorie der hyperkomplexen Zahlen fremd ist. Sie gibt implicite auch eine Einführung in die letztere Theorie. Die Anzahl derer, die einen solchen Bericht begrüssen würden, noch dazu wenn er in der klaren und geschickten Schreibweise R. Brauers verfasst ist, ist sicher gross und noch sicherer grösser als die Anzahl der Interessenten an manchen anderen Crelle Arbeiten. Natürlich habe ich Herrn Brauer geschrieben, dass er sein damaliges Manuskript noch einmal überarbeiten und dem neuesten Stande anpassen, sowie auch auf die Beziehung zur Theorie der hyperkomplexen Systeme laufend eingehen müsse. Sodann habe ich noch in Aussicht eine kleinere Arbeit von Oberstudienrat *Neiss* über die Unmöglichkeit, ein Dreieck aus seinen drei Winkelhalbierenden algebraisch zu berechnen. Schon vor drei Jahren hatte Herr Neiss ein Manuskript darüber eingesandt. Dies war aber noch fehlerhaft und jetzt hat mir der Autor die Zusendung eines berichtigten Manuskriptes in Kürze versprochen. Schliesslich möchte ich anregen, dass wir unter den heutigen Umständen nicht mehr allzu engherzig mit der Aufnahme von Dissertationen sind, sofern es sich um wirklich erstklassiges Material handelt. Dafür kann ich in zwei Fällen, die mir gerade bekannt sind, einstehen: Es handelt sich 1.) um die Dissertation des mit Herrn Ullrich hierher gekommenen Herrn *Wagner*, die eine Untersuchung im Anschluss an den damaligen Nevanlinnaschen Vortrag in Marburg über Riemannsche Flächen mit endlich vielen logarithmischen Windungspunkten durchführt. Was Nevanlinna nur für $n = 3$ und 4 konnte, kann Wagner für beliebiges n. Herr Ullrich versichert, dass die Arbeit sich nach Qualität und Form würdig in die Reihe der Nevanlinnaschen Arbeiten einordnet.

2.) habe ich selbst hier meinen damaligen Hauptopponenten Herrn Teichmüller als Doktoranden mit dem Thema über abstrakte Theorie der linearen Operatoren in abstrakten linearen Räumen. Das Thema ist an sich aus dem Seminar von Rellich über Spektraltheorie hervorgegangen, gehört aber sowohl der Methodik als auch dem Inhalt nach eigentlich in die abstrakte Algebra (Richtung J. v. Neumann). Teichmüller behandelt die Theorie der Operatoren in einem solchen Hilbertschen Raum, dessen Koordinaten Quaternionen anstatt komplexe Zahlen sind. Wie oft in der Mathematik, so hat auch hier die Betrachtung eines so allgemeinen Koordinatenbereiches zu einer erheblichen Vereinfachung der klassischen speziellen Theorie geführt. Dies wird gleichzeitig in Teichmüllers Arbeit mitgemacht. Auch diese Arbeit kann ich zur Aufnahme warm empfehlen. Sie wird diesen Sommer fertig werden.

Zu meiner Freude habe ich auch von Herrn Franz gehört, dass sowohl er noch zwei Arbeiten geschrieben hat, die er uns geben will, und dass auch Herr Reidemeister eine seiner versprochenen Arbeiten fertig hat. Da wir augenblicklich dringend Material brauchen, so wäre ich Ihnen recht dankbar für eine baldige Zusendung der bereits in Ihren Händen befindlichen Arbeiten von Franz und Reidemeister, sowie etwaiger weiterer noch bei Ihnen eingegangener Arbeiten.

Die Arbeit von Hawkesworth, von der ich neulich schrieb, ist aus der britischen Admiralität mit vernichtender Kritik zurückgekommen und schwimmt bereits wieder dorthin, woher sie kam.

Gleichzeitig gehen Ihnen die ersten Blätter der von Herrn Boehle unter meiner Leitung angefertigten Ausarbeitung meiner Vorlesung zu. Sie erhalten jetzt laufend die Fortsetzungen.

Zu Ihrer Unterhaltung möchte ich Ihnen noch die beiliegenden Denkaufgaben schicken, von denen Sie auf Wunsch die wöchentlichen Fortsetzungen erhalten können.

Mit herzlichen Grüssen von Haus zu Haus und besten Wünschen für das Osterfest

stets Ihr

H. Hasse

2.24 20.04.1935, Hensel an Hasse

Marburg a.d. Lahn d. 20–4–1935.

Lieber Herr Professor.

Auch ich glaube, dass die Aussichten für unsere Crellehefte der nächsten Zukunft sehr gut sind; über die Beiträge, welche Sie in Aussicht stellen, bin ich hocherfreut. Besonders auf Herrn Witt freue ich mich sehr, aber auch die Idee von Brauer ist mir ausserordentlich sympathisch, denn der Aufbau der Frobenius–Schurschen Theorie der Gruppen linearer Subst. ist wundervoll und liegt mir sehr nahe. Ich bin von Herzen dafür mit der Aufnahme bedeutender Dissertationen nicht zu engherzig zu sein, *wenn* wir den Widerstand des Verlages überwinden können; hoffentlich haben sie sich dort nicht zu fest gebunden. Man müsste jedenfalls jeden Verweis, dass die Arbeit eine Diss ist, streng unterdrücken; das kann ja durch einen Umschlag nachher nachgeholt werden. Jedenfalls sollten wir uns die schönen Arbeiten von Wagner und Teichmüller nicht entgehen lassen.

Ich selbst schicke Ihnen heute 5 sehr schöne und brauchbare neue M. S. für Crelle, die wir m. E. wohl alle nehmen können, wenn ich auch die Arbeiten von Herrn Reidemeister (sehr interessant) und die anschliessende von Herrn Franz nicht zu beurteilen in der Lage bin. Bei letzterem bin ich aber sehr erfreut, dass er doch jetzt schön in die eigene Arbeit hereinzukommen scheint. Ich würde mich *sehr* freuen, wenn dieser sehr wertvolle Mann der akademischen Laufbahn erhalten werden könnte. — Dass wir die durch Herrn Kowalewski so warm empfohlene Arbeit von Remak gut nehmen können scheint mir auch zweifellos. Auch die Gruppenarbeit von Grün, der ja schon eine wertvolle Arbeit bei mir publiciert hat erscheint mir der Veröffentlichung wert. Die Arbeit von Mayer könnte ja wohl noch von einem Kenner beurteilt werden, aber mir scheint sie auch wertvoll zu sein. —

Wie sehr schmerzlich ist die Nachricht vom Tode unserer lieben und verehrten Emmy Nöther; welch schwerer Verlust für unsere Wissenschaft und ganz besonders für *unsere* Wissenschaft ist ihr Hingang. Auch persönlich ist es mir ein Schmerz, dass sie von uns gegangen ist, wenn ich selbst sie wohl sicher nicht mehr wiedergesehen hätte. Es war aber so schön, sie glücklich und in erfolgreichem Fortschreiten zu wissen; das war mir wirklich ein Aequivalent für so viele Trauerbotschaften und Enttäuschungen. Es ist schwer solche Nachrichten zu empfangen und doch den Kopf oben zu halten und seine nächste Pflicht zu tun.

Diese letztere Aufgabe wurde mir wirklich *sehr* erleichtert und verschönt durch den Anfang Ihres und unseres Buches, das mir einen sehr schönen Eindruck gemacht hat. Ich habe die Blätter schon mehrmals gelesen, aber immer noch nicht genug. Ich selbst halte ja jetzt auch diese Vorlesung über elementare Zahlentheorie und naturgemäss mache ich manches anders, aber ich finde Ihr Vorgehen so einheitlich, aus einem Gusse, dass ich glaube, die Sache könnte nur verlieren, wenn Sie meinem Wege dabei auch Rechnung trügen. Ich möchte Ihnen aber doch einige Blätter meiner Vorlesung senden, bitte Sie aber dringend, sie nur als "schätzbares Material" zu gebrauchen und mir *keinesfalls* zu begründen, warum Sie mitunter andere Wege gehen; das würde Ihnen nur unnütz Zeit nehmen. Vielleicht finden Sie aber meine Einführung der $\mathfrak{p}$–adischen Zahlen, die ich mir vor $1^1/_2$ Jahren stark durchdacht habe, jetzt brauchbar; das würde mich sehr freuen. Die Manuskriptseiten darf ich dann wohl wieder haben; Ihre Bogen darf ich vielleicht behalten, um sie auch öfter ordentlich lesen und durcharbeiten zu können?

Sehr schön sind die englischen Denkaufgaben. Ich habe im Verein mit meinem ältesten Enkel, der jetzt eben mit Auszeichnung in Salem das Abitur bestanden hat und jetzt auf 1/2 bis 1 Jahr zum Studium nach England geht, der übrigens ein prächtiger Junge geworden ist die Tischaufgabe richtig gelöst, wodurch sich überraschende Einblicke in die Verwandtschaftsverhältnisse der einen Familie ergeben haben. Wir bleiben jetzt um die Mordaufgabe bemüht. Ich wäre sehr dankbar, wenn ich auch weitere Aufgaben erhalten dürfte.

Nun leben Sie wohl, mein lieber Freund; ich hoffe und wünsche, dass die Erholung von dem schönen englischen Aufenthalt für das Göttinger Semester vorhält und Ihnen die Kraft giebt das schöne Buch ebenso schön weiter zu führen. Vielleicht könnten wir uns einmal bald etwa in Kassel für ein kleines Wochenende treffen? Man kann doch eine Menge mündlich in kurzer Zeit besprechen.

Meine Frau grüsst Sie Beide herzlichst, ich ebenso. Stets

Ihr

K. Hensel

2.25 26.04.1935, Hasse an Hensel

26. April 1935.

Lieber Herr Geheimrat!

Herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief vom 20. April▶ und die reichhaltige Sendung für Crelle. Ich möchte Ihnen zunächst über die Crelle–Sachen berichten.

1) An *R. Brauer* habe ich geschrieben und ihn um Fertigmachung seiner grossen Ausarbeitung über lineare Substitutionsgruppen für den Druck gebeten.

2) Ich werde beim Verleger durchzusetzen bemüht sein, dass wir die Dissertationen *Wagner* und *Teichmüller* aufnehmen können.

3) Die Arbeiten von *Reidemeister* und *Franz*, sowie von *Rembs* (Kowalewski) habe ich gleich an den Verleger eingeschickt. Die Arbeit von *Mayer* (Wien) habe ich Herrn Haupt zur Begutachtung gegeben. Ich denke wohl, dass das Gutachten zufriedenstellend ausfallen wird. Dagegen habe ich schon auf der ersten Seite in der Arbeit von *Grün* Unklarheiten gefunden und musste daher die Arbeit dem Verfasser noch einmal zur Beseitigung dieser Unklarheiten zurückgeben. Es scheint sich allerdings nur um eine ungeschickte Darstellung zu handeln. Die Sache selbst ist interessant und soweit ich bisher sehen konnte neu. Ich werde bemüht bleiben von dem Verfasser eine klare und lesbare Darstellung zu erhalten.

4) Ich selbst habe noch zwei weitere Einsendungen bekommen, nämlich *U. Wegner* und die schon früher angekündigte Arbeit über das Winkelhalbierenden–Problem von Herrn *Neiss*. Hinsichtlich der letzteren gilt ungefähr dasselbe wie oben für Grün. Ich stehe mit dem Verfasser im Briefwechsel über die Herstellung einer klaren Fassung. Die Arbeit von Wegner beschäftigt sich mit der Zerlegungstheorie von Polynomen im Zusammenhang mit den Perioden der Potenzsumme modulo Primzahlen. Wie schon in so mancher Arbeit von Wegner habe ich auch in dieser wieder einen groben Flüchtigkeitsfehler gefunden und musste ihn zunächst um Richtigstellung dieses Fehlers bitten.

Es freut mich, dass Sie solch Gefallen an der Ausarbeitung meiner Zahlentheorie–Vorlesung finden. Sie erhalten bald die Fortsetzung. Selbstverständlich würde ich mich freuen, wenn ich auch von Ihrer Vorlesung die angekündigten

Blätter bekommen würde. Ich komme jetzt sehr bald zur Einführung der p–adischen Zahlen und da interessiert es mich natürlich, wie Sie die jetzt machen.

Auch dass Sie an meinen Denkaufgaben Gefallen gefunden haben, freut mich. Beiliegend die Lösung von Nr. 2 und eine neue Nr. 3, die neben Entzifferungskünsten wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen erfordert und deren Einkleidung höchst zeitgemäss ist.

Dürfte ich wohl anregen, dass Sie mir bei der Korrektur des kommenden Crelleheftes etwas helfen, nämlich die Korrektur der noch von Herrn *Schlesinger* eingereichten Arbeit von Herrn *Walter Neumer* in Worms übernehmen. Ich habe das Material hier und würde es Ihnen gegebenenfalls gleich zusenden. Sie würden mir einen grossen Gefallen tun, wenn Sie mich dadurch ein wenig entlasteten.

Ihre Anregung, dass wir uns zu einem Wochenende in Kassel treffen, begegnet sich mit meiner Absicht, im Laufe des Mai einmal nach Marburg zu fahren. Ich habe dort Verschiedenes mit meiner Schwiegermutter zu besprechen und zu ordnen und würde dann gern auch ausführlich mit Ihnen zusammen sein. Im Moment kann ich noch nichts Näheres festlegen. Ich hoffe, es ist Ihnen recht, wenn wir bei dieser Sachlage den Gedanken eines Zusammentreffens in Kassel, der an sich recht verlockend ist, auf später verschieben.

Mit herzlichen Grüssen von Haus zu Haus

stets Ihr

H. Hasse

2.26 04.05.1935, Hensel an Hasse

Marburg a.d. Lahn d. 4 Mai 1935.

Lieber Herr Professor.

Ich freue mich, Ihnen einen neuen interessanten grösseren Beitrag für unsere Zeitschrift anzeigen zu können. Es handelt sich um die Arbeit "Ueber allgemeine Quadraturformeln" von Herrn v. Mises in Istanbul. Diese 20 Schreibmaschinenseiten lange Arbeit schliesst sich an die Arbeit von R. Schmidt bei uns Bd 175 an und scheint mir sehr interessant und weitführend zu sein. Ich glaube, man könnte sie sehr gern und unbedenklich nehmen, jedoch könnten wir sie ja auch, wenn Sie meinen an Kowalewski zur Begutachtung senden. Ich weiss aber nicht, wie Sie principiell zur Veröffentlichung einer Arbeit von diesem ausgezeichneten Manne stehen. Ich wäre unbedingt dafür. Ich wäre Ihnen sehr dankbar dafür wenn Sie mir darüber recht schnell ein ganz kurzes Wort schreiben wollten, damit ich Herrn v. Mises gleich antworten kann; Ich möchte da nicht ohne Ihr Einverständnis handeln.

Mit Ihrem M.S. bin ich sehr glücklich und freue mich sehr darüber, dass wir in so vielen Punkten ganz conform lesen. Aber es gibt dann auch wieder Partien, wo ich viel von Ihren schönen Ausführungen angeregt werde.

Bei Ihren Ausführungen zur Theorie des grössten gemeinsamen Teilers (S. 7–18) und der Primzahlzerlegung (S. 19–23) habe ich allerdings *gleich* die Zermelosche Beweisführung gegeben (Ihre Darstellung derselben ist besonders einfach und interessant) Dann folgen ja alle die von Ihnen vorher gegebenen Teilbarkeitssätze unmittelbar und so habe ich diese auch nur *ausgesprochen*, weil ja dann garnichts zu beweisen ist. Mir scheint, dass die sehr schönen Beweise ohne Kenntniss d. [...] doch für den Anfang etwas schwer für den Leser sind. Andererseits wäre es vielleicht aber auch schade sie zu unterdrücken.

Ausserdem habe ich bei den Primzahlen einen Excurs über ihre wichtigsten Eigenschaften über ihre Verteilung (im Anschluss an Gauss' Brief) (ohne Beweise) über die arithmetische Reihe gegeben und die Beweise more Euclideo[1] für die Fälle $4m \pm 1$ gegeben, weil mir das doch so sehr anregend vorkam. Soll ich Ihnen noch mein M.S. für die gehaltenen Vorlesungen schicken, oder genügt Ihnen das hier gesagte zur Uebersicht? Herrlich wäre es ja, wenn Sie

[1] undeutlich

wirklich bald nach Mbg kämen; dann sähe ich Sie wieder und wir könnten über alles auch richtig reden.

Ich dachte, der Verlag hatte längst einen Korrektor für Crelle angestellt und bin sehr traurig, dass Sie allein die Arbeit der Correktur gehabt haben. Wenn noch kein Korrektor fest angestellt ist, so müssen Sie mir natürlich ordentlich Korrekturen zusenden. Ich mache es sehr genau und so genau wie ich irgend kann.

Herzlichste Grüsse Ihnen Beiden. Stets Ihr

Kurt Hensel

2.27 06.05.1935, Hasse an Hensel

Göttingen, den 6. Mai 35

Lieber Herr Geheimrat.

Von meiner Seit bestehen garkeine Bedenken, die Arbeit des Herrn von Mieses für Crelle anzunehmen. Ich würde es für unnötig halten, eine Arbeit eines so bewährten Gelehrten erst noch von einem Redaktionsmitglied begutachten zu lassen.

Ich selbst habe in den letzten Tagen noch eine Zusendung von E.A. *Weiss* bekommen über ein Syzygetisches Büschel, ich habe keine Ahnung, was das ist, die Arbeit scheint aber mit Sorgfalt geschrieben und mit Forschungen vieler Anderer in Zusammenhang zu stehen. Ich möchte glauben, dass Herr Weiss nach der für ihn schmerzlichen und kostspieligen Erfahrung mit seiner kürzlich eingesandten Arbeit sich diesmal genau vergewissert hat, dass nicht schon etwas Aehnliches vorliegt in der Literatur. In diesem Sinne möchte ich die Annahme befürworten. Im Anschluss an meinen letzten Crelle–Bericht möchte ich noch sagen, dass sich Herr Haupt über die Arbeit von *A.E. Mayer* ungünstig geäussert hat: sie sei im wesentlichen identisch mit einer schon veröffentlichten Untersuchung von Menger, nur etwas ausführlicher als diese. Auf Haupts Rat habe ich bei Menger deswegen angefragt. Die Arbeit von U. Wegner ist mit verbessertem Fehler wieder eingegangen. Ich habe die Arbeit nun angenommen. Herr *Neiss* hat sich mit meinen Aenderungsvorschlägen einverstanden erklärt: ich hatte ihm praktisch die ganze Arbeit ins modern–mathemetische übertragen. Es handelt sich nur noch um die Ueberwindung einer kleinen technischen Schwierigkeit in einem Beweis.

Die Arbeit von Herrn *Grün* ist auch nach meinen Vorschlägen verbessert worden. Sie enthält wirklich *sehr* schöne und neue Resultate. Ich freue mich feststellen zu können, dass wir jetzt sicher für 3 Hefte voraus wieder Material haben, also bis Band 174 Heft 1. Vor 6 Wochen sah es noch recht trübe aus. Ich werde nun bald aus den vorhandenen Manuskripten eine Disposition für die kommenden Hefte zusammenstellen.

Ihre Ausführung meiner Vorlesung ist mir aus der Seele gesprochen. In dem Buch will ich ebenfalls wie Sie von vornherein die Beweisführung von Zermelo bringen, allerdings will ich nachher doch nicht ganz an klassischen Bestandteilen der Zahlentheorie, wie dem Euklidischen Algorithmus vorübergehen, und insbesondere die immer wieder wichtige Tatsache bringen, dass jedes Ideal aus ganzen Zahlen ein Hauptideal ist.

Die sehr schönen elementaren Beweise für die Existenz unendlich vieler Primzahlen in den arithmetischen Progressionen $\equiv \pm 1 \bmod m$ werde ich an einer späteren Stelle der Vorlesung bringen, wo sie naturgemäss hinpassen, nämlich bei dem Artinschen Lemma über zyklische Klasseneinteilungen der rationalen Zahlen.

Einen Einblick in die Einzelheiten Ihres Vorlesungsganges kann ich mir ja bei Gelegenheit meiner nun feststehenden Reise nach Marburg tun. Ich werde am Sonnabend, den 18. Mai dort sein, allerdings bin ich dann nicht ganz Herr meiner Zeit, und so möchte ich Sie bitten, meinen Besuch vor den Marburger Mathematikern zunächst geheim zu halten. Ob ich am Sonnabend abend frei bin oder nicht, kann ich heute noch nicht übersehen, jedenfalls halte ich mir im gegenteiligen Fall den Sonnabend Vormittag oder Nachmittag frei. Mit den Korrekturarbeiten für Crelle ist es so, dass der Verleger einen Hauskorrektor, Dr. Rohrbach angestellt hat. Dieser besorgt erstens die Durchsicht der Manuskripte auf drucktechnische Einzelheiten und liest 2. die Korrekturen, ehe sie an den Autor hinausgehen. Dadurch bleibt für mich nur die verhältnismässig geringe Arbeit, die Autor–Korrekturen, ehe sie ausgeführt werden, noch einmal zu überprüfen. Ich lese dabei das Ganze kursorisch durch, verbessere was mir noch auffällt — meistens ziemlich wenig —, und überwache in der zweiten Korrektur, die in der Regel nur durch mich geht, die richtige Ausführung der angebrachten ersten Korrekturen. Ich wäre Ihnen dankbar, wenn Sie mir dieses für die Arbeit *Neumer* abnehmen könnten. Das Material sende ich Ihnen in den nächsten Tagen zusammen mit der nächsten Sendung meiner Vorlesungsausarbeitung.

Beiliegend im verschlossenen Umschlage die Lösungen der Denkaufgaben 1,3,4. Ich lege ausserdem Denkaufgabe 5 bei, die besonders reizvoll ist. Ich freue mich sehr, Sie bald wiederzusehen und Sie ausführlich sprechen zu können.

Mit herzlichen Grüssen stets

Ihr treuer

H. Hasse

PS. Beiliegend die Abschrift eines Briefes von R. Brauer, der Sie wohl interessieren würde.

2.28 19.06.1935, Hasse an Hensel

19. Juni 35

Lieber Herr Geheimrat!

Heute möchte ich Ihnen wieder einmal kurz über Crelles Journal berichten.

In der letzten Zeit habe ich zum Glück erfreulich viel Material bekommen. Zunächst ist die Arbeit von Herrn *Grün* nunmehr endgültig druckfertig gemacht, und ist nach Berlin eingeschickt. Ich hatte sehr viel Arbeit damit, habe praktisch ein völlig neues Manuskript hergestellt und die Grünschen Beweise modernisiert. Die Sätze sind sehr schön, sie erweitern die Kenntnisse in der Gruppentheorie beträchtlich. Herr Grün ist jetzt auf meine Einladung für eine Woche hier und nimmt an unserer Arbeitsgemeinschaft über Gruppentheorie teil. Er hat dort weitere sehr schöne Dinge vorgetragen, die er auch noch in einer weiteren Arbeit für Crelles Journal zusammenstellen will. Er hat nie studiert, ist vielmehr nach abgeschlossener höherer Schulbildung kaufmännisch tätig gewesen und ist jetzt Bücherrevisor in Berlin, ungefähr 50 Jahre alt. Das Kultusministerium (Vahlen) ist auch bereits auf ihn aufmerksam geworden und hat ihm einmal ein Forschungsstipendium gegeben.

Für die Arbeit von *Sugawara* über die komplexe Multiplikation hat Herr Franz ein neues Manuskript hergestellt. Dieses musste ich aber erst dem Author in Japan zur Genehmigung zuschicken. Ich denke, er wird zustimmen. Seine Antwort wird wohl in etwa 4 Wochen eingehen.

Wegen der Arbeit von *A.E. Meyer* über längste konvexe Kurven habe ich mit Haupt und Menger korrespondiert, mit dem Ergebnis, dass der Verfasser noch eine Vorbemerkung einschalten soll, die das Verhältnis dieser Arbeit zur Arbeit von Menger klarstellt. Ich erwarte seine Rückäusserung täglich.

Die Arbeit von *Neiss* über das Winkelhalbierungsproblem, von der ich Ihnen früher schrieb, ist noch immer unklar, das Material liegt im Augenblick bei Herrn Jung in Halle zur Klärung. Neu eingegangen ist inzwischen eine kurze Note von einer Seite von *Garver*[1] (Los Angeles) die sich an eine frühere Bieberbachsche Note in Crelles Journal über die Winkeldreiteilung mit Hilfe eines rechten Winkels anschliesst. Obwohl der Gegenstand nicht sehr wichtig ist, habe ich die Aufnahme zugesagt, eben weil Bieberbachs Note schon bei

[1] undeutlich

uns veröffentlicht war.

Ferner eine kurze Note von 4 Seiten von Herrn *Maruhn*, einem früheren Lichtensteinschüler, den wir hier zum Assistenten machen wollen. Die Note behandelt Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten. Ich hatte Herrn Maruhn darum gebeten, als er vor 4 Wochen hier einen Vortrag hielt.

Ferner eine Fortsetzung der kürzlich angenommenen Arbeit von *E.A. Weiss*, die einen für mich ebenso rätselhaften Gegenstand behandelt, wie das in der ersten Note behandelte syzygetische Büschel, nämlich die Autopolokoniken[2]. Auch hier habe ich die Annahme zugesagt, weil es sich ja um eine Fortsetzung der schon angenommenen Note handelt.

Ferner eine neue Arbeit von Herrn *Rédei* (dem Ungarn) zusammen mit Herrn *Behrbohm*, das Resultat des Studienaufenthaltes von Herrn Rédei hier. Es handelt sich um eine allgemeine Untersuchung, wann in einem reellen quadratischen Zahlkörper ein Euklidischer Algorithmus existiert, die weit über die bisher bekannten Tatsachen hinausführt. Ich habe die Arbeit gern angenommen.

Dann hat Herr Brandt aus Halle eine Arbeit seines Schülers *Eichler* über die Zahlentheorie der Quaternionen zugesandt. Es handelt sich allerdings um eine Dissertation, aber nach der sehr warmen Befürwortung Herrn Brandts glaube ich, die Annahme dieser Untersuchungen verantworten zu können.

Auch die Dissertation von Herrn *Teichmüller*, von der ich Ihnen schon früher schrieb, in der die von Neumannsche Theorie von Operatoren auf lineare Räume (beliebiger Dimension) mit Quaternionen–Koordinaten verallgemeinert wird, und die vieles Neue auch für den klassischen Fall des Hilbertschen Raumes enthält, ist inzwischen fertig geworden, und ich werde sie demnächst nach Berlin senden. Herr Teichmüller promoviert nächste Woche bei mir.

Dann ist noch eine Arbeit von Herrn *Lubelski* (Warschau) eingegangen, die sich mit den Klassenzahlrelationen quadratischer Formen beschäftigt, deren Koeffizienten selbst einem quadratischen Zahlkörper angehören. Zur Durchsicht dieser Arbeit bin ich allerdings noch nicht gekommen.

Herr *Krafft*, den ich schon in den Osterferien um die Einfügung eines einzigen Satzes am Anfang seiner Arbeit über den Weierstrassschen Vorbereitungssatz gebeten hatte, hat dies bisher trotz wiederholter Mahnung nicht getan. Wenn er jetzt in den Ferien nach Marburg kommt, könnten Sie ihn vielleicht noch einmal nachdrücklich darauf hinweisen.

[2] undeutlich

Haben Sie wohl noch neue Eingänge bekommen? Dann wäre ich für einen kurzen Bericht dankbar und eventuell für eine Zusendung. Die Korrektur Neumer haben Sie wohl inzwischen erledigt? Sonst würde es jetzt nötig sein.

Wir haben grosse Freude an unserem neuen Wagen. Hoffentlich können wir uns bald einmal Ihnen darin vorstellen. Ich will Anfang Juli noch schnell fahren lernen, vorläufig fährt nur meine Frau mit grosser Liebe und Geschicklichkeit. Gegen Ende Juli werden wir auf unserer Ferienreise nach dem Süden Marburg passieren. Dann sind Sie aber wohl kaum zu Hause,

Mit den herzlichsten Grüssen von Haus zu Haus stets Ihr

H. Hasse

2.29 29.06.1935, Hensel an Hasse

Marburg a.d. Lahn d. 29. Juni 1935.

Lieber Herr Professor

Heute ist mein erster Ferientag, den ich zuletzt etwas herbeigesehnt habe, denn meine beiden Vorlesungen, die ich glücklich zu Ende gebracht habe, brachten doch eine ziemlich grosse Anstrengung mit sich.

Die "elementare Zahlentheorie" gab mir nun Gelegenheit die g–adische und $\mathfrak{p}$–adische Zahlentheorie noch einmal ganz gründlich durchzudenken, und hier möchte ich Sie nun fragen, ob es Ihnen recht und angenehm für das Buch erscheinen würde, wenn ich Ihnen diesen Abschnitt ganz gründlich und genau aufschriebe, damit Sie das, was Ihnen erwünscht schien für Ihre Darstellung leicht entnehmen könnten. Ich glaube es ist jetzt alles rund und einfach geworden. Schreiben Sie mir dann doch recht schnell eine Karte (nur ja oder (hoffentlich nicht) nein). Dann frage ich sofort an und schicke Ihnen die Blätter successive zu; es wäre mir eine Freude und Anregung diese kleine Arbeit zu machen und so nach meinen besten Kräften auch etwas für das Buch zu wirken, was wirklich gross und wunderschön wäre, noch dazu, was ich bis jetzt davon erlebe.

Meine zweite Vorlesung hat mir das Ergebniss über die Wurzeldarstellung der Zahlengleichungen $f(x) = 0$ in $\mathfrak{K}(1)$ für den Bereich einer jeden Primzahl $\mathfrak{p}$ gebracht nach dem ich mich zwei Jahre gesehnt habe, und das wohl ganz sicher richtig ist. Ich will es jetzt richtig aufschreiben und Ihnen schicken. Ich wäre Ihnen sehr dankbar, wenn Sie es mit starker Kritik lesen würden. Das Ergebniss der Untersuchung habe ich Ihnen ja schon bei meinem letzten Zusammensein erzählt.

Nun möchte ich Ihnen noch sagen, wie sehr ich mich über die schönen Crelle–Ergebnisse freue, von denen Sie in Ihrem letzten Briefe berichten. Besonders interessant finde ich die Resultate von Herrn Grün und das was Sie über ihn selbst schreiben; dass er ganz ohne Studium so weit gekommen ist ist sehr überraschend; es ist schön, dass er uns noch mehr geben will; Auch die beiden Arbeiten von Redei scheinen wieder interessant zu sein. — Sehr umfangreich ist ja die Arbeit von Teichmüller (50 Seiten). Wir haben ja auch wieder Bedenken wegen Dissertationsdruck vom Verlag hören müssen, aber ich glaube wir können und sollten bei unser Einstellung gegenüber dieser Frage bleiben.

Mit der Disposition für Crelle 173^{IV} und $174^{1/2}$ bin ich sehr, und dankbar, einverstanden. Wir sind ja damit auch wirklich auf längere Zeit hinaus gedeckt. Natürlich hatte ich die Correktur Neumer längst erledigt jetzt eben auch die zweite Corr mit Druckerlaubniss abgesandt. Ausser meiner eigenen Arbeit, an deren Fertigstellung ich jetzt arbeite, und die dieses Mal wohl ziemlich umfangreich wird, habe ich nur noch eine ganz kleine Arbeit von Dr Aloys Herrmann der s. Z. bei mir den Doctor gemacht hat und ein recht tüchtiger und sehr begeisterter Mathematiker war.

Diese kleine Notiz, die sich auf den Anregungen durch Frobenius grosse Crellearbeit über Systeme aufbaut, leitet einen recht hübschen Satz der Matrizenrechnung auf, wie mir scheint, sehr einfache Art ab. Ob der Satz und seine Ableitung aber ganz neu und ob der Beweis richtig ist, konnte ich nicht genau feststellen; ich meine sonst, wir könnten diese Note annehmen, wenn wir sie von einem Spezialkenner noch nachprüfen liessen. Könnten Sie dann Dr H über die Frage der Annahme Antwort geben?

Ich war noch mit meiner Frau 6 Tage in Baden–Baden um die Zusammenkunft der südwestdeutschen Mathematiker mitzumachen und für Crelle zu werben. Es war sehr hübsch ich sah manchen Kollegen wieder, den ich lange nicht gesehen hatte. Viel Schönes hörte ich allerdings leider nicht.

Dass Sie so viele Freude an Ihrem neuen Auto haben, ist wunderschön. Können wir nicht davon profitieren und Sie und Ihre liebe Gattin hier begrüssen? Gegen Ende Juli sind wir wohl auch noch hier; wir wollen erst etwa Mitte August nach Marienbad u.s.w. gehen.

Mit den herzlichsten Grüssen von uns Beiden an Sie Beide bin ich stets Ihr

K. Hensel.

2.30 01.07.1935, Hasse an Hensel

1. Juli 1935

Lieber Herr Geheimrat,

Es scheint zwischen uns eine Gedankenverbindung zu bestehen, sonst würden wir nicht beide zu gleicher Zeit und mit derselben Einleitung aneinander schreiben.

Zu Ihrer Frage über Ihre g–adische und p–adische Zahlentheorie sage ich selbstverständlich: "Ja, gern!" Ebenso will ich Ihr Ergebnis über die Wurzeldarstellung der Zahlengleichungen $f(x) = 0$ in $K(1)$ für den Bereich einer jeden Primzahl p gern mit starker Kritik durchsehen.

Die Arbeit von Dr. A.Herrmann werde ich mir in den nächsten Tagen genau ansehen und ihn von dem Ergebnis unterrichten.

Unsere Reisepläne sind in letzter Stunde durch den Tod von Davenports Vater ins Wanken gekommen. Es steht danach noch nicht fest, wann unser Opel uns nach Marburg tragen wird.

Mit herzlichen Grüssen und Wünschen Ihr

H. Hasse

2.31 06.09.1935, Hasse an Hensel

6. Sept. 1935.

Lieber Herr Geheimrat!

Die Verleger haben mich um die Disposition für das nächste Crelle-Heft gebeten und ich habe daraufhin die beiliegende Aufstellung gemacht. Das vorhandene Material reicht, wie Sie sehen, gerade noch für dieses Heft und etwas mehr. Wir müssen also sehen, dass wir bald wieder neue Arbeiten bekommen. Hoffentlich habe ich in Stuttgart Gelegenheit dazu. Unter den in der beiliegenden Disposition aufgeführten Arbeiten sind zwei, über die ich Ihnen noch nicht berichtet habe. Nämlich die beiden kleinen Noten meines Schülers Otto Schilling, die er auf meine Anregung hin zusammengestellt hat. Beides sind kurze, aber recht interessante Beiträge zur modernen Algebra bzw. Zahlentheorie.

Gestern habe ich meine Führerprüfung bestanden und fühle mich nun mit unserem Wagen noch erheblich glücklicher als bisher. Nächste Woche, am Donnerstag, bin ich in Berlin zu einer Besprechung im Ministerium, aber dann sind Sie ja wohl noch nicht dort, wenn Sie Ihren Aufenthalt, wie Sie andeuteten, auf 5 Wochen ausdehnen.

Mit besten Wünschen und herzlichen Grüssen

I h r

H. Hasse

2.32 09.09.1935, Hensel an Hasse, Postkarte

(Postkarte) Marienbad d. 9. September 35.

Lieber Herr Professor.

Vielen Dank für Ihren Brief vom 6. d. Mts▶. Ich finde den Plan für 174^3 sehr schön. Für Heft 4 teile ich Ihnen mit, dass ich soeben von Herrn Haentzel in Karlsruhe eine sehr elegante aufschlussreiche Arbeit "Die Geometrie des Linearen Strahlencomplexes gegründet auf seine Polarentheorie" erhalten habe. Dieser spielt in der Geometrie des Strahlenraums eine ähnliche Rolle, wie die Fläche II. Ordnung und Klasse in der Geom. d. Punkte– und Ebenenraumes. Hier bedingt der Lineare Strahlencomplex eine polare Korrelation im Strahlenraume und zwar als ihr Incidenzgebilde. Die Grundlagen dieser Polarität werden in der ersten Hälfte dieser $11^1/_2$ enge Schreibmaschinenseiten langen Arbeit sehr einfach und elegant entwickelt. Der zweite Teil führt diese Polarentheorie des lin. Komplexes weiter aus und ergiebt u.a. die bisher unbekannte Theorie seiner Involutionen. — Meiner Ueberzeugung nach können wir diese Arbeit gern und ruhig annehmen. Wenn Sie einverstanden sind, d.h. nichts Gegenteiliges schreiben, so schicke ich sie gleich von Berlin aus an de Gruyter und lasse sie dann an Sie gehen. Ich gratuliere Ihnen herzlich zur Führerprüfung. Leider komme ich erst Sonnabend Abend in Wannsee Strasse z. Löwen 15 b/Dr. G. Hahn an. Meine Arbeit geht sehr schön vorwärts. Herzl. Gruss Ihres

K. H.

2.33 11.09.1935, Hasse an Hensel

Göttingen, den 11. 9. 35.

Lieber Herr Geheimrat!

Herzlichen Dank für Ihre Karte▸. Selbstverständlich bin auch ich gern für die Annahme der Arbeit von Herrn Haenzel. Meine Besprechung in Berlin ist nun doch noch um eine Woche verschoben. Voraussichtlich findet sie am Donnerstag, den 19. Sept. statt. Ich würde mich freuen, Sie bei dieser Gelegenheit in Berlin treffen zu können. Bitte lassen Sie mich doch kurz vorher einen Vorschlag dafür wissen. Vormittags bin ich natürlich durch die Besprechung in Anspruch genommen, aber nachmittags werde ich frei sein.

Mit herzlichem Gruss

stets Ihr

H. Hasse

2.34 03.10.1935, Hensel an Hasse, Postkarte

(Postkarte) Marburg a/L d. 3–10–35

Lieber Herr Professor.

Da ich annehme, dass die Stuttgarter Tage für Sie zu Ende sind richte ich diesen Gruss wieder nach Göttingen. Ich danke Ihnen nochmals herzlich, dass Sie mich in Wannsee so liebenswürdig besucht haben. Ich habe mich über diese schönen und mir höchst interessanten Stunden sehr gefreut. — Mit gleicher Post sende ich Ihnen mit der Hänzel'schen Arbeit noch eine mir sehr interessant erscheinende von Herrn Martin Eichler "Bestimmung der Idealklassen in gewissen normalen[1] einfachen Algebren". Seine "Zahlentheorie der Quaternionen" haben Sie s. Z. angenommen. Sie soll im Bd 174$^{\mathrm{III}}$ erscheinen. Mir scheint auch diese der Annahme voll würdig. Da sie aber stark an Sie anknüpft, so sind Sie natürlich der gegebene Beurteiler derselben. Herr Brandt empfiehlt sie auch zur Annahme. Ich schrieb diesem soeben, Herrn E. aber natürlich noch nicht.

Herzlichste Grüsse und Wünsche. Ich bin sehr gespannt auf Ihre Erlebnisse in [...].

[1] undeutlich

2.35 05.10.1935, Hensel an Hasse, Postkarte

(Postkarte) Marburg d. 5–10–35.

Lieber Herr Professor.

Herzlichen Dank für Ihren soeben erhaltenen Brief. Ich finde die Zusammenstellung für Bd. 174^{IV} *sehr* schön und inhaltsreich; eigentlich ist hier jede dieser Abhandlungen eine Sache besonderen Interesses am meisten natürlich für mich speziell "Witt" "Behrbohm–Redei" und besonders "Hasse–Schilling". — Das M.S. von Herrn [...] interessiert mich auch, da es offenbar einige Verwandtschaft hat mit einer ganz frühen Abh. von mir "Theorie der unendlich dünnen Strahlenbüschel". Ich sehe es mir noch genauer an, meine aber schon jetzt, dass es schon etwas Ordentliches sein wird nach seinen früheren Arbeiten. Darüber müssen wir aber sicher noch genauer sprechen. Dass wir hoffen dürfen, Sie am Freitag Nachmittag hier zu begrüssen ist uns eine *sehr* grosse Freude. Kommen Sie doch so früh und gehen Sie doch so spät es irgend geht. Der Tee wartet auf Sie. Ginge es nicht, dass Sie erst am Sonnabend wieder abreisten?

Also auf ein gutes Wiedersehen mit herzlichen Grüssen an Sie Beide

Stets Ihr H. Hensel.

2.36 14.10.1935, Hasse an Hensel

14. Oktober 35

Lieber Herr Geheimrat!

Hoffentlich haben Sie den Anfall von neulich längst überwunden. Es tat mir sehr leid, dass es Ihnen am Tage meines Besuches bei Ihnen gerade nicht gut ging.

Heute möchte ich Sie nur kurz wissen lassen, dass ich die Arbeit von Haenzel dem Verlag zum Druck eingeschickt habe, dagegen die Arbeit von Eichler (Brandt) zurückschicken musste, da gleich zu Beginn ein grober Fehler war, der alles beeinflusste. Soviel ich sehe, wird durch diesen Fehler das Resultat, welches an sich ja sehr interessant ist, nur unter einer Einschränkung richtig, nämlich, dass der Grundkörper die richtigen Einheitswurzeln enthält. Ich habe den Verfasser gebeten, die Sache in Ordnung zu bringen und dann erneut einzureichen.

Vor einigen Tagen sandte Doetsch eine kurze Arbeit von Lettenmeyer, München ein, über die sogenannte Regel von de l'Hospital (Bestimmung von Grenzwerten der Formen $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ durch Differenzieren). Ich fand das ganz nett, obwohl nicht irgend etwas Besonderes und habe es angenommen. Ferner habe ich eine sehr schöne Arbeit von Herrn Witt, hier, bekommen über die Konstruktion von Körpern mit vorgeschriebener Gruppe von Primzahlpotenzordnung, die ich natürlich mit Freuden angenommen habe. Weiter eine Arbeit meines Schülers Schilling über Funktionenkörper von mehreren Veränderlichen, die ich zunächst Herrn Deuring zur Prüfung gegeben habe. Diese Arbeit habe ich bereits in der letzten Dispositionsliste aufgeführt. Ich selbst werde wahrscheinlich im Laufe dieses Monats noch 2 Arbeiten fertigstellen, die ich dem Journal geben will, eine mit Schilling über die Normen aus einer Divisionsalgebra und eine von mir allein über die Struktur der Klassengruppe in Funktionenkörpern $\bmod p$ und ev. über Weierstraszpunkte. Damit haben wir etwa Manuskript–Material für einen Band im Voraus.

Mit herzlichen Grüssen von Haus zu Haus

stets Ihr

H. Hasse

2.37 21.10.1935, Hasse an Hensel

21. Oktober 35

Lieber Herr Geheimrat!

Der Verlag de Gruyter hat mich gebeten, anlässlich der Woche des Deutschen Buches einen Aufruf zu entwerfen. Dieser Aufruf soll dem Anfang nächster Woche erscheinenden Doppelheft 1|2 des neuen Crelle–Bandes beigelegt werden. Ich habe nun den beiliegenden Aufruf entworfen und heute der Eile halber gleich an den Verleger geschickt. Da der Gedanke ist, dass wir als "Die Schriftleitung" unterzeichnen, möchte ich Ihnen den Aufruf aber doch vorher vorlegen. Falls Sie Bedenken oder Aenderungsvorschläge haben, lassen Sie mich das doch bitte umgehend wissen. Ich habe den Verleger gebeten, den Druck noch bis Donnerstag offen zu halten, für den Fall, dass Sie noch etwas geändert sehen wollen. Die Sache ist so eilig, weil das Heft eben zu Beginn der Woche des Deutschen Buches, das ist nächsten Montag, bereits gedruckt vorliegen soll. *Ich habe dem Text des Aufrufs entsprechend gebeten, ihn nur den im Inland oder an Deutsche im Ausland verschickten Exemplaren beizulegen.* Seien Sie bitte nicht böse, dass ich nicht vorher mit Ihnen darüber in Verbindung getreten bin, ich erhielt die Aufforderung erst vorgestern.

Der Stand des Manuskript–Materials für Crelle ist jetzt ausser dem bereits Disponierten (bis inkl. Band 174|3) folgender aus der Tabelle ersichtlicher. Ueber die 4 letzten Arbeiten habe ich Ihnen wohl noch nicht berichtet. Die 3 Beiträge von mir habe ich eben fertiggestellt. Der Beitrag von Beck ist eine grössere Arbeit (43 Schreibmaschinenseiten), die mir sehr gut und interessant scheinen. Wir können solche Fülle jetzt vertragen.

Entschuldigen Sie die Kürze dieses Briefes. Ich bin sehr in Eile.

Herzlichst Ihr

H. Hasse

2.38 04.11.1935, Hasse an Hensel

4. November 35.

Lieber Herr Geheimrat!

Beiliegend die Zusammenstellung des letzten Heftes von Band 174, die hoffentlich Ihren Beifall findet. Ich lege ferner ein Manuskript von Herrn Jonas bei, das ich allein nicht annehmen möchte, obwohl Herr J. offenbar ein tüchtiger Mathematiker ist, nach seinen vielen Veröffentlichungen zu urteilen. Vielleicht können Sie es auch kurz ansehen und Ihr Votum darüber geben. Ich werde nächsten Freitag nachmittags kurz in Marburg sein und würde mich freuen, Sie dann sprechen zu können. Darf ich zum Tee zu Ihnen kommen? Ich muss dann allerdings um 6 Uhr schon wieder aufbrechen.

Mit herzlichen Grüssen stets Ihr

H. Hasse

2.39 04.12.1935, Hensel an Hasse

Marburg a.d. Lahn d. 4. Dezember 1935.

Lieber Herr Professor.

Jetzt bin ich endlich so weit gekommen, dass ich Ihnen den zweiten und vorläufig letzten Teil meiner Ueberlegungen zur elementaren Zahlentheorie schicken kann. Ich habe mir die Dinge noch einmal ganz gründlich überlegt und hoffe, es wird Ihnen im Ganzen eine Hülfe bei Ihrem Werke sein. Ich würde ja gern etwas darüber hören, wenn Sie meinen Beitrag haben lesen können. Hieran schliesst sich dann die Formentheorie der quadratischen speciell der ternären Formen an, doch da kann ich teilweise auf meine kleine gelbe Zahlentheorie verweisen, die ich allerdings noch wesentlich ausgestaltet habe; aber da kommen natürlich Ihre wunderschönen Arbeiten vor allen Dingen in Betracht. Vorher würde allerdings noch ein Kapitel über das cubische und das biquadratische Reciprocitätsgesetz sehr schön passen, da das auch durch Erweiterung auf die $\mathfrak{p}$–adischen Körper $\mathfrak{K}(\mathfrak{p})$ sehr vereinfacht und verschönt werden würde. Doch müsste das noch schön durchgearbeitet werden.

Noch nicht ausgearbeitet habe ich bei der Theorie der Betrachtung der Zahlen modulo $\mathfrak{p}^k$ die kleine Frage nach der Anzahl der primitiven d^{ten} Einheitswurzeln modulo $\mathfrak{p}^k$ bzw. 2^k. Das giebt ein sehr hübsches einfaches Resultat unter Benutzung der allgemeinen Theorie der endlichen Abelschen Gruppen; da Sie diese ja vorher bringen, so könnte ich die Resultate auch gebrauchen (was dann schnell geht); ich brauche sie allerdings nur in dem ganz speciellen Falle der Congruenzbetrachtung modulo $\mathfrak{p}^k$ bzw. modulo 2^k. Uebermorgen reise ich mit meiner Schwester nach Hamburg komme natürlich auch durch Göttingen, habe aber leider nur ganz kurze Minuten dort, so dass ich Sie nicht sehen kann. Aber ich hoffe dann bald wieder nach G zu kommen und möchte dann sehr gern einen Zug überschlagen um Sie wiederzusehen, worauf ich mich *sehr* freue. — Von dem Verzeichniss der Crellebände die Mitarbeitern und Austauschenden geliefert werden sehe ich nicht viel Ersparnissmöglichkeiten. Ich glaube sicher, wir könnten Clemens Schäfer fortlassen und auch Rademacher–Swarthmore, die sich beide eigentlich garnicht um uns gekümmert haben. Würden Sie damit einverstanden sein?

Nun leben Sie wohl, lieber Freund, herzlichste Grüsse Ihnen und Ihrer lieben Gattin, stets Ihr getreuer

Kurt Hensel

2.40 06.12.1935, Hasse an Hensel

6. 12. 35.

Lieber Herr Geheimrat!

Unsere Briefe haben sich gekreuzt. Haben Sie herzlichen Dank für Ihren Brief▶. Der Zusendung Ihrer weiteren Aufzeichnungen sehe ich mit Interesse entgegen.

Wegen der Freiexemplare bin ich mit der künftigen Fortlassung von Clemens Schäfer gern einverstanden, bei ihm hat es wirklich keinen Sinn. Dagegen würde ich aus Gründen persönlicher Beziehungen eine einseitige Ausschließung Rademachers nicht gerne sehen. Meiner Ansicht nach müßten wir dann auch Fraenkel ausschließen und das, glaube ich, wollen Sie nicht gern und auch mir widerstrebt es, weil er schon viel für das Journal getan hat. Bei Hellinger hätte ich weniger Bedenken, sein Interesse am Journal war stets ein sehr laues. Aber bitte entscheiden Sie die ganze Frage von sich aus.

Ich würde mich freuen, wenn Sie auf Ihrer Rückreise hier einen Zug überschlagen würden. Sie lassen mich dann wohl rechtzeitig wissen, wann es sein wird. Wir erwarten morgen Davenport für einen zehntägigen Aufenthalt. Sonntag bis Dienstag wird Hecke bei uns sein zum Vortrag.

Im letzten Monat habe ich meine lange geplanten Arbeiten über Elliptische Funktionenkörper abgeschlossen und sende heute das ganze Material, das aus drei Manuskripten besteht an de Gruyter ein.

Mit besten Empfehlungen und Grüßen
von Haus zu Haus stets Ihr

H. Hasse

2.41 ?.?.19??, Hensel an Hasse, Postkarte

(Postkarte)[1]

Lieber Herr Professor. —

Verzeihen Sie, dass ich heute auf Ihre interessanten und wichtigen Briefe nur (vorläufig) mit einer Karte antworte, aber es soll ja heute schnell gehen. Ich schreibe baldigst genau. Also mit dem Entwurf zu unserer Beilage bin ich vollständig einverstanden; ich wüsste nicht wie man's besser und würdiger machen sollte. Die Manuscripte für die Zukunft sind ja sehr schön und hoffnungerweckend; ich bin aufs Höchste gespannt auf Ihre Arbeiten, die Sie, ein Zeichen höchster Productivität an den 3 auf einander folgenden Tagen am 14, 15, 16 Oktober der Redaktion eingereicht haben. Das soll Ihnen einmal einer nachmachen. Was [...] mit den höheren Differentialen? Sollen die auch axiomatisiert und arithmetisirt werden? Das wäre mir sehr interessant. —

Ich arbeite jetzt sehr stark und sehr freudig an den g– und $\mathfrak{p}$–adischen Zahlen und bin schon etwa auf der Hälfte. Mir ist dabei noch mancherlei Neues und Einfaches eingefallen. Ich möchte Ihnen bald diese erste Hälfte schicken damit Sie sie noch vor dem Semester etwas durchsehen können. Inzwischen mache ich dann die zweite Hälfte fertig.

Herzlichen Dank u beste Grüsse

Stets Ihr

K. Hensel

[1] Das Stempeldatum ist schwer zu erkennen, es läßt sich aber '22.10' erahnen, und das Jahr könnte '1935' sein.

2.42 21.12.1935, Hasse an Hensel

21. Dezember 35.

Lieber Herr Geheimrat!

Ich habe in der letzten Zeit Ihre Aufzeichnungen über p–adische Körper genau durchgesehen und sehr viel Freude daran gehabt, und auch manche Anregung für das Buch daraus genommen. Allerdings liegt ja die Sache so, dass bei dem mir vorschwebenden Aufbau die p–adischen Zahlen nicht durch ein gesondertes Konstruktions–Verfahren sondern durch die allgemeine Cantorsche Methode in der Bewertungs–Theorie konstruiert werden und dass dann die von Ihnen zur Konstruktion benutzte Zifferndarstellung erst als Endergebnis herauskommt. Sie werden das genauer in den Blättern sehen, die ich Ihnen kürzlich zugehen liess und die die Ausarbeitung meiner Vorlesung darstellen. Sehr schade ist, dass ich Ihre Aufzeichnungen nicht ein klein wenig früher hatte, dann hätte ich einige in meiner Vorlesung umständlich gemachte Beweise eleganter darstellen können, so z.B. die Behandlung der Ordnungszahl von $n!$ und die Konstruktion einer primitiven $(p-1)$–ten Kongruenzwurzel. Auch Ihr Beweis des Reziprozitätsgesetzes gefällt mir sehr gut, und ich denke, ich werde diesen Beweis statt meines im Sommer gegebenen für das Buch zugrunde legen. Eben habe ich übrigens Ihre Arbeiten über algebraische Funktionen zweier Veränderlicher in Crelles Journal noch einmal genau durchgelesen. Ich musste sie für die Fortschritte besprechen. Besonders interessant war mir, dass hier tatsächlich die Divisorentheorie im Grossen mit fast genau demselben Ergebnis gilt, wie bei einer Variablen. Nicht ganz verstanden habe ich den letzten Paragraphen über die Konvergenz der Grösse nach. Ich sehe nämlich nicht klar, was man für die Elemente des Koeffizientenkörpers einzusetzen hat, damit es gewöhnliche Zahlen werden. Für eine kurze Erklärung in dieser Hinsicht wäre ich Ihnen dankbar.

Für Crelles Journal habe ich eine erfreuliche Reihe von Eingängen zu verzeichnen, nämlich eine kurze Note von Deuring über die Anwendung der Algebrentheorie auf die Klassenkörpertheorie, zwei schöne Aufsätze von Schilling über Funktionenkörper zweier Variabler und über hyperkomplexe Einheiten, eine Arbeit von *Wegner* über auflösbare Körper (Fortsetzung der bei uns vor einigen Jahren gedruckten ersten Arbeit), eine Arbeit von *Teichmüller* über formale Differentiation in Funktionenkörpern der Charakteristik p und eine Arbeit von Schmid über das Reziprozitätsgesetz in Funktionenkörpern vom

Grade p^n bei Charakteristik p. Ausserdem bekam ich noch eine nicht ganz so schöne Arbeit des Schweden *Petterson* über Irreduzibilität, die an Untersuchungen von Ore anknüpft. Diese Arbeit habe ich zur Durchsicht und ev. Glättung an Dr. Rohrbach geschickt.

Sehr dankbar wäre ich Ihnen, wenn Sie mir bald das Ms. von *Jonas* wieder zuschicken könnten, das ich Ihnen Anfang November dort liess. Ich möchte nämlich bald alle diese schönen Arbeiten für die kommenden Hefte zusammenstellen und muss sie dazu erst nach Berlin einsenden, um den Umfang feststellen zu lassen. Da möchte ich "Jonas" gleich mitschicken. Auch wenn Sie sonst noch etwas bekommen haben sollten, hätte ich es gern bald.

2.43 09.01.1936, Hasse an Hensel

9. Januar 1936

Lieber Herr Geheimrat!

Auf Wunsch des Verlegers habe ich jetzt das Heft 1 des neuen Bandes 175 zusammengestellt und sende Ihnen beiliegend den Durchschlag davon, ebenso auch eine Aufstellung der weiter vorhandenen Manuskripte. Ueber die letzten fünf muss ich Ihnen noch berichten.

Teichmüller gibt eine neue und sehr originelle Begründung der Theorie der höheren Differentiale bei Charakteristik p im Anschluss an meine eigene kürzlich verfasste Arbeit darüber, in der ich mehr in Anlehnung an die klassische Theorie vorgehe.

A. Scholz verfolgt in der ihm eigenen, vielfach an Zahlenbeispielen orientierten Art die interessante Frage, mit was es zusammenhängt, wenn in einem algebraischen Zahlkörper die Gruppe derjenigen Zahlen, die an allen Primstellen Normenreste eines abelschen Körpers sind, wirklich kleiner ist als die Gruppe der Zahlnormen aus diesen Körpern.

Schmid gibt das Resultat seiner einjährigen Bemühungen um die Theorie der Normenreste bei zyklischen Funktionenkörpern vom Grade p^n, Charakteristik p, bekannt. Seine Resultate sind jetzt sehr elegant und liefern, wie ich glaube, den Schlüssel zur Behandlung der expliziten Reziprozitätsformeln für Primzahlpotenzexponenten in algebraischen Zahlkörpern. Er will diese Frage weiter verfolgen.

Richter ist eine bei v.d. Waerden entstandene ausgezeichnete Dissertation, die sich mit der Frage befasst, wann ein zyklischer Körper vom Grade ℓ^n zu einem zyklischen Körper vom Grade ℓ^{n+m} erweitert werden kann bei beliebigem algebraischen Grundkörper. Ich hatte diese Frage als Aufgabe im Jahresbericht gestellt. Die Lösung ist hochinteressant: es wird gezeigt, dass dies im allgemeinen dann und nur dann im grossen geht, wenn es für jede Primstelle geht. Merkwürdigerweise stimmt das aber nicht immer, die nichtzyklische Struktur der Einheitswurzeln von Exponenten 2^n bewirkt ein abweichendes Verhalten für $\ell = 2$.

Deuring gibt in einer sehr kurzen Note eine invariantenmässige Lösung einer ganz entsprechenden Frage für Algebren. Das ist für heute alles.

Ich hoffe, Sie haben das neue Jahr gut angetreten und bin mit den besten Grüssen allerseits

stets Ihr

H. Hasse

2.44 14.01.1936, Hensel an Hasse

Marburg–Lahn, d. 14. Januar 1936.

Lieber Herr Professor.

Ich danke Ihnen herzlich für Ihren sehr interessanten Brief▶ mit Ihrer Disposition für Crelle 175^{I}, die ich sehr schön finde. Auf Ihre Arbeit über die höheren Differentiale bei Char. $\mathfrak{p}$ und Herrn Teichmüllers originelle Begründung dieser Theorie bin ich ja besonders gespannt; das muss ja sehr schön werden und ich freue mich ausserordentlich, dass bei dieser neuen Auffassung dieses Gebiet doch wieder rein arithmetisch zu werden scheint und da eben einen neuen naturgemässen Ausblick geben wird. Ihren drei Arbeiten über elliptische Körper sehe ich mit den grössten Erwartungen entgegen. Etwas von Ihnen weiss ich ja schon, wie das alles weitergehen wird. Es ist doch auch wieder eine ganz neue Phase in diesem wundervollen Gebiete, das uns früher durch Weierstrass nach Jacobi und Abel so ganz abgeschlossen erschien.

Dass wir noch so viele und schöne Ms. für Crelles nächste Hefte haben ist wunderschön und ich danke Ihnen ganz besonders, dass Sie mir mit der Charakteristik der fünf letzten den Mund so schön wässerig gemacht haben. Eigentlich sind wenigstens die ersten vier doch wirklich ganz besonderer Natur und sie werden wieder dazu beitragen der Zeitschrift die Note zu geben und zu erhalten, welche für sie so charakteristisch ist. Ich schicke Ihnen mit gleicher Post eine Abhandlung von Herrn Haenzel als Fortsetzung seiner beiden Arbeiten über die Geometrie der Linearen Strahlenkongruenz, in der er sich wieder in sehr interessanter und eleganter Weise mit den [...]scharen dritter und vierter Ordnung in dieser Kongruenz sowie mit den Ketten von [...]scharen zweiter Ordnung in derselben auseinandersetzt. Ich habe ihm bereits geschrieben und ich meine, wir dürfen auch diese schöne Arbeit ruhig aufnehmen. Wenn Sie derselben Ansicht sein sollten, so brauchen Sie ihm nicht weiter zu schreiben, wenn Sie nicht wollen.

Ich selbst habe mich in den letzten Wochen sehr gern mit einer kleinen Untersuchung aus der Theorie der Abelschen Gruppen und daran anschliessend der Congruenzgruppen modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ in algebraischen Körpern beschäftigt. Ich hoffe Ihnen bald eine kleine Note darüber zu schicken. Dann möchte ich gern auf die Auflösung der Gleichungen [...] Reihen eingehen; ich glaube, es wird jetzt schön gehen.

Wir wollen etwa am 1. Februar auf 10 Tage nach Berlin und von da auf etwa 8 Tage nach Dresden gehen; in Berlin habe ich zu tun, in Dresden aber wollen wir uns erholen, was für uns Beide gut und ziemlich notwendig sein wird.

Mit den besten Grüssen an Sie und Ihre liebe Gattin bin ich stets

Ihr

K. Hensel

Soeben kommt Ihr neuer Teil der Zahlentheorie. Herzlichsten Dank. Ich habe die letzten Wochen immerfort mir der grössten Begeisterung im Studium und in der Lektüre der letzten Teile zugebracht. Die Gruppentheorie und die Körpertheorie insbesondere die Theorie der endlichen Körper ist ein richtiger Genuss. Nun freue ich mich sehr auf den § 11, die Analysis in $R_{\mathfrak{p}}$ u. einen Erw. K. Diese Dinge liegen mir doch so sehr am Herzen.

2.45 Undatiert, Hensel an Hasse

Lieber Herr Professor.

Beiliegend sende ich Ihnen einen Fermatversuch, den ich in 3 schnell aufeinander folgenden Lieferungen noch erhalten habe. Leider habe ich nicht viele Hoffnung beim Ueberfliegen der Seiten, aber seien Sie doch recht gelinde mit ihm; er schreibt so rührend. Ich habe ihm schon den Empfang bestätigt, und ihm geschrieben, dass Alles an Sie gegangen ist.

Mit den besten Grüssen und Wünschen stets Ihr

K. Hensel

2.46 23.01.1936, Hasse an Hensel

23. Januar 1936.

Lieber Herr Geheimrat!

Beiliegend die Zusammenstellung für Band 175|2.

Besten Dank für die Arbeit von Haenzel. In Ergänzung zu meinem letzten Brief möchte ich Sie heute in aller Eile nur noch folgendes wissen lassen: Anlässlich der dort erwähnten Dissertation Richter, habe ich mit dem Verleger vereinbart, dass als Norm für die Anzahl der Dissertationen pro Band $\leqq 1$ sein soll. Der Verleger hat dem zugestimmt, allerdings hat Herr Richter nachträglich den Wunsch geäussert, seine Dissertation doch lieber in den Mathem. Ann. zum Druck zu geben. Ich war kürzlich in Leipzig und habe mit Herrn v.d. Waerden darüber gesprochen. Es liegt kein böser Wille vor, sondern nur der Wunsch, möglichst bald das Diplom zu bekommen, und v.d.W. kann es augenblicklich bei den Annalen sehr schnell machen.

Ich habe dann noch eine sehr wertvolle und interessante Arbeit des jungen Frankfurter Mathematikers Schneider bekommen, die er mir schon vor längerer Zeit versprochen hatte. Es handelt sich darin um die Approximation algebraischer Zahlen und zwar um eine bemerkenswerte Verschärfung des bekannten Satzes von Thue|Siegel. Sonst nichts Neues vom Leinestrand.

Mit herzlichen Grüssen von Haus zu Haus Ihr

H. Hasse

2.47 10.02.1936, Hasse an Hensel

10. Februar 1936.

Lieber Herr Geheimrat!

Recht herzlichen Dank für Ihre so freundlichen und anerkennenden Worte. Ich habe sie den Hauptbeteiligten an der Neugestaltung der Theorie vermittelt. Ich denke, diese ganze Art des Aufbaues in meinem Buch ausgiebig zu verwenden.

Heute möchte ich noch mitteilen, dass ich wieder zwei Manuskripte für Crelle bekommen habe, eine längere und sehr tiefe Arbeit von *T e i c h m ü l l e r* über die Struktur der hyperkomplexen Zahlsysteme von Primzahlpotenzgrad bei Primzahlcharakteristik und eine kurze Note von *H. L. S c h m i d,* in der eine interessante Relation zwischen Gauss'schen Summen auf elementarem Wege bewiesen wird, die Davenport und ich in unserer Arbeit im Crelle 172 nur durch tiefer liegende arithmetische Betrachtungen beweisen konnten.

Ende des Monats fahre ich auf etwa drei Wochen nach England. Ich bin zu Vorträgen an der Universität Manchester eingeladen. Für Ihre Reise und Arbeit wünsche ich Ihnen alles Gute. Bitte empfehlen Sie mich Ihren verehrten Angehörigen in Berlin.

H e r z l i c h s t

I h r

H. Hasse

2.48 15.02.1936, Hensel an Hasse

d. 15. Februar 1936.

Lieber Herr Professor.

Herzlichen Dank für Ihren Brief vom 10–2▶ (wir wohnen noch etwa 12–14 Tage zwar bei Dr. G. Hahn, aber nicht in Wannsee, sondern Berlin Tiergartenstrasse 21) Jetzt sind wir ein Paar Tage noch in Dresden in obigem wunderschönen Hotel[1] und geniessen dankbar die grossen künstlerischen Anregungen dieser wirklich herrlichen Stadt. Jeder Tag bringt uns neue Schönheiten und hier sieht man erst wie viel die nicht in jeder Hinsicht erfreuliche Herrschaft von August "the physical strong" wie ihn Carlyle[2] jedesmal etwas vorwurfsvoll nennt, und die seines ihm ähnlichen Sohnes der Hauptstadt Sachsens und damit auch Sachsen selbst gegeben hat.

Ueber die Arbeit von Herrn Teichmüller für Crelle habe ich mich sehr gefreut; Sie haben diesen doch wirklich wissenschaftlich sehr beträchtlichen Mann richtig erobert und Ihre Anregungen sind bei ihm doch auf sehr fruchtbaren Boden gefallen.

Für Ihre Ferienfahrt nach England meine herzlichen Wünsche und ich bitte Sie meine besten Grüsse an den mir bekannten und sympathischen Teil von Manchester sagen zu wollen. Worüber Ihre Vorträge handeln sollen wüsste ich natürlich sehr gern.

Auch ich kann Ihnen von zwei Arbeiten erzählen, die ich für unsere Zeitschrift erhalten habe, und die wir m. E. unbedenklich nehmen können.

Die erste ist eine kleinere Abhandlung von meinem alten Freunde L. Heffter, mit der seinem Begleitschreiben nach seine vielfachen Untersuchungen über den Cauchyschen Integralsatz "für ihn" zum Abschluss kommen. Ich habe sie gelesen und das Resultat scheint mir jetzt wirklich sehr einfach und so klar und naturgemäss zu sein, wie dies in diesem so viel gepflügten Felde überhaupt möglich ist. Es scheint nämlich hiernach dass ein Versuch den C–Integralsatz mit noch einfacheren Voraussetzungen über die Natur des Integranden $f(x)$ zu beweisen völlig zwecklos ist. — Ich habe den Empfang bestätigt und glaubte in Ihrem Sinne zu handeln, wenn ich die wirklich

[1] Hotel Bellevue Dresden
[2] Name undeutlich

interessante kl. Arbeit annahm und ihm auch die von ihm erbetene Zusicherung gegeben habe, dass die Arbeit voraussichtlich noch in diesem Jahre herauskommen würde (Sonst wollte er sie nämlich lieber in seiner Heidelberger Akademie publicieren) Das wird ja auch in der Reihenfolge des Einganges sehr gut geschehen können.

Bei dem zweiten Beitrage handelt es sich um eine Rede von Herren Lorey, die er über Lagrange in einer Festsitzung der Berliner Mathematischen Gesellschaft zur Feier seines 200. Geburtstages gehalten und seitdem in den Math Gesellschaften in Jena und Darmstadt wiederholt hat. Da die math. Gesellsch. in Berlin wie L. schreibt, finanziell sehr schlecht stehen soll und somit ihre Mitteilungen nur noch in ganz verkürzter Form veröffentlichen kann, so fragt Lorey mich an, ob wir geneigt wären diesen Vortrag zu vereinigen[3].

Nun scheint mir, wenn er wirklich gut wäre, könnten wir das vielleicht tun, besonders wo Crelle die Lagrangesche Funktionentheorie doch deutsch herausgegeben hat. Vielleicht würden unsere Leser diese Publikation begrüssen. Ich wollte Lorey antworten, wir bäten ihn den Vortrag gleich an Sie zu senden und nach dem Eindruck den Sie von ihm gewinnen entscheiden Sie dann vielleicht von sich aus auch in meinem Namen.

Mit meiner kleinen Arbeit über die Invarianten der allgemeinen algebraischen Gruppen für eine Primteilerpotenz $\mathfrak{p}^{s+1}$ als Modul bin ich jetzt nach ziemlich angestrengter Arbeit zu einem sehr hübschen und einfachen Resultate gekommen in dem Falle, dass der algebraische Körper keine $\mathfrak{p}^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln enthält. Den anderen Fall habe ich überhaupt noch nicht behandelt und will das auch vorerst nicht tun. Damit ergiebt sich dann auch eine einfache Bestimmung der primitiven $\mathfrak{p}^{k\,\text{ten}}$ Einheitswurzeln in diesen Kongruenzgruppen für ein beliebiges $\mathfrak{p}^k$.

Nun will ich aber diesen langen Brief schliessen; er soll sie doch noch in Göttingen erreichen. Ich habe mich sehr über den Dr. habil. von Herrn Franz gefreut. Hoffentlich gestaltet sich seine nächste Zukunft nun befriedigend. Er liest in Vertretung von Krafft in Marburg Wahrscheinlichkeitsrechnung zweistündig. Krafft ist nun auch für den Sommer für Bonn festgelegt worden. Wenn dieser wertvolle Mensch nun endlich zu festen Verhältnissen käme.

Leben Sie sehr wohl und erholen Sie sich gut. Stets Ihr

K. Hensel

[3] undeutlich

2.49 17.02.1936, Hasse an Hensel

17. Februar 1936

Lieber Herr Geheimrat!

Vielen herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief.▶ Ich freue mich sehr, dass Sie zwei schöne Arbeiten für Crelle in Aussicht haben. Mit der Annahme der Heffterschen Arbeit bin ich natürlich gern einverstanden. Ich bitte dann um baldmöglichste Zusendung des Manuskriptes. Die Rede von Herrn Lorey will ich durchsehen. Bitte schreiben Sie ihm doch, dass er sie mir einsendet. Auf Ihr Resultat über die algebraischen Restklassengruppen bin ich sehr gespannt.

Mit Herrn Teichmüller habe ich ein Tauschgeschäft gemacht. Er wollte die schönen Untersuchungen über die allgemeinen p–adischen Zahlen in der "Deutschen Mathematik" veröffentlichen. Ich habe nun mit ihm abgemacht, dass er diese Untersuchung an Crelle gibt und dafür dann die Arbeit über die p–Algebren, die er kürzlich bei uns eingereicht hatte, in der Deutschen Mathematik veröffentlicht. Ich bin sehr froh, dass es mir gelungen ist, ihn zu diesem Tauschgeschäft zu bestimmen, denn, wenn auch die Arbeit über p–Algebren sehr tief und schön ist, so ist sie doch reichlich abstrakt und steht den Anwendungen auf die Zahlentheorie sehr fern, während die Arbeit über die allgemeinen p–adischen Zahlen sich eng an meine eigenen Arbeiten in Crelles Journal anschliesst und ungleich fruchtbarer für die Zahlentheorie ist.

In England werde ich über die elliptischen Funktionenkörper und auch ein bischen über quadratische Formen vortragen.

Die letzte Zeit hier war sehr aufregend. Ich muss Ihnen gelegentlich darüber einmal mündlich erzählen.

Mit besten Wünschen für Ihren Erholungsaufenthalt, etwas in Eile,

I h r

H. Hasse

2.50 18.02.1936, Hensel an Hasse, Postkarte

von morgen ab: Berlin Tiergartenstrasse 21 b/Dr. Georg Hahn

(Postkarte) d. 18–2–36.

Lieber Herr Professor.

Heute nur herzlichsten Dank für den neuen wichtigen Abschnitt des Buches in den ich mich natürlich schnell und hocherfreut hineingelesen habe. Es ist schön wenn das Werk so fundamentiert wird, dass der Übergang zu den algebraischen Zahlen so natürlich und mit so grossartiger Einfachheit gemacht werden kann. Auch eigene Wünsche und Gedanken finden hier ihre schönste Erfüllung und reinste Darstellung.

Ich kann Ihnen wieder den Empfang einer interessanten Arbeit von Haupt melden: "Ueber ebene Punktmengen mit überall unendlicher Krümmung" (5 Maschinenschriftseiten) in der eine von dem franz. Geometer Bouligand gestellte Frage mit Hilfe von Haupt–Sätzen in bemerkenswert einfacher Weise beantwortet wird. Ich glaube, wir können diese Arbeit ruhig annehmen. Auch Remak hat mir aus Zürich recht befriedigt geschrieben und stellt mir für den Sommer zwei grössere arithmetische Arbeiten in Aussicht, welche in gewissem Sinne eine Fortsetzung seines Beitrages zu meinem Festbande bilden. Die Resultate sind sehr interessant. Herzlichste Grüsse stets Ihr

K. Hensel

2.51 26.03.1936(?), Hasse an Hensel

26.3136

Lieber Herr Geheimrat,

seit einigen Tagen bin ich von meiner Reise nach England wieder zurück. Es war alles sehr interessant, und auch meine Vorträge verliefen zur Zufriedenheit. Ich hoffe recht bald einmal wieder Gelegenheit zu haben, Ihnen über alles mündlich zu erzählen. Heute fehlt mir leider die Zeit zu einem ausführlichen Bericht, denn — wie Sie sich denken können — hier hat sich in der Zwischenzeit eine Unmenge Arbeit angesammelt, und dazu noch hatte ich das Pech, gleich nach meiner Rückkehr drei Tage krank zu sein und so Arbeitstage zu verlieren.

Ich möchte heute nur ganz kurz um folgendes bitten: die Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen hat mich aufgefordert, für die öffentliche Sitzung bis zum 11.4.36 eine nekrologische Notiz über Schottky einzureichen. Ich weiß nun absolut nichts über Schottky und möchte daher Sie bitten, mir doch das, was Sie wissen, in kurzen Stichworten möglichst bald aufzuschreiben. Vielleicht wissen auch Sie nur sehr wenig, aber das ist immer besser als gar nichts, und die Notiz braucht ja nur sehr kurz zu sein.

Die Zusendung von Lorey habe ich inzwischen erhalten aber noch nicht durchgesehen. Ich wäre Ihnen nun dankbar, wenn Sie mir recht bald die schon in Aussicht gestellte Arbeit von Hefter zusenden würden und auch was sonst etwa in der Zwischenzeit bei Ihnen eingegangen ist. Darunter muß wohl eine Arbeit von Haupt sein, jedenfalls habe ich dazu von ihm selbst schon eine Ergänzung bekommen.

Sehr begrüßen würde ich es, wenn Sie auch Ihren eigenen in Aussicht gestellten Beitrag über die Invarianten der allgemeinen algebraischen Gruppen abgeschlossen hätten, denn wir können jetzt sehr viel Material brauchen. Dem Verleger liegt daran, den Druck zu beschleunigen, und zwar ist das eine der Nebenwirkungen des Erscheinens der 'Deutschen Mathematik', von der er ernste Konkurrenz fürchtet.

Sobald ich kann, lasse ich mich einmal in Marburg sehen, um vieles mit Ihnen mündlich zu besprechen.

Einstweilen herzlichste Grüße

Stets Ihr

H. Hasse

2.52 27.03.1936, Hensel an Hasse

Marburg d. 27. März 1936.

Lieber Freund.

Eigentlich sollte Sie dieser Brief nach Ihrer englischen Reise sehr herzlich in Göttingen begrüssen denn ich nahm an, Sie würden Ihren Aufenthalt dort bis an die Grenze der Möglichkeit ausdehnen um dann mit den dort neu gewonnenen Kräften unmittelbar in die Vorlesungen am Dienstag[1] zu springen. Nun kommt heute Ihr lieber Brief▸ aus dem ich sehe, dass Sie schon einige Tage in G. und leider auch, dass Sie dort 3 Tage nicht wohl gewesen sind. Hoffentlich war es nichts Schlimmes, das etwa einen Teil Ihrer englischen Erholung aufgefressen hätte.

Von mir muss ich Ihnen leider erzählen, dass es mir inzwischen garnicht gut ergangen ist. Ich habe bei meiner Rückkehr von Dresden wo wir 10 Tage lang herrlich und höchst anregend gelebt hatten, in Berlin bei meinem Schwager `[...]`[2] Hahn einen sehr starken Gichtanfall gehabt (den ersten seit etwa 14 Jahren) Ich lag dort über 3 Wochen krank zu Bett, hatte eine Schwester, ausserdem aber sehr viele Schmerzen und entschloss mich dann ohne hergestellt zu sein nach Marburg zurückzufahren und hier habe ich weiter krank gelegen und erst jetzt beginne ich mich ganz langsam zu erholen, fühle mich aber schwach und kaput, und habe von dieser langen Zeit den Hauptteil für jede Arbeit verloren, was mir besonders nahe geht.

Ich würde mich herzlichst freuen, wenn ich Sie hier wiedersehen dürfte. Der Wunsch nach Reisen ist uns vorläufig vergangen, so dass wir sicher zu Hause sind; und ich bin doch sehr neugierig viel von Ihnen auch über die Reise und von England zu hören, das mir jetzt wieder durch die politischen Ereignisse der letzten Wochen so angenehm und interessant geworden ist.

Sehr gern werde ich Ihnen auf ein ganz kleines Zettelchen alles aufschreiben, was ich über unseren guten Schottky weiss. In der Tat ist es nicht allzuviel, denn wie ich in Berlin war, war er in Zürich und Marburg und wie ich in Marburg war, war er in Berlin so dass wir nur sehr wenig zusammen waren. Es handelte sich übrigens nur um 1000 Mark jährlich die Althoff ihm nicht mehr bewilligen wollte, dass er in Marburg und ich als Ord. in Berlin

[1] undeutlich
[2] vielleicht 'Georg'

blieb. Ich bin aber sehr glücklich dass es so gekommen ist, denn ich bin hier immer sehr glücklich gewesen und ganz sicher hätte ich doch Sie nicht so gut kennengelernt und so viel durch Sie und von Ihnen gehabt.

Morgen bekommen Sie noch die Crelle–MS Heffter (die dritte Fassung sehr viel besser als die beiden ersten) Haupt u.a. Meine eigene kleinere Arbeit ist gut vorwärts gegangen. Hoffentlich dauert sie nicht mehr zu lange.

Mit herzlichen Grüssen bin ich stets Ihr

K. Hensel

Kennen Sie wohl die sehr schöne Arbeit meines früheren Schülers Dr Strassmann in der er die Frage nach der notwendigen und hinreichenden Bedingung vollständig löst, dass ein beliebiger algebr. Körper $\mathfrak{K}(\mathfrak{p})$ die $\mathfrak{p}^{\nu\,\mathrm{ten}}$ Einheitswurzeln für ein beliebiges ν enthält. Ich habe die Frage für die $\mathfrak{p}^{\mathrm{ten}}$ E. W. gelöst. Dies ist die ganz allgemeine Frage.

Was die Arbeit von Hausdorff betrifft, so ist sie so noch nicht zur Veröffentlichung bestimmt. Ueber ihre Genesis giebt der beiliegende Brief Hs Auskunft. Mir schien sie doch viel Interessantes zu enthalten, aber garnicht das Viele zu berücksichtigen, was über diese Frage schon geschrieben ist. Da möchte ich Sie nun sehr bitten, sich diese Blätter anzusehen und von sich aus Herrn H., der grossen Wert darauf legte, Ihre Ansicht zu sagen. Was davon Wert hat, würde er gern bei uns veröffentlichen.

2.53 30.03.1936, Hasse an Hensel

30. 3. 36

Lieber Herr Geheimrat,

es tut mir herzlich leid, aus Ihrem Brief zu erfahren, daß es Ihnen gar nicht gut gegangen ist. Recht von Herzen wünsche ich Ihnen, daß Sie den bösen Gichtanfall bald ganz überwinden. Ich kann mir denken, wie sehr Sie durch die starken Schmerzen in allem und vor allem in Ihrer Arbeit behindert waren.

Vielen herzlichen Dank für die versprochene Hilfe über Schottky. Die Manuskripte von Hefter und Haupt habe ich angesehen und gleich zum Druck nach Berlin eingesandt. Das Manuskript von Hausdorff will ich in den nächsten Tagen genau lesen und werde dann direkt mit ihm darüber in Verbindung treten.

Natürlich kenne ich die schöne Arbeit von Straßmann. Ich habe damals ausführlich mit ihm darüber gesprochen. Ich glaube allerdings, daß man die Lösung heute noch besser geben kann, und vor allen Dingen kürzer, als er es getan hat.

Mit vielen herzlichen Grüßen und guten Wünschen stets Ihr

H. Hasse

2.54 08.04.1936, Hensel an Hasse, Postkarte

(Postkarte) Marburg d. 8–4–36

Lieber Herr Professor.

Ich nahm an, dass Ihnen mit der hoffentlich bereits eingetroffenen Sendung von Frau G.R.S. genügend Material für Ihren Vortrag gegeben wäre. Meine Erinnerungen sind teils so, dass Sie sie für Ihren Zweck kaum brauchen können, teils so, dass Sie sie mit grösster Leichtigkeit aus der Litteratur (Fortschritte etc) selbst zur Verfügung haben.

Falls ich also keine Nachricht von Ihnen über diese Frage erhalte sende ich Ihnen weiter nichts über S.[1] Anderenfalls schreibe ich Ihnen noch schnellstens, was ich weiss.

Mir geht es besser, aber leider noch immer nicht gut. Mit herzlichen Grüssen bin ich

stets Ihr

K. H.

[1] undeutlich

2.55 16.04.1936, Hasse an Hensel

16. 4. 36

Lieber Herr Geheimrat,

vielen herzlichen Dank für Ihre bereitwillige Vermittlung in der Angelegenheit Schottky. Ich habe von Frau Geheimrat Schottky alles was ich an Material brauchte erhalten und daraufhin seine kleine nekrologische Notiz für den Jahresbericht der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften zusammengestellt.

Beiliegend habe ich Ihnen die Disposition für Band 175, Heft 4 von Crelles Journal zusammengestellt. Damit ist allerdings das vorhandene Material bis auf eine drei Seiten lange Arbeit von Schmid völlig aufgebraucht. Ich hoffe bestimmt, daß wir in der nächsten Zeit eine Reihe von weiteren Manuskripten hereinbekommen, sonst müssen wir im Herbst mit der Produktion aussetzen.

In der Hoffnung, daß Sie sich nunmehr völlig erholt haben, bin ich mit herzlichen Grüßen von Haus zu Haus

stets Ihr

H. Hasse

2.56 27.04.1936, Hensel an Hasse

Marburg d. $3^3 - 2^2 - 44^2$

Lieber Herr Professor.

Beiliegend sende ich Ihnen eine Anzahl von Abhandlungen für das Journal zu denen ich einige kurze Bemerkungen anfügen möchte.

1) Die Arbeit von Herrn Studienrat Denk aus Erlangen erhielt ich erst gestern Abend und konnte sie nur oberflächlich lesen, wollte sie aber doch gleich mitschicken, da sie ja bei Ihnen in den allercompetentesten Händen ist und da Sie bei der jetzt herrschenden Leere doch wohl gerne nach Möglichkeit einen Ueberblick über den "visible supply" für Crelle haben möchten.

Mir scheinen die so zahlreich eingeführten Begriffe in diesem so viel behandelten Gebiete wirklich neu; weniger deutlich ist mir, ob sie wirklich notwendig sind, um im Gebiete der Permutationen zu neuen Resultaten zu kommen, die auch ausserhalb dieser Terminologie von Wert sind. Sollte das letztere der Fall sein, so könnten wir vielleicht bei unserem Stoffmangel die Arbeit aufnehmen. Ich hab Herrn Haupt vorläufig nur eine Empfangsbestätigung geschickt. Vielleicht teilen Sie dann Herrn Denk das definitive Urteil mit, dem ich mich in jedem Falle bedingungslos anschliesse.

2) Etwas länger hatte ich die italienische Arbeit des Prof. Ugo Broggi aus Mailand, der augenblicklich in Spanien ist, und dem ich auch dahin schon vorläufig berichtet habe. Ich glaube, dass wir diese Arbeit die über dieses vielbehandelte Thema recht einfache und recht interessante Ergebnisse giebt und in der die früheren Resultate auch sorgfältig berücksichtigt sind, ruhig annehmen.

3) Recht zweifelhaft bin ich bei der Arbeit des Herren Werren[1] über die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Ich lege Ihnen ein kurzes Gutachten des Herren Krafft bei, mit dem ich sie eingehend durchsprach und mit der ich vollkommen übereinstimme. Durch das Scheiden des Herrn T aus G haben Sie ja allerdings den "höchsten Gutachter" auf diesem Gebiete verloren, der ja durch seinen letzten Beitrag in der neuesten Zeitschrift bewiesen hat, dass er in allen mathematischen Fragen das entscheidende Wort zu sagen hat. Aber vielleicht können Sie doch die hier vorliegende Frage in der für uns

[1] Name undeutlich

wichtigen Form entscheiden. Ich habe an Herrn W. bereits geschrieben, aber so, dass Sie in Ihrer Entscheidung völlig frei sind.

4) Ich lege noch einen Beweis des Fermatschen Satzes bei, mit der Bitte, ihn dann an die im Begleitschreiben angegebene *deutsche* Adresse zurücksenden zu wollen, wenn Sie einverstanden sind.

5) Endlich lege ich noch die schwer zu lesende Note von Herrn Karl Glösel[2] bei.

Ich hatte hier einen zweitägigen Besuch von Remak, der in Zürich einen sehr schönen und interessanten Winter mit den (und durch die) dortigen Mathematiker verlebt hatte. Er wird uns wohl in 1–2 Monaten zwei interessante Arbeiten schicken, auf die ich mich freue.

Ich selbst bin in meiner Arbeit über die algebraischen Gruppeninvarianten sehr viel weiter gekommen. Ich glaube sie wird Sie auch interessieren. Ich widerstehe ungern dem Wunsche Ihnen das Wesentliche hinzuschreiben, aber Sie sollen die Arbeiten 1–3 schnell haben.

Soeben kommt Ihre neue hochinteressante Sendung (S.132–173) auf deren Studium ich mich sofort stürzen werde. Herzlichsten Dank.

Viele Grüsse Ihnen und Ihrer lieben Gattin. Kommen Sie nicht einmal nach M. herüber? Es geht mir asymptotisch gut, aber noch immer nicht gut. Stets Ihr

K. Hensel

[2] Name nicht eindeutig lesbar

2.57 07.05.1936, Hasse an Hensel

7. Mai 36

Lieber Herr Geheimrat,

herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief mit dem quadratischen Datum. Von den zugesandten Abhandlungen habe ich — wie es ja wohl von vornherein klar war — die Arbeiten von [...] über die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechung, von H o f m a n n über den Fermat'schen Satz und von G l o e s c h 'Zu Legendres théorie des nombres' ohne weiteres zurückgesandt, dagegen die Arbeiten von D e n k über Permutationen und von B r o g g i über unendliche Gleichungssysteme angenommen.

Bericht über die weiteren Eingänge für Crelle:

1) Wiedereingang nach Umarbeitung durch den Autor (unter starker Beteiligung von mir): U. W e g n e r: Diskriminanten auflösbarer Körper.

2) die Habilitationsschrift von E. W i t t – Göttingen: Zur Theorie der quadratischen Formen, die außerordentlich tief und schön ist und meine Bemühungen von vor 13 Jahren in höchst eleganter Weise aus– und unterbaut.

3) V a s s i l i o u – Saloniki: Über affektlose Gleichungen, eine kleine Note, die an Untersuchungen von van der Waerden anknüpft.

4) H a s s e : Diskriminante auflösbarer Körper, im Anschluß an die oben erwähnte Arbeit von W e g n e r . Ich gebe hier eine Begründung der grundlegenden Wegnerschen Sätze, indem ich die schöne Strukturtheorie der Diskriminante heranziehe, die Artin Ihnen zum 70. Geburtstag gewidmet hat.

5) H a s s e : Über primäre Zahlen bei Primzahlpotenzexponenten, worüber ich Ihnen bereits im Februar brieflich berichtete.

So kommt allmählich doch wieder Material für den nächsten Band zusammen. Über die in Aussicht gestellten Arbeiten von R e m a k und von Ihnen freue ich mich natürlich sehr.

Nächste Woche fahre ich auf Einladung von Sperner nach Königsberg zum Vortrag über quadratische Formen, und Himmelfahrt fahren wir im Auto nach Hannover, um den 80. Geburtstag der ältesten Schwester meines Vaters im großen Familienkreis zu begehen. So muß ich leider meine Absicht, wieder einmal nach Marburg zu kommen, auf den Monat Juni verschieben, denn es wird mir sonst bei dem laufenden Betrieb des Semesters zu viel.

In der Hoffnung, daß es Ihnen nun endlich wieder ganz gut geht und mit herzlichen Grüßen von Haus zu Haus

stets Ihr

sehr ergebener

H. Hasse

2.58 Undatiert, Cram an Hensel

Sehr geehrter Herr Geheimrat!

Die Sorge um die Weiterführung des Crelleschen Journals und nicht minder die Besorgnis, die wir Ihretwegen selbst hegen, lassen uns eine Frage aufwerfen, die wir Ihrer wohlwollenden Ueberlegung unterbreiten möchten. Bei den langjährigen persönlichen und geschäftlichen Beziehungen, die Sie mit uns und unserer Firma verbinden, und bei den Verdiensten, die Sie sich um Crelles Journal erworben haben, halten wir es für unsere Pflicht, Ihnen eine Situation ersparen zu wollen, die unseres Erachtens Ihnen und unserer Zeitschrift abträglich wäre.

Alle Anzeichen deuten darauf hin, dass im Herbst auch für die wissenschaftlichen Zeitschriften ein Erlass zu erwarten ist, der in dem vorliegenden Fall Ihren Rücktritt von der Herausgeberschaft des Crelleschen Journals zur Folge haben müsste. Eine derartige Massnahme wäre natürlich für uns bindend und darum glauben wir Ihnen einen Dienst zu erweisen, wenn wir die Anregung geben, ihr zuvorzukommen. Das würde bedeuten, dass Sie jetzt schon von sich aus freiwillig zurückträten. Eine Begründung mit Ihrem Alter würde jede missliebige Ausdeutung ausschliessen; unter allen Umständen aber würde dadurch ein Ihnen wie uns gleich peinlicher Eingriff vermieden.

Prüfen Sie, sehr geehrter Herr Geheimrat, diese Anregung und fassen Sie sie nicht anders auf als sie gedacht ist: nach aussen und innen als eine freundschaftliche Lösung eines jahrzehntelangen Verhältnisses, die geeignet ist, Ihnen jede Kränkung, die zu vermeiden uns ein wirkliches Bedürfnis ist, zu ersparen.

Unseres wärmsten Dankes für Ihre hingebende Tätigkeit dürfen Sie sich jederzeit versichert halten.

Mit freundlichen Grüssen

Ihre ganz ergebenen

…

2.59 11.06.1936, Hensel an Hasse, Postkarte

(Postkarte) Marburg–Lahn, d. 11–6–1936.

Mein lieber Freund.

Soeben erhielt ich vom Verlag de Gruyter einen Brief, in dem die Zukunft unserer Zeitschrift besprochen wird; da ich annehme, dass Sie eine Abschrift desselben erhalten haben, so brauche ich nicht genau auf seinen Inhalt einzugehen, und ich möchte Ihnen nur sagen, dass ich der Ueberzeugung bin, dass es das Richtigste und Anständigste ist, dass ich selbst meine Tätigkeit als Leiter unserer lieben Zeitschrift abschliesse. Dass mir dieser Schritt sehr schwer wird, können Sie sich wohl denken: 25 Jahre habe ich dieser Aufgabe gern und freudig gewidmet, 51 Bände habe ich herausgegeben und ich habe so ein schönes Stück der ruhmvollen Geschichte der deutschen Mathematik handelnd durchleben und bewundernd mitgeniessen dürfen. Das Beste und Liebste, was mir diese lange Arbeit gegeben hat war aber in den langen letzten Jahren die Zusammenarbeit mit Ihnen, der Sie so manche Wünsche und Hoffnungen, die ich in meinem langen Leben hegte, so schön erfüllt haben.

Dass ich einen anderen Abschluss meiner Arbeit am Crelleschen Journale früher erhofft habe, werden Sie mitempfinden, aber es ist auch etwas wert, sich als anständiger Mensch in schweren Zeiten fühlen zu dürfen.

Ich weiss, dass die Zukunft unserer Zeitschrift in Ihren Händen am besten und schönsten aufgehoben ist und grüsse Sie in alter Freundschaft

Ihr K. H.

2.60 18.06.1936, Hensel an Cram

Abschrift.

Marburg–Lahn, den 18. Juni 1936.

Sehr geehrter Herr Cram!

Ihr Brief vom 9. ds. Mts. hat mich natürlich sehr bewegt, denn die Verbindung mit Ihnen, Ihrem berühmten ehrwürdigen Verlage und besonders mit unserer Zeitschrift ist ein so wesentlicher Bestandteil meines geistigen und wissenschaftlichen Lebens geworden, dass mir die jetzt notwendig werdende Lösung bitter schwer wird; meine Selbstachtung gebietet mir aber, unter diesen Teil meiner Lebensarbeit den Schlussstrich zu ziehen.

Seit meiner Studienzeit habe ich schon für die Entwicklung des Crelleschen Journals unter meinen grossen Lehrern Weierstrass Kronecker und Helmholtz tätig und begeistert mitarbeiten dürfen. Ueber 24 Jahre habe ich unsere Zeitschrift geleitet und und 51 Bände herausgeben können. Das ist doch eine so enge Beziehung, wie sie wohl nicht oft vorkommt, und ich möchte gerade heute dankbar bekennen, wie schön und wertvoll mir diese Arbeit durch die vorbildliche Unterstützung von Herrn Dr. de Gruyter und von Ihnen gewesen ist. Es wird mir eine gute Erinnerung bleiben, dass ich so lange Zeit mit zwei *solchen* Verlegern habe arbeiten dürfen.

Es ist mir ein Trost, dass die Zukunft unseres Crelleschen Journals in Ihren Händen und unter der Leitung von Herrn Professor Hasse so gut aufgehoben ist, wie dies jetzt überhaupt irgend möglich ist.

Bitte sagen Sie doch Herrn Grethlein meinen herzlichen Dank für seine wertvolle und fördernde Mitarbeit an unserem gemeinsamen Werke, und gedenken Sie auch ferner freundlich

Ihres Ihnen aufrichtig ergebenen

gez. Kurt Hensel

2.61 25.06.1936, Hasse an Hensel

25. Juni 36

Lieber Herr Geheimrat,

der Verlag de Gruyter hat mich gebeten, mich mit Ihnen darüber zu besprechen, in welcher Form die in Aussicht genommene Änderung in der Herausgeberschaft des Crelleschen Journals am zweckmäßigsten bekannt gegeben wird. Der Verlag regt an, daß Sie selbst auf der ersten Seite des letzten (4.) Heftes vom laufenden Band 175 Ihren Rücktritt unter Berufung auf Ihr Alter anzeigen, und daß dann der Verlag und ich einen Ihre Tätigkeit betreffenden Absatz darunter anfügen. Ich finde diesen Vorschlag durchaus passend. Wenn Sie ihm zustimmen, so wäre ich Ihnen dankbar, wenn Sie mir den von Ihnen ausgehenden Teil dieser Bekanntgabe bald zuschickten.

Der Verlag hat mir angeboten, daß ich mit der Herausgabe des Crelleschen Journals vom 176. Band ab betraut werde und hat mir auch schon einen Entwurf für einen Herausgebervertrag zugeschickt.

Ihr Brief vom 18. Juni an Herrn Cram, der mir in Abschrift zugesandt wurde, hat mich tief bewegt. Ich weiß, wie schwer Ihnen dieser Entschluß geworden ist, und Sie wissen aus meinem Brief von voriger Woche auch, wie ich zu all dem stehe.

Meine Vorlesung über Zahlentheorie werde ich mit dem dritten Teil dieses Semesters abschließen. Ich bin bei weitem nicht so weit gekommen wie ich wollte sondern habe nur ungefähr den ersten Band des geplanten Buches, nämlich die allgemeine Begründung der Theorie vorgetragen. Ich habe mich eben sehr ausführlich bei den Grundlagen aufgehalten und auch viel Zeit durch die Ereignisse am Anfang dieses Semesters verloren, sowie durch die Einfügung der Theorie der quadratischen Formen. Ich werde nun in den Ferien wie gesagt daran gehen, diesen ersten Band des Buches in druckfertige Form zu bringen.

In der Hoffnung, daß es Ihnen und den Ihren gut geht, bin ich mit herzlichsten Grüßen

stets Ihr

H. Hasse

2.62 28.06.1936, Hensel an Hasse

d. 28. Juni 1936

Lieber Herr Professor.

Ich bin natürlich mit den Vorschlägen von Ihnen und dem Verlage einverstanden und möchte nur, dass ich die ganze Sache, die mich doch sehr angreift, weil sie mir nahe geht, möglichst schmerzlos hinter mich bringen kann.

Ich wünsche Ihnen von Herzen, dass niemals eine Arbeit von Ihnen, die Sie mit solcher Liebe übernommen und durchgeführt haben, wie ich diese, ein ähnliches Ende nehmen muss; doch kann und wird das ja bei Ihnen niemals vorkommen. Sed haec quidem hactenus. Es wäre mir angenehm, wenn Sie mir vielleicht einen kleinen Entwurf meiner eigenen Addication senden könnten, den ich ja dann vielleicht noch nach meinen Wünschen modificieren könnte. Ein Anderer kann so Schmerzliches immer noch besser sagen als man selbst, und zu Ihnen habe ich das beste Vertrauen, wie immer.

In alter Freundschaft Ihr

K. Hensel

2.63 04.07.1936, Hasse an Hensel

4. Juli 36

Lieber Herr Geheimrat,

gern komme ich Ihrem Wunsch nach, für die Abfassung der von Ihnen erbetenen Anzeige jedenfalls den Grundstock zu liefern. Sie erhalten ihn auf dem beiliegenden Blatt. Ich bin mir nicht ganz sicher, ob ich dort die richtigen Worte gefunden habe. Sie können ja den Text noch nach Belieben abändern oder ergänzen.

Ich fahre nun am 12. Juli nach Oslo zum Kongreß. Augenblicklich bin ich noch sehr intensiv mit der Vorbereitung meines Vortrags beschäftigt. Die Tage werden gewiß sehr anregend aber auch sehr anstrengend sein.

Mit herzlichen Grüßen von Haus zu Haus

stets Ihr

H. Hasse

2.64 11.07.1936, Hasse an Hensel

11. Juli 1936

Lieber Herr Geheimrat,

Herzlichen Dank für Ihre freundlichen Zeilen, und Ihre guten Wünsche für Oslo. Ich hoffe, dass mich das Davenportsche Auto nach dem Kongress zu einigen der Sehenswürdigkeiten des Landes hinführen wird, wenn ich auch aus anderen Gründen nicht sehr viel Zeit zur Verfügung haben werde.

In den letzten Tagen habe ich sehr intensiv an meinem Vortrag gearbeitet. Ich wollte doch sehr gerne noch ein Stückchen weiter kommen, als ich in meinen bisherigen Veröffentlichungen gekommen war. Nun hat gerade vor kurzem Herr Deuring den entscheidenden Gedanken gehabt, der zur Bewältigung des Falles beliebigen Geschlechts führt. Dieser Gedanke besteht in der Algebraisierung der Hurwitzschen Theorie der Korrespondenzen algebraischer Riemannscher Flächen. Es sieht in der Tat so aus, als ob man damit zu einer vollen Übertragung meines Beweises der Riemannschen Vermutung auf Kongruenzfunktionenkörper beliebigen Geschlechts kommt. Leider ist aber die Zeit zu kurz gewesen, als dass ich die sehr schwierige Einzeldurchführung noch vor dem Kongress erledigen konnte. Immerhin ist es doch schon möglich, den Weg zum Ziele in rohen Umrissen zu sehen.

Dass Guldberg inzwischen gestorben ist, war Ihnen wohl entgangen. Denn Sie tragen mir noch Grüsse an ihn auf. Die Grüsse an Störmer werde ich gerne ausrichten.

Nun haben Sie mir gar nicht auf meinen Entwurf geantwortet, den ich meinem letzten Briefe beigelegt hatte, ich meine den Entwurf für Ihre Anzeige der Abgabe Ihrer Herausgeberschaft. Die Verleger drängen mich wiederholt, dass dies fertiggestellt wird. Bitte lassen Sie mich doch Ihre Zustimmung oder gegebenenfalls Ihre Abänderungsvorschläge dazu recht bald wissen, am besten direkt nach

Oslo, Pensjon Frogner, Fr. Stangsgt. 33.

Für den Fall, dass Sie das Blatt nicht zur Hand haben, lege ich noch einmal einen Durchschlag bei. Auch möchte ich Ihnen den Text der kurzen Bekanntgabe vorlegen, die ich selbst unter die Ihre setzen wollte. Ob der Verlag von sich aus noch etwas dazu setzt, weiss ich nicht, ich finde es eigentlich nicht notwendig.

Auf Ihre schönen Untersuchungen über die algebraischen Kongruenzgruppen freue ich mich sehr.

Mit herzlichen Grüssen stets Ihr

H. Hasse

2.65 12.07.1936, Hensel an Hasse

Marburg den 12. Juli 1936

Lieber Herr Professor.

Beiliegend sende ich Ihnen nun die Anzeige der Abgabe meiner Herausgeberschaft. Offen gestanden verstehe ich nicht recht, warum die Verleger Sie "wiederholt gedrängt" haben, dass diese Anzeige so schnell fertiggestellt werden sollte. Ich habe dem Verlage sofort nach Ihrem Briefe meinen Rücktritt angezeigt, so dass die Herren über diesen wichtigsten Punkt völlig beruhigt sein konnten. So viel ich weiss soll die Anzeige selbst erst im letzten Hefte des 175 Bandes erscheinen, von dem doch jetzt erst das vorletzte Heft gedruckt wird. Also warum diese grosse Eile?

Und wenn sie es damit schon so eilig hatten, warum schrieben sie mir dann nicht direkt und behelligten dafür Sie damit, dem die Uebermittelung dieser Anfragen an mich doch sicherlich nicht ganz leicht geworden ist?

Ich bitte Sie, dem Verlage nur meine Anzeige zu übermitteln aber diesen meinen Brief *nicht* etwa beizulegen, denn ich möchte mich ihm gegenüber nicht noch in weitere Ausführungen einlassen.

Ihren Entwurf, der den Inhalt meines ersten Briefes an Sie kurz und gut zusammenfasst, habe ich mit bestem Danke benutzt, habe ihn aber allerdings in seiner zweiten Hälfte abgeändert, denn es war mir ein inneres Bedürfnis Ihnen noch ganz besonders für die schöne Zeit unserer gemeinsamen Arbeit zu danken; dann aber musste ich den Dank an den Verlag etwas weniger warm gestalten als ich es sonst wohl getan hätte denn schon einmal vorher und dann jetzt beim Schlusse meiner Arbeit am Crelleschen Journale erschien mir ihre Mitwirkung nicht ganz so aufrecht und ethisch wertvoll wie früher und ich glaube, der Vorgänger Herr Dr de Gruyter würde da vielleicht etwas anders gedacht und gehandelt haben. Mit Ihren allerdings sehr kurzen Worten für die Uebernahme der Herausgabe bin ich einverstanden.

Dass Sie für Ihren Vortrag für Oslo noch nicht ganz so weit gekommen sind, als es Ihnen vorschwebte, tut mir auch leid. Indessen sind Sie und Herr Deuring durch Ihren letzten wunderschönen Gedanken so weit gekommen, dass Sie das grosse Ziel vollständig werden herausheben können, und dass ist doch für den Vortrag eine grosse Sache.

Ueber den Tod von Guldberg, von dem ich wirklich nichts gehört habe, bin ich sehr traurig. Ich hatte ihn bei mehreren Besuchen in Marburg lieb gewonnen, und fühlte mich Störmer und ihm durch den liebenswürdigen Gedanken, mich zum Osloer Doktor zu machen, immer etwas näher verbunden.

Dass Sie mit Herren Davenport die Schönheiten Norwegens im Auto kennen lernen werden freut mich sehr. Machen Sie es doch ja nicht zu kurz. Wer weiss wann Sie noch einmal dorthin kommen; und jedenfalls können Sie Norwegen nicht auf schönere Weise kennen lernen. Ich freue mich herzlich darauf, in nicht zu ferner Zeit viel von Ihnen über Oslo, den Congress und Norwegen zu hören.

Nun leben Sie sehr wohl, lieber Herr Professor, haben Sie eine schöne Zeit und bleiben Sie etwas gut Ihrem

Kurt Hensel

Grüssen Sie Ihren liebenswürdigen und bedeutenden Chauffeur herzlich von mir.

2.66 30.07.1936, Hasse an Hensel

30. 7. 1936

Lieber Herr Geheimrat,

Vielen herzlichen Dank für Ihren lieben Brief (▸ ?), der mich in Oslo erreichte. Der Kongress war ein grosses Erlebnis. Er verlief in jeder Weise harmonisch. Wir Deutschen hatten alle den Eindruck, dass er insbesondere ein voller Erfolg für uns war. Es ist *sehr* schade, dass Sie nicht auch dort waren. Von vielen Seiten wurde nach Ihnen gefragt und Ihr Fehlen bedauert. Ich habe allen denen, die mich nach Ihnen fragten, und überhaupt allen Ihren Freunden und Bekannten Grüsse von Ihnen ausgerichtet und von Ihnen erzählt. Oslo ist in der Tat eine sehr schöne Stadt. Die Gastfreiheit, mit der wir dort empfangen wurden, war überwältigend. Die Organisation war mustergültig und jeder hatte das Gefühl, dass es gar nicht schöner hätte sein können. Das Königshaus nahm sogar von uns Notiz, indem wir alle zu einem Tee–Empfang ins Schloss gebeten wurden, wo König und Königin sich unter uns mischten und jedem die Hand drückten. An einem anderen Tage begleitete uns das Kronprinzenpaar auf einer 8–stündigen Ausfahrt mit einem grossen Amerikadampfer in den Oslofjord.

Hinter dem Kongress bin ich noch zwei Tage mit Davenport und den Mordells ins Innere des Landes gefahren, und zwar durch das Numedal und das Hallingdal. Wenn das auch nicht die allerschönsten Partien sind, so haben wir doch einen grossartigen Eindruck vom Land bekommen und viel Prachtvolles an Landschaft gesehen.

Ihren Entwurf habe ich nun an de Gruyter eingeschickt. Natürlich habe ich Ihren Brief▸ an mich nicht beigelegt und auch von dem was Sie mir schrieben gar nichts durchblicken lassen. Der Verlag war wohl deshalb eilig, weil er das Heft 4 gerne noch im August herausbringen will und mit der Schwierigkeit der brieflichen Verbindung in den Ferien rechnete.

Ich habe nun meine eigene Anzeige doch noch etwas ausführlicher gestaltet und lege Ihnen den zweiten Entwurf bei. Hoffentlich findet dieser Ihren Beifall. Ich möchte ganz offen sein und Ihnen sagen, dass es mir nicht gut erscheint, die Namen Kronecker und Fuchs explizit zu nennen. Daher habe ich überhaupt von der Nennung von Namen und von dem Worte “Tradition” abgesehen. Für die meisten Mathematiker genügt wohl der Hinweis auf ‘Ihre grossen Lehrer' in der Form wie ich ihn gebracht habe. Hoffentlich verstehen Sie mich in diesem Punkte richtig. Ich möchte doch auf alle Fälle vermeiden, dass unser Journal irgendeinen Schaden oder Nachteil hat, und da ist es heute richtig, wenn man jegliche möglichen Angriffspunkte vermeidet. Auch in der D.M.V. verfolgen wir notgedrungen diese nicht immer von Herzen kommende Politik, weil wir das Ganze nicht aufs Spiel setzen wollen.

Nun bin ich sehr gespannt, was Sie für schöne Resultate über die Kongruenzgruppen gefunden haben. Herr Franz schrieb mir neulich schon ein paar Worte darüber.

Bitte lassen Sie mich doch in den nächsten Tagen noch kurz wissen, ob mein neuer Entwurf Ihre Billigung findet.

Von Davenport, der augenblicklich bei uns ist, herzlichen Dank und Erwiderung der freundlichen Grüsse. Wir verbringen unsere Ferien diesmal zu Haus, nachdem wir eben eine neue Wohnung eingerichtet haben.

Dass ich Ihnen 'etwas gut' bleibe ist trivial, sogar noch viel mehr.

Mit herzlichstem Gruss Ihr

H. Hasse

2.67 31.07.1936, Hensel an Hasse

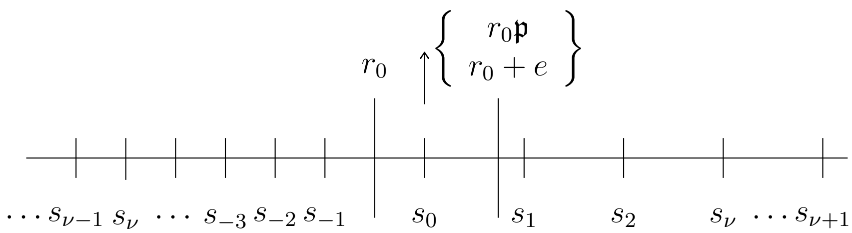
Marburg den 31. Juli 1936.

Lieber Herr Professor.

Ich danke Ihnen herzlich für Ihren lieben Brief▸ und beeile mich Ihnen zu sagen, dass für den mitgesandten zweiten Entwurf Ihrer Ankündigung sehr dankbar und voll einverstanden bin; auch ich bin ganz Ihrer Ansicht, dass Sie alles vermeiden sollten, was unserem lieben Journal Schaden oder Nachteil bringen könnte; darüber würde ich mir selbst die grössten Vorwürfe machen; es ist so sehr schön und warum ausgefallen.

Dass Oslo auch für Sie so schön gewesen ist, hat mich von Herzen gefreut; natürlich ist es mir schwer gewesen nicht dorthin zu kommen, aber ich glaube, dass es vielleicht doch das beste gewesen ist, zu verzichten. Mehrere Grüsse aus Oslo haben mir auch gezeigt, dass allgemeine Befriedigung über die Stimmung etz geherrscht hat. Dass Deutschland so schön abgeschnitten hat, freut mein deutsches und mein mathematisches Herz; dass sie dort aber abgewinkt haben, Engels neuen Lie–Band sich überreichen zu lassen, (was Engel so peinlich berührt hat, dass er die völlig vorbereitete Reise nach O. aufgab) giebt aber doch vielleicht über die Stimmung der leitenden Osloer gegen Deutschland etwas zu denken, denn gegen Sie kann sich das doch nicht richten, da er doch ihr mathematischer Stolz ist.

Meine Arbeit über die algebraischen Kongruenzgruppen habe ich jetzt im Wesentlichen abgeschlossen. Ich will dort zeigen, *wie* die endlichen Congruenzgruppen *aller* Einheiten modulo $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^2, \mathfrak{p}^3, \ldots$ oder, was fast dasselbe ist, aller *Eins*einheiten, gegen die unendliche Abelsche Gruppe aller π–adischen Einheiten $\omega^b \eta_1^{c_1} \eta_2^{c_2} \cdots \eta_\lambda^{c_\lambda}$ bzw $\eta_1^{c_1} \eta_2^{c_2} \cdots \eta_\lambda^{c_\lambda}$ convergieren, wie die Invarianten $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_\lambda$ jener endlichen Gruppen $\mathfrak{G}(\mathfrak{p}), \mathfrak{G}(\mathfrak{p}^2), \ldots \mathfrak{G}(\mathfrak{p}^s) \ldots$ sich für jeden Modul $\mathfrak{p}^s$ ganz direkt und einfach aufstellen lassen, und wie sie sich beim Fortgang vom Modul $\mathfrak{p}^s$ zum Modul $\mathfrak{p}^{s+1}$ ändern, wie gross die Anzahl aller Basis–Elemente η_i ist, welche dieselbe Ordnungszahl $\mathfrak{p}_i$ für einen beliebigen Modul $\mathfrak{p}^s$ besitzen u.s.w. Alles dies ergiebt sich sehr einfach und naturgemäss aus einer gewissermassen dualen Einteilung der Zahlengeraden



von einer Anfangsstelle s_0 aus, nach rechts wo $s_1\ s_2\ \cdots\ s_\nu\ \cdots$ *additiv* congruent s_0 modulo e, nach links wo $s_{-1}\ s_{-2}\ s_{-3}\ \cdots$ zu s_0 multiplikativ congruent sind modulo $\mathfrak{p}$, so dass allgemein $s_\nu = s_0 + \nu e$ ($\nu \geqq 0$) nach rechts, $s_\nu = s_0\mathfrak{p}^\nu$ ($\nu < 0$) nach links ist. Und hier ist s_0 die eindeutig bestimmte zu $s = s_\nu$ additiv mod e bzw multiplikativ mod $\mathfrak{p}$ congruente ganze Zahl in dem Fundamentalintervalle

$$\left(r_0 = \tfrac{e}{\mathfrak{p}^{-1}} < s_0 \leqq \left.\begin{matrix} r_0 + e \\ r_0\mathfrak{p} \end{matrix}\right\} = \frac{e\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1} \right) ,$$

welcher genau e Gitterpunkte enthält.

Dann ergeben sich für die Gruppen

$$\mathfrak{G}(\mathfrak{p}^{s_{-3}}), \mathfrak{G}(\mathfrak{p}^{s_{-2}}), \mathfrak{G}(\mathfrak{p}^{s_{-1}}), \mathfrak{G}(\mathfrak{p}^{s_0}), \mathfrak{G}(\mathfrak{p}^{s_1})\ \cdots$$

aller Einseinheiten $\eta = 1 + n\pi^{[\dots]} + \cdots$ für die Moduln $\mathfrak{p}^{s_\nu}$ betrachtet die folgenden Resultate: Die Grade dieser Gruppen sind Potenzen $\mathfrak{p}^{r_\nu}$ von $\mathfrak{p}$, deren Ordnungszahlen

$$r_\nu = \{s_\nu\}\, f$$

sind, wo allgemein $\{s_\nu\}$ die nächstkleinere ganze Zahl an s_ν bedeutet, mag s_ν nun ganz oder gebrochen sein. Bildet man von der Reihe

$$\ldots\ r_{-3}, r_{-2}, r_{-1}, r_0, r_1, r_2, \ldots$$

ihre erste und zweite Differenzenreihe

$$\ldots\ \lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$$

$$\ldots\ a_{-2}\ a_{-1}\ a_0\ a_1 \ldots$$

so ergiebt die erste die Dimensionszahlen der Gruppen $\mathfrak{G}(\mathfrak{p}^{-s_2})$, $\mathfrak{G}(\mathfrak{p}^{-s_1})\ \cdots$ d.h. die Anzahl der wirklichen Basiselemente ($\eta_1\ \eta_2\ \cdots\ \eta_{\lambda_\nu}$) der Congruenzgruppen $\mathfrak{G}(\mathfrak{p}^{s_\nu})$, die zweite die Anzahlen der Basiselemente gleicher Ordnung welche in den Congruenzgruppen $\mathfrak{G}(\mathfrak{p}^{s_\nu})$ auftreten; und zwar besitzen allgemein diese a_ϱ Basiselemente η_i in einer dieser Congruenzgruppen $\mathfrak{G}(\mathfrak{p}^{s_\nu})$ die gemeinsame Ordnungszahl $\mathfrak{p}^{\nu-\varrho}$.

Es werde hierzu bemerkt, dass der rechte Teil dieser 3 Reihen von r_0 aus so aussieht:

$$\begin{array}{lllllllll}
(r_0 & r_1 & r_2 & r_3) & = & r_0, & r_0+\lambda, & r_0+2\lambda, & r_0+3\lambda \quad \cdots \\
(& \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3) & = & \lambda = ef & \lambda & \lambda & \cdots \quad \cdots \\
(& & a_1 & a_2) & = & & 0 & 0 & \cdots \quad \cdots
\end{array}$$

Andererseits werden natürlich für genügend grosse negative Indices ν alle $r_\nu = \{s_\nu\}f = \left\{\frac{s_0}{\mathfrak{p}^{-\nu}}\right\} = 0$ sodass jene Reihen nach links alle abbrechen.

So ergiebt sich, dass für irgendein ganzzahliges s die Ordnung von $\mathfrak{G}(\mathfrak{p}^s)$ d.h. die Anzahl aller modulo $\mathfrak{p}^s$ incongruenten Einseinheiten: $\eta = \eta_1^{c_1}\eta_2^{c_2}\cdots\eta_\lambda^{c_\lambda}$ $(c_i < \mathfrak{p}_i)$ d.h. dass

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{p}^{f(s-1)} = n(\mathfrak{p})^{s-1}$$

ist und hieraus folgt leicht, dass wie es sein muss, die Anzahl aller modulo $\mathfrak{p}^s$ incongruenten Zahlen des Körpers $K(\mathfrak{p})$ gleich $n(\mathfrak{p})^s$ ist.

Es war mir nun, um eine vollständige Uebersicht über *alle* endlichen Congruenzgruppen $\mathfrak{G}(\mathfrak{p}^s)$ zu gewinnen, interessant, die Beziehung zu finden, welche zwischen derjenigen Gruppenreihe $\mathfrak{G}(\mathfrak{p}^{s_i})$ deren O.Z.$(\cdots s_i \cdots) = (\cdots s_{-2}s_{-1}s_0\cdots)$ einer der Zahlen s_0 des Grundintervalles $(r_0 \ldots r_0\mathfrak{p})$ modulo $\mathfrak{p}$ multiplikativ bzw modulo e additiv congruent sind und der Gruppenreihe $(\ldots s_i' \ldots)$ besteht, deren O.Z.$(\cdots s_i' \cdots)$ der nächstfolgenden Zahl $s_0' = s_0+1$ congruent sind.

Dazu braucht man nur jene Beziehung zwischen den beiden ersten Reihen $(\cdots r_i = \{s_i\}f\cdots)$ und $(\cdots r_i' = \{f_i'\}f\cdots)$ kennen zu lernen, da ja die beiden anderen ihre Differenzenreihen sind.

So ergiebt sich leicht das folgende einfache Resultat:

> Besitzt $s_0 = \mathfrak{p}^\alpha\overline{s_0}$ die Ordnungszahl α so geht $(\cdots r_i'\cdots)$ aus $(\cdots r_i\cdots)$ dadurch hervor, dass alle Glieder von $r_{-\alpha}$ an um f Einheiten vergrössert werden.

So ergibt sich also für die 3 Reihen:

$$\begin{array}{rcl}
(\cdots r_i' \cdots) & = & (\cdots\cdots r_{-(\alpha+1)}, r_{-\alpha}+f, r_{-(\alpha-1)}+f, \cdots\cdots \quad) \\
(\cdots \lambda_i' \cdots) & = & (\cdots \lambda_{-(\alpha+1)}, \lambda_{-\alpha}+f, \lambda_{-(\alpha-1)}, \cdots\cdots \quad) \\
(\cdots \alpha_i' \cdots) & = & (\cdots a_{-(\alpha+1)}+f, a_{-(\alpha+1)}-f, a_{-(\alpha-1)} \cdots\cdots \quad)
\end{array}$$

d.h. man erhält das interessante Resultat:

> Besitzt s_0 die Ordnungszahl α so vergrössert sich beim Uebergang von s_0 zu s_0+1 nur die Dimension $\lambda_{-\alpha}$ von $\mathfrak{G}(\mathfrak{p}^{s-\alpha})$ um f Einheiten, während alle übrigen Dimensionszahlen ungeändert bleiben.

Bei diesem Uebergang nehmen nur die Anzahlen $a_{-(\alpha+1)}$ und $a_{-\alpha}$ bzw um f zu und um f ab.

Alle anderen Ergebnisse muss ich leider weglassen; ich habe Sie schon lang genug mit diesen Dingen ermüdet. Schreiben Sie mir doch bitte ein Wort, ob Sie diese Resultate interessieren. Sie haben mich doch etwa 4 Monate stark aber sehr erfreulich beschäftigt. Sie beziehen sich übrigens nur auf den Fall, dass der algebraische Körper die $\mathfrak{p}^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln nicht enthält. Auf die Modifikationen im anderen Falle gehe ich vielleicht später ein. Es geht auch gut und ist interessant.

Herzliche Grüsse Ihres

K. Hensel

2.68 14.08.1936, Hasse an Hensel

14.8.36

Lieber Herr Geheimrat,

heute habe ich begonnen, Ihre Arbeit über die Kongruenzgruppen durchzulesen. Ich finde die Resultate sehr schön und finde auch, daß die Methode, mit der sie herauskommen, äußerst elegant und durchsichtig ist. Die gruppentheoretische Einleitung finde ich allerdings bei dem heutigen Stand unserer Kenntnisse ein wenig zu ausführlich. Ich werde das Ganze in den nächsten Tagen noch einmal gründlich lesen — bisher habe ich viele Einzelheiten nur überflogen — und dann Ihnen noch einmal über alles schreiben.

Der Verlag de Gruyter hat an mich jetzt geschrieben wegen der Frage der Tauschzeitschriften von Crelles Journal. Er hat mir eine Liste geschickt, aus der ich allerdings nicht ganz klug werde, weil meistens nur die Orte und nicht die Namen der Zeitschriften angegeben sind. Der Verlag möchte gern wissen, ob es bei den bisherigen Austäuschen bleiben soll. Ich wäre Ihnen nur sehr dankbar, wenn Sie mir eine genaue Liste derjenigen Zeitschriften schicken könnten, die Sie im Austausch gegen Crelles Journal bekommen, und wenn Sie mir auch schreiben würden, wie Sie über die Beibehaltung dieser Austäusche denken.

Mit herzlichen Grüßen stets Ihr

H. Hasse

2.69 20.08.1936, Hensel an Hasse

Marburg a.d. Lahn d. 20. August 1936

Lieber Herr Professor.

Ich möchte Ihnen gleich aussprechen, wie dankbar und gerührt ich bin, dass Sie sich mit meiner Arbeit so sehr viel Mühe gegeben haben und wie glücklich ich darüber bin, dass ich nun auf Grund Ihrer mir so wertvollen Ratschläge und Anregungen diese Arbeit in eine richtige brauchbare Form bringen kann. —

Ich kann Ihnen schon jetzt sagen, dass ich *alle* Ratschläge befolgen werde, sie scheinen mir so richtig und überzeugend, dass ich garnichts besseres tun kann. — Die Einleitung wollte ich ja selbst noch ganz wesentlich kürzen, wie ich Ihnen schon mündlich sagte, denn ich weiss sehr gut, dass ich bei meinen Untersuchungen z. Th. wohlbekanntes noch einmal behandelt hatte. Mir schwebte dabei eine so kurze Ueberlegung vor, wie Sie sie so schön angedeutet haben; ich glaube auch man kann wirklich diesen Eingang auch gut verständlich machen.

Auch die Benennungen werde ich natürlich ändern, denn mir selbst waren die mannigfachen Coincidenzen unbehaglich gewesen. Sehr gerne kürze ich auch S. 5–S. 10, wenn mir auch gerade diese Ausführungen nicht unbeträchtliche Mühe gemacht haben, um sie in diese einfache Form zu bringen.

Ich nehme mir nun alles am Sonntag mit nach Marienbad (Hotel Rauscher) und werde dort recht schnell die definitive Redaktion machen und Ihnen baldigst zusenden. Sie haben mir wirklich einen grossen Dienst erwiesen und eine grosse Freude bereitet. Nehmen Sie nochmals meinen herzlichsten Dank dafür.

Ueber die Frage der Tauschzeitschriften könnten wir vielleicht bald einmal mündlich sprechen. Ich kann mir denken, dass Sie bei Ihrem jetzigen Amt in der D.M.V. und bei der unglaublich schönen mathematischen Bibliothek Ihres Institutes nicht so grossen Wert auf noch mehr Zeitschriften augenblicklich legen. Indessen kann sich Beides jeden Moment ändern und ich möchte hervorheben, dass mein Anrecht auf die Austauschexemplare, die mir allerdings in der ganzen Zeit *von höchstem Werte* gewesen sind, mit den Jahrgängen nach meiner Amtsniederlegung meiner Auffassung nach erlischt;

allerdings giebt es ja dafür keinen Präcedenzfall, denn alle meine Vorgänger sind ja erst bei ihrem Tode ausgeschieden. Mein jetziges Ausscheiden als Lebender darf ich also als eine besondere Ehrung für den längst wirkenden Leiter d. Journals ansehen.

Aber meiner Ueberzeugung nach *ist* die Rechtslage so. Also werden wir mit Ihnen und mit dem Verlage zu einem guten Ende gelangen können. Wenn ich vorläufig noch einige Zeit Einsicht in einige der mich am meisten interessierenden Zeitschriften behalten könnte (besonders Acta, Wiener Monatshefte, Annalen und Fortschritte d. Math.; Crelle werde ich doch wohl sowieso weiter erhalten wie die Mitglieder des beratenden Ausschusses, so würde mich das sehr erfreuen). Nun leben Sie sehr wohl, lieber Freund, haben Sie nochmals herzlichsten Dank v. ihrem getreuen

K. Hensel

2.70 27.08.1936, Hasse an Hensel

27.8.36

Lieber Herr Geheimrat,

recht herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief▶. Wegen der Tauschzeitschriften wollen wir also dann bei Gelegenheit unseres nächsten Zusammentreffens einmal mündlich sprechen. Ich habe den Verlag gebeten, Ihnen wie bisher alles bis auf weiteres zuzusenden. Eine heute an mich gelangte Tauschsendung aus Moskau habe ich gleich an Ihre Marburger Adresse weitergeleitet.

Wenn es nicht so schwer wäre, mit dem Auto ins Ausland zu reisen, so würde ich Sie bei meiner Fahrt nach Salzbrunn Mitte September in Marienbad besuchen, aber so geht das ja leider nicht. Vielleicht komme ich Ende September einmal nach Marburg.

Herzlichste Grüße und beste Wünsche für eine gute Erholung an Sie und Frau Geheimrat, stets Ihr

H. Hasse

2.71 26.11.1936, Hasse an Hensel

26.11.36

Lieber Herr Geheimrat,

endlich bin ich dazu gekommen, Ihr Manuskript noch einmal genau durchzusehen. Ich finde jetzt alles in bester Ordnung, auch die Bezeichnungen, und ich habe das Manuskript gleich nach Berlin zum Druck eingeschickt.

Die Arbeit an meinem Buch geht sehr langsam vorwärts, besonders jetzt im Semester. Ich habe etwa 200 Druckseiten geschrieben und bin gerade bei der genaueren Untersuchung der algebraischen p–adischen Zahlen.

Das Blatt von Remak hat mich sehr interessiert.

Nehmen Sie es mir nicht übel, wenn ich mich so kurz fasse, weil ich mit der Zeit immer sehr bedrängt bin. Meine Gedanken sind oft und herzlich bei Ihnen. Ich bitte auch Frau Geheimrat herzlich zu grüßen.

Stets Ihr

H. Hasse

2.72 03.12.1936, Hensel an Hasse

Marburg–Lahn d. 3. Dezember 1936

Lieber Herr Professor.

Nehmen Sie meinen herzlichsten Dank dafür dass Sie meine Arbeit nochmal durchgelesen haben; ich freue mich sehr darüber, dass sie nun bald gedruckt werden soll. — Wäre es wohl möglich, dass sie vielleicht noch in diesem Monat soweit fertig gesetzt werden könnte, dass ich wenigstens die Separatabzüge etwa um Weihnachten erhalten könnte? Ich habe in diesem Jahre einen Grund weswegen mir die Erfüllung dieser Bitte eine Freude wäre. Geht es aber schlecht einzurichten, so lassen Sie es ruhig. *So* wichtig ist es mir nun wieder nicht.

Die letzten Wochen habe ich mich sehr mit der π–adischen Auflösung der $\mathfrak{p}$–adischen Gleichungen beschäftigt und bin nun wirklich schon damit zu Ende gekommen. Als Anwendung habe ich die Primteilergleichungen von den Graden $\mathfrak{p}^s$ untersucht, welche ich schon im Teubnerbuche behandelt habe und habe da für $s = 1$ meine früheren Resultate viel einfacher und jetzt auch für den Grad $\mathfrak{p}^2$ die einfachste eindeutig bestimmte Gleichung gefunden, die wirklich sehr merkwürdig und einfach wird.

Herzliche Grüsse Ihnen und Ihrer lieben Gattin

Stets Ihr

K. H.

2.73 14.12.1936, Hasse an Hensel

14.12.36

Lieber Herr Geheimrat,

Besten Dank für Ihre freundlichen Zeilen. Ich habe darauf gleich an den Verlag geschrieben und Ihre Bitte befürwortet. Ich glaube aber kaum, dass die Zeit ausreicht, um bis zur Fertigstellung der Sonderdrucke zu kommen. Jedenfalls habe ich gebeten, dass die erste Korrektur gleich in Bogen gesetzt wird. Dann haben Sie auf alle Fälle bald ein einigermassen präsentables Stück in der Hand.

Herzliche Grüsse und beste Wünsche für ein frohes Weihnachtsfest!

Stets Ihr getreuer

H. Hasse

2.74 18.12.1936, Rundbrief

Geheimrat Haussner 18.12.36
Jena
Stoystr. 1

Sehr geehrter Herr Geheimrat,[1]

aus Anlaß Ihrer Mitarbeit an dem im Jahre 1931 zusammengestellten Crelle–Band, der Herrn Geheimrat H e n s e l zum 70. Geburtstag gewidmet war, möchte ich mir die Mitteilung erlauben, daß Hensel am 29.12. ds. Js. seinen 75. Geburtstag begeht. Für den Fall, daß Sie ihm aus diesem Anlaß Glückwünsche senden wollen, gebe ich Ihnen nachstehend seine Anschrift:

Marburg (Lahn), Behringweg 7.

Mit deutschem Gruß

ging an:

Prof. Siegel, Frankfurt a.M. Neuhausstr. 22
Prof. Fueter, Zürich 7, Klosbachstr. 75
Prof. A.Fraenkel, Jerusalem, Rehavia A
Prof. Furtwängler, Wien XVIII, Messerschmidtgasse 45
Prof. Rella, Wien I, Rathausstr. 3
Prof. Jung, Halle S. Weidenplan 11
Prof. Doetsch, Freiburg i.Br. Günterstal, Riedbergstr. 8
Prof. Artin, Hamburg–Langenhorn, Heimfelderstr. 9
Prof. Schur, Berlin–Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14
Prof. Hecke, Hamburg–Fuhlsbüttel, Kleekamp 34
Prof. Haupt, Erlangen, Spardorferstr. 45
Prof. Hausdorff, Bonn, Hindenburgstr. 61
Prof. Speiser, Zürich, Pelikanstr. 22
Dozent Dr. Ullrich, Gießen, Kaiserallee 3
Prof. Rosenthal, Heidelberg, Blumenthalstr. 7

[1] Handschriftliche Randnotiz: *Haussner an Hensel*

Prof. Nagell, Uppsala, Norrlandsgatan 9
Prof. Mordell, Manchester University, Manchester
Prof. Krull, Erlangen, Ratsbergweg 53

2.75 28.01.1937, Hasse an Hensel

28.I.37

Lieber Herr Geheimrat,

es war mir eine große Freude, Sie am Montag Abend so frisch und gesund wiederzusehen. Ich möchte Ihnen noch einmal besonders danken, daß Sie es möglich gemacht haben, auch meinen Schüler H.L. Schmid, den ich menschlich und wissenschaftlich hochschätze, zu sich zu bitten. Er läßt Ihnen durch mich noch einmal von Herzen dafür danken. Er war wie ich ganz erfüllt von dem netten Abend bei Ihnen. Leider ist es ja so, daß bei solchen Gelegenheiten wenig aus einer ausführlichen Unterhaltung zu zweien wird. Ich hoffe aber, daß ich im Laufe des Semesters noch einmal Gelegenheit habe nach Marburg zu kommen und Sie dann mit etwas mehr Ruhe ausführlich sprechen zu können.

Beiliegende Zusammenstellungen für den neuen Crelle–Band werden Sie interessieren.

Mit herzlichen Grüßen auch an Frau Geheimrat und von meiner Frau

stets Ihr sehr ergebener

H. Hasse

2.76 07.03.1937, Hensel an Hasse

Marburg d. 7. März 1937

Lieber Herr Professor.

Vor allen Dingen möchte ich Ihnen nochmals sehr herzlich für Ihren Besuch danken, der meiner Frau und mir wieder eine ganz grosse Freude war, der Ihnen selbst aber doch eine rechte Strapaze und wohl auch nicht ganz ungefährlich gewesen ist. Wir reisen morgen wieder auf etwa 8 Tage nach Wiesbaden (Hotel Fortuna Paulinenstrasse 11) worauf wir uns sehr freuen; ich hoffe da auch mit meiner Mathematik noch wesentlich weiter zu kommen.

Herr College Jolles schreibt mir, dass er eine grössere Abhandlung abgeschlossen hat, (entschieden eine grosse Leistung bei seinen 79 Jahren). Er würde sie gern an das Crellesche Journal zur Veröffentlichung geben, und bei dem, was er in seinem Gebiete, der Geometrie ganz Hervorragendes leistet, scheint es mir für diese Zeitschrift sehr erwünscht zu sein, falls sich die Arbeit auf gleicher Höhe hält, wie seine letzten Abhandlungen. Ich schrieb ihm gestern und bat ihn, sein Werk direkt nach Göttingen an Sie zu senden, damit Sie sie prüfen bzw. prüfen lassen können. Es wäre ihm, — verständlich bei seinem hohen Alter — sehr wertvoll, die Arbeit nach Annahme bald gedruckt zu sehen und das wäre ja wohl auch ohne Schwierigkeit zu errreichen, da jetzt nicht so viel vorliegt[1].

Bitte grüssen Sie doch Ihre liebe Gattin sehr herzlich von uns Beiden. Wir haben sie leider, leider so sehr lange nicht gesehen, und haben Sehnsucht danach, sie wieder ordentlich sehen und sprechen zu dürfen.

Ob wir in diesem Jahre nach Marienbad gehen können, ist doch nicht ganz sicher; es haben sich neue Devisenschwierigkeiten ergeben.

Nun haben Sie doch eine gute Zeit der Erholung vor sich! Dies wünscht von Herzen

Ihr K. Hensel

Wäre es wohl ohne grössere Kosten möglich, dass ich von meiner eigenen Arbeit, wenn sie erscheint noch einige Separata erhalten könnte. Es sind noch einige Wünsche in dieser Richtung an mich gelangt, und mein eigener Vorrat

[1]undeutlich

ist völlig erschöpft. Wenn es aber Schwierigkeiten machen sollte, trete ich auch gern zurück; es geht dann auch so

2.77 18.03.1937, Hasse an Hensel

18.3.37

Lieber Herr Geheimrat,

vielen herzlichen Dank für Ihren Brief▶. Die Sache mit den Sonderdrucken läßt sich, wie Sie ja vom Verlag selbst gehört haben, gut machen und ich nehme an, daß sie inzwischen klargestellt ist. Ein Manuskript von Herrn Jolles habe ich bisher nicht erhalten. Ich freue mich natürlich sehr, wenn es kommt.

Kurz nach meinem Besuch neulich bei Ihnen war ich in Berlin und habe auch bei de Gruyter vorgesprochen. Ich erfuhr dort, daß die Befürchtungen, die der Verlag im vorigen Jahr vorbrachte, jetzt tatsächlich eingetreten sind, so daß es wirklich gut ist, daß Sie dem zuvorgekommen sind.

Meine Frau läßt Ihre lieben Grüße aufs herzlichste erwidern.

Mit den besten Wünschen für die Ferien und Grüßen, auch an Frau Geheimrat,

stets Ihr

H. Hasse

2.78 03.05.1937, Hensel an Hasse

Marburg den 3. Mai 1937

Lieber Herr Professor.

Durch Ihre Zusendung des prachtvollen Heft 3 von Crelle und der Fülle interessantester Arbeiten von Ihnen und Herrn Witt haben Sie beide mir eine wirklich *sehr* grosse Freude bereitet und ich muss Ihnen Beiden meinen wärmsten herzlichsten Dank aussprechen. Es ist sehr viel, dass bei uns jetzt eine Arbeitsgemeinschaft abgehalten worden ist, aus welcher Arbeiten von einem solchen Kaliber, wie diese 7 kleinen Werke hervorgingen. So etwas haben wir früher noch nicht gehabt, und es muss für Sie und für Herrn Witt ein stolzes Gefühl sein, solche Arbeiten und ein solches Zusammenwirken zum ersten Male inspiziert zu haben.

Dass mir der Gegenstand und die Ziele dieser Arbeiten so gut liegen, dass ich sie ganz gut verstehen und sehr geniessen kann, ist mir eine ganz besondere Freude, und dasselbe gilt auch von den sehr schönen früheren Arbeiten von Herrn Witt, durch deren Zusendung er mich so sehr erfreut hat. Danken Sie ihm doch sehr herzlich in meinem Namen.

In den nächsten Tagen reisen wir nun wieder auf 4 Wochen nach unserem lieben Marienbad, wofür wir zu meiner Freude dieses Mal reichliche Devisen bekommen haben. (Wir wohnen wieder Hotel Rauscher). Dieses Mal geht unsere liebe Freundin Frau Prof. Günther mit mir, was unserem Aufenthalt sehr zu gute kommen wird. Ich nehme meine Arbeit über die Gleichungen für die π–adischen Primzahlen in beliebigen Algebraischen Körpern mit, die sich jetzt endlich ihrem Ende nähert und die mir sehr viele interessante Aufschlüsse über diesen Teil der Arithmetik und Algebra giebt, denn sie geht wirklich ganz tief in die Eingeweide der Gleichungen und der algebraischen Körper hinein.

Entschuldigen Sie, dass ich noch einmal auf Ihr so liebenswürdiges Angebot eingehe, mir die Austauschexemplare für Crelle in vollem Umfang zu lassen. Ich habe mir diese Frage genauer überlegt, und möchte doch lieber auf diese Freude verzichten und Sie bitten, von dem letzten mir zustehenden Bande jedes Journales ab, sich die nächsten Bände zusenden zu lassen. Vorläufig könnte noch alles beim Alten bleiben, bis ich zurückkomme. Dann ordne ich alles übersichtlich und schicke Ihnen die Hefte, die mir nicht mehr zukommen.

Das Ordnen dieser vielen Hefte ist mir jetzt schon ein wenig mühsam, das Einbinden in die schönen Bände ein wenig kostbar und das Ordnen der vielen neuen Bände setzt soviel Raum und die Anschaffung neuer Regale voraus, dass es mir besser erscheint, wenn ich jetzt damit abschliesse. Offen gestanden möchte ich auch lieber nichts haben, worauf ich kein Recht habe, wie ich es bisher in meinem Leben immer gehalten habe. Vielleicht bitte ich Sie später noch, etwa das Jahrbuch über die Fortschritte noch etwas länger behalten zu dürfen, wobei natürlich die späteren Bände nach meinem Tode an Sie kämen, ebenso wie mein ganzer Besitz am Crelleschen Journale, den ich Ihnen ja vererben will.

Nun bleiben Sie mir bitte weiter so gut wie bisher und schreiben Sie mir einmal nach Marienbad ein Wort, wie es Ihnen und Ihrer lieben Gattin geht, die wir Beide herzlich grüssen. Auch was bei Ihnen und Ihren Schülern wissenschaftlich vor sich geht, wüsste ich gern, selbst wenn es natürlich nicht gleich wieder eine solche "Girandola"[1] giebt, wie sie Crelles Journal Band 176 $\boxed{\text{Heft 3}}$ gezeitigt hat. Herzlichst Ihr

K. Hensel

[1]undeutlich

2.79 24.05.1937, Hasse an Hensel

24.5.37

Lieber Herr Geheimrat,

haben Sie sehr herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief vom 3.Mai.▶ Ich komme erst heute zur Beantwortung, über Pfingsten war ich mit meiner Frau in der Lüneburger Heide, und anschließend haben wir eine sehr anregende Tagung in Hamburg mit dem Thema 'Gruppentheorie' mitgemacht. Der Glanzpunkt war ein Vortrag des sicher auch Ihnen bekannten französischen Mathematikers E. Cartan über seine früheren Untersuchungen zur Theorie der Lieschen Gruppen.

Herrn Witt habe ich Ihre freundlichen Worte über unser Sonderheft des Crelleschen Journals gesagt, und er läßt Ihnen bestens dafür danken. Er hat übrigens über seine in dieser Richtung liegenden Ergebnisse auch in Hamburg vorgetragen.

Sehr freut es mich, daß Sie in Ihren Untersuchungen über algebraische Körper jetzt zum Ende gekommen sind, und ich sehe der zusammenfassenden Darstellung mit Freude entgegen.

Über die von Ihnen angeschnittenen Fragen wegen der Austauschliteratur können wir uns ja dann nach Ihrer Rückkehr aus Marienbad noch verständigen. Selbstverständlich sollen Sie gern die Fortschritte der Mathematik auch weiter bekommen. Ich kann natürlich verstehen, daß Ihnen das Aufheben, Ordnen und Bindenlassen der vielen andern Sachen auf die Dauer mühsam wird, und wenn Sie diese Dinge nicht mehr haben wollen, so sollen sie sich dann bei mir anhäufen. Auch möchte ich Ihnen noch einmal ganz besonders danken für Ihr Versprechen, daß ich später einmal in den Besitz der jetzt bei Ihnen befindlichen Bändes des Crelleschen Journals kommen soll.

Augenblicklich beschäftigen wir uns hier in Göttingen mit der algebraischen Geometrie. Wir erwarten in einem Monat den Besuch von Severi aus Anlaß unseres Universitätsjubiläums. Wir haben ihn zu einem Vortrag aufgefordert und bemühen uns augenblicklich, sein Buch aus der zwar Severischen aber nicht strengen Sprache in die streng arithmetische Sprache des Hensel–Landsberg zu übersetzen. Morgen werden wir den Abschnitt über die Auflösung der Singularitäten vornehmen und uns ihn zunächst in der

Hensel–Landsbergschen Sprache klar machen. Die forschende Tätigkeit der Göttinger Arithmetiker und Algebraiker ist ebenfalls auf die algebraischen Funktionen gerichtet. Ich bin augenblicklich dabei, die Theorie des Körpers der Abelschen Funktionen zu algebraisieren mit dem Endziel, meinen vor 3 Jahren für elliptische Funktionskörper bewiesenen Satz auf beliebiges Geschlecht zu verallgemeinern. Die Arbeit geht gut vorwärts, nur fehlt leider doch sehr die Zeit und Ruhe zur fortgesetzten ungestörten Beschäftigung damit.

Für Ihren Aufenthalt in Marienbad wünsche ich Ihnen das Andauern des augenblicklichen Sommerwetters. Bitte empfehlen Sie mich auch Frau Geheimrat und Frau Prof. Günther. Wir wollen im Juli nach Ostpreußen (Cranz) fahren, was Ihnen ja sicher nicht ganz unbekannt ist. Herzlichst Ihr

H. Hasse

2.80 02.09.1937, Hasse an G.Henzel

2.9.37

Herrn Prof. G.Henzel

Karlsruhe Baden

Lehrstuhl für Mathematik und
Mathematische Technik an der
Technischen Hochschule

Lieber Herr Kollege Henzel,

haben Sie recht herzlichen Dank für die Zusendung Ihrer Arbeit für Crelles Journal. Ich werde sie gern aufnehmen.

Für das Gebiet der Mechanik und angewandten Mathematik komme ich natürlich als Berater sehr wenig in Frage. Ich möchte mich darauf beschränken, Ihre Aufmerksamkeit auf Herrn Dr. Rellich zu lenken, der ein ausgezeichneter Kenner der Anwendungsgebiete der Mathematik auf die Physik ist. Er ist zur Zeit Assistent am Mathematischen Institut der Universität Marburg.

Heil Hitler!

Ihr sehr ergebener

H. Hasse

2.81 06.12.1937, Hasse an Hensel

6.12.37

Lieber Herr Geheimrat,

der beiliegende Entwurf für das nächste Crelle–Heft soll nicht ohne einen herzlichen Gruß mitten zwischen aller Arbeit an Sie abgehen. Ich hoffe, es geht Ihnen und den Ihren gut. Das Weihnachtsfest werden Sie wohl zu Hause verbringen und dann wie üblich nach Berlin fahren.

Stets Ihr

H. Hasse

2.82 11.07.1938, Hensel an Hasse

Mbg d. 11–7–38

Lieber Herr Professor.

Ich sende Ihnen hier einen Crelle–Beitrag, der noch an mich gekommen ist mit den umstehend angebogenen Zeilen von Herrn Dr. Ugo Broggi. Vielleicht sind Sie so freundlich, ihm gleich eine Bestätigung zu senden; ich kann es nicht mehr, da ich morgen auf ganz kurze Zeit verreise. Deshalb kann ich Ihnen auch heute nur herzliche Grüsse und Wünsche für Ihre so schön projectierten Ferien senden; ich schreibe aber bald ausführlicher. Stets Ihr

K. H.

2.83 17.06.1939, Hasse an Hensel

17.6.1939

Lieber Herr Geheimrat,

Haben Sie herzlichen Dank für Ihre freundlichen Zeilen und die Zusendung der Arbeit von Sprague. Ich habe sie mir eben angesehen und finde sie sehr schön, besonders da sie die noch offene Frage vollständig löst. Es hat mich interessiert zu erfahren, dass Sprague Enkel von Schwarz und Urenkel von Kummer ist. Ich werde nun seinen Werdegang mit umso grösserem Interesse verfolgen.

Mit herzlichen Grüssen von Haus zu Haus

stets Ihr

H. Hasse

Kapitel 3

Korrespondenz Hasse–Gertrud Hensel

3.1 24.01.1949, G.Hensel an Hasse

7 Norham Road, Oxford. 24.I.49.

Sehr geehrter Herr Professor.[1]

Meine Tochter schrieb mir heut aus Darmst. Ihren Wunsch ein Photo meines Mannes für den Nachruf zu haben. Wir haben nun hier 3 leidlich geeignete gefunden; am besten finde ich das mit der Geige, wenn man davon nur die linke Hälfte des Bildes nimmt. Das ohne Brille ist Ihnen vielleicht zu alt u. traurig; es ist aus einer unguenstigen Zeit. Es waere mir lieb, die Photos, so bald Sie sie nicht mehr brauchen wieder zu erhalten; 2 gehören meiner ältesten Tochter hier. In der Hoffnung, dass Sie dieser Brief bei guter Gesundheit antrifft u. mit den besten Wünschen für Sie u. die Ihren für 1949 verbleibe ich Ihre

Gertrud Hensel.

Sollte Ihnen keins der Photos geeignet erscheinen, so rate ich, sich an meine Tochter Lilli in Marburg zu wenden u. ihr zu schreiben, dass die von hier nicht genuegten.

[1]Randnotiz von Hasse: *Gedankt 2.2.49*

3.2 11.02.1949, G.Hensel an Hasse

7 Norham Rd., Oxford. 11.2.49.

Sehr geehrter, lieber Herr Professor.

Vielen Dank für Ihren heutigen l. Brief! Auch fuer Ihre Absicht der Familie einige Exemplare des Nachrufs zur Verfügung zu stellen. Er wird besonders von meinem Enkel Walter Haymann gewuerdigt werden können. Ihre Frage nach dem Todesdatum kann ich nicht ganz exact beantworten. Er starb in der dem Pfingstsonntag vorhergehenden Nacht; wir wissen nicht wann, da wir um die Wirkung der Morphiumspritze, die er bekommen hatte, nicht zu stören, nicht das Zimmer selbst betraten. Wir haben aber, da der Anfall abends plötzlich eintrat angenommen, dass das Ende gegen Morgen, also am Sonntag eingetreten ist. Das Datum war also glaube ich der 4 te Mai, aber rechnen Sie es bitte noch 1 mal nach, mein so sehr geschwächtes Gedächtnis ist nicht zuverlässig. Der Vorname meiner Schwiegermutter war Julie.

Zur Verlobung Ihrer Fräulein Tochter meine allerbesten Wuensche; bitte uebermitteln Sie sie doch auch Ihrer Frau Gemahlin u. der gluecklichen Braut. — Kürzlich kam auch eine Vermaehlungsanzeige von Ostrowsky, der mehr Ihrer Generation angehoert. Hoffentlich werden Sie, Herr Professor doch bald u. alle Teile in Gesundheit, mit Ihrer Familie vereinigt. Dass Ihr Herr Schwiegersohn ein der Mathematik nahe stehendes Fach hat freut mich fuer Sie.

Sollte meine Angabe des Datums nicht genuegen, so muessten Sie noch bei der M.er Universitaet anfragen, was mir leid taete. Mein Enkel Walter H. geht wahrscheinlich fuer 1 Jahr nach der Browns Univ. die 1 Stunde per Bahn von Boston entfernt ist. Mein Mann hatte als wir noch in Berl. waren ja einen Ruf nach Ithaka in U.S.A. —

Weitere Fragen nach bestem Wissen zu beantworten bereit u. Ihnen u. Ihrer Familie nochmals allerbeste Wünsche u. viele Gruesse sendend Ihre

Gertrud Hensel

3.3 03.03.1949, Hasse an G.Hensel

3.3.49

Sehr verehrte, liebe Frau Geheimrat,

Haben Sie herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief vom 11.2.▸ Ich habe inzwischen auch von Ihrer Frau Tochter in Darmstadt ein Bild bekommen, das mir doch besser geeignet erscheint, als das hier wiederbeigelegte, obwohl es aus einer späteren Lebenszeit stammt.

Als Todesdatum rechne ich nach Ihren Angaben den 4. Mai 1941 aus, habe allerdings keinen Kalender, der mir sagt, ob das gerade der *Pfingst*sonntag war. Ich wusste weder Tag, noch Monat, noch Jahr genau. Mir geht es immer mit dem Todesdatum meines Vaters durcheinander, der auch am Pfingstsonntag 1940 starb.

In den allernächsten Tagen erwarte ich die Korrekturen des Aufsatzes. Ich habe um Zusendung je eines Exemplares an Sie und nach Darmstadt gebeten.

Vielen Dank auch für Ihre freundlichen Wünsche zu Juttas Verlobung. Auch meine Frau und Jutta lassen mit freundlichen Grüssen danken.

Das grosse Zahlentheoriebuch, an dessen Planung und erstem Entwurf Ihr lieber Mann noch beteiligt war und regsten Anteil nahm, wird nun in Kürze erscheinen. Ich werde mir erlauben, für Ihren mathematischen Enkel Walter Haymann ein Exemplar zu senden.

Für heute beste Grüsse und Empfehlungen an Familie Haymann,

Ihr sehr ergebener

H. Hasse

3.4 09.05.1949, G.Hensel an Hasse

7 Norham Road, Oxford, 9.5.49.

Sehr geehrter, lieber Herr Professor!

Der Nachruf, der mich heute früh erreichte, hat mir eine grosse wenn auch wehmütige Freude verursacht; haben Sie auch von mir sehr herzlichen Dank für diese gewiss nicht leichte aber so weit ich urteilen kann dafür sehr wohlgelungene Arbeit. Man fühlt beim Lesen, dass die Persönlichkeit mit dem Auge des juengern Freundes gesehen ist u., wenn ich auch das was davon nebenbei auf mich entfaellt als viel zu guenstig u. schmeichelhaft beschaemt ablehnen muss, so ist es doch im ganzen zum Vorteil des Werkes, gibt ihm einen waermeren, lebendigeren Ton. Nach dem mein Mann so lange infolge der allgemeinen u. politischen Verhaeltnisse zu seinen Lebzeiten noch u. auch nachher die volle ihm schuldige Anerkennung nicht gefunden hat, sehe ich dies nun im Lichte von einer Art ausgleichenden Gerechtigkeit. Ich sehe beim Durchblättern des wissenschaftlichen Teils allerdings wieder aufs neue mit tiefem Bedauern, wie viel mir durch meine gaenzliche Unbegabtheit fuer Mathematik entgangen ist; mein Trost ist nur, dass sie nicht verhindert hat, dass die Begabung meines Mannes mindestens in einem unsrer Enkel, Walter Hayman, wieder aufgelebt ist. Ich weiss nicht, ob ich schon schrieb, dass er demnaechst, im August, mit Frau u. kuerzlich erschienenem Toechterchen, einer Aufforderung auf 1 Jahr nach U.S.A. (Browns College) zu kommen folgen wird.

Nun moechte ich Ihnen nochmals sehr von Herzen danken u. verbleibe mit sehr vielen Gruessen fuer die Ihrigen Ihre

Gertrud Hensel.

3.5 16.05.1949, G.Hensel an Hasse

7 Norham Road, Oxford, 16.5.49.

Sehr geehrter lieber Herr Professor!

Es tut mir ausserordentlich leid durch ein Missverstaendnis meinerseits Aufschub des Druckes u. vielleicht auch etwas Aerger verursacht zu haben. Ich hatte nicht begriffen, dass der Aufsatz mir als Correcturexemplar geschickt worden war u. habe ihn nur gelesen u. dann bald meinem Enkel geschickt, der mir gerade heute schreibt, dass er ihn ausserordentlich interessiert u. dass ich mich doch bei Ihnen dafuer verwenden moechte, dass er auch 1 Exemplar bekaeme. Ich habe ihm gleich heute durch meine Tochter schreiben lassen, er moechte mir den Aufsatz sofort zurueckschicken u. werde ihn dann gleich noch einmal so weit ich competent bin durchlesen. Was nun die vom Ehepaar Sch. geaeusserten Zweifel betrifft, so bitte ich Sie sehr, sich nicht dadurch irre machen zu lassen: Die Angaben stimmen alle; ich habe es mir alles heute gleich von meiner aeltesten Tochter, bei der ich hier wohne, bestaetigen lassen. In Bezug auf die Lectuere von K. Mai, wo ich im Augenblick ein ganz klein wenig zweifelhaft geworden war, beruhigte sie mich auch, da auch sie wusste, dass m. Mann sie Schuelern, die ueberarbeitet waren, empfahl; da ich aber in Oxf. nicht gut ergruenden kann, von wann an Mai's Werke erschienen, so koennte man zur groessten Vorsicht viell. schreiben "in der Art von K. Mai". Er las auf Kron.'s Rat auch "Backfischbuecher" wie die von Clementine Helm, aber dies nur nebenbei. Die Marlitt war nicht dabei. Der im Druck ausgelassene Vorname seiner Mutter, das einzige, was mir als zu ergaenzen auffiel, sie war geborene von Adelson, ist Julie. Meinen Brief, den Dank f.d. Zusendung erhielten Sie wohl? Ich schicke das Exemplar dann baldigst. Indem ich fuer das Misverstaendniss sehr um Entschuldig bitte verbleibe ich mit vielen Gruessen auch an die Ihren

Ihre Gertrud Hensel.

3.6 22.06.1949, Hasse an G.Hensel

Berlin–Zehlendorf, den 22.6.49

Sehr verehrte Frau Geheimrat,

Haben Sie sehr herzlichen Dank für Ihre beiden Briefe▸ ▸ und die Rücksendung der durchgesehenen Korrektur. Ich habe alle Ihre Bemerkungen berücksichtigt, ausserdem von den Schenckschen Verbesserungen nur die, dass das Bild im Salon nicht Fanny, sondern Cecile Mendelssohn war. Karl May habe ich stehen lassen; wenn es auch vielleicht gerade auf jene Zeit noch nicht zutrifft, so doch ganz sicher für später, wie ich von Ihrem lieben Mann selbst öfter hörte.

Ich habe den Verlag gebeten, Ihnen 10 Sonderdrucke nach Oxford zu schicken. Sie sind wohl so liebenswürdig, davon eines Ihrem Enkel Haymann zuzuleiten. Die übrigen Sonderdrucke werde ich von mir aus an geeignete Adressen versenden. Sollte es Ihnen lieber sein, von sich aus noch mehr Exemplare zu verschicken, so lassen Sie es mich bitte rechtzeitig wissen. Dann lasse ich der Sendung des Verlages an Sie entsprechend mehr Exemplare beilegen.

Von hier ist nicht viel Gutes zu berichten. Das Leben ist zwar etwas leichter geworden, aber die Schwierigkeiten äusserer Art hier in Berlin dauern unvermindert an. Trotzdem denken wir daran, bald alle zusammen hier eine Wohnung zu nehmen. Wie wir allerdings unter den gegenwärtigen Verhältnissen einen Umzug bewerkstelligen sollen, ist noch ein ungelöstes Problem.

Indem ich Ihnen nochmals recht herzlich für alle Ihre wertvolle Hilfe bei dem Nachruf danke, bin ich mit besten Grüssen

Ihr sehr ergebener

H. Hasse

3.7 01.07.1949, G.Hensel an Hasse

Oxf. 7 Norham Road, 1.7.49

Sehr geehrter, lieber Herr Professor!

Vielen Dank fuer Ihren l. Brief mit der erfreulichen Nachricht, dass die Biographie fertig[1] gedruckt ist. Dass die Lebensbedingungen in Berl. noch so schwierig sind tut mir allerdings fuer Sie u. die Ihrigen sehr leid; ich hoffe doch, sie bessern sich bald. Ich waere sehr dankbar, wenn ich in Anbetracht meiner ziemlich grossen Familie 6 Exemplare haben koennte. Falls Sie Prof. Ostrowsky in Basel keins schicken wuerde ich sogar so unbescheiden sein um 7 zu bitten, aber nur dann. Ich haette sehr gern, dass Hellinger, dessen Anschrift ich nicht weiss, eins bekaeme, ebenso Fueter, falls er lebt. Eben faellt mir noch Prof. Vahlin in Columbia–Missouri ein, der s. Zeit in seinem Sabbatjahr meinen Mann in Marb. hoerte, koennte ich f. den noch eins haben, also 8 Stueck? Ich haette gern 4 Stueck hierher geschickt, da ich leider noch immer nicht weiss wann ich Papiere u. Pass zur Heimreise bekomme; den Rest nach Marburg mit dem Vermerk “nicht nachsenden” fur meine Familie Walter Haymann schicke ich dann eins von hier. Wenn extra Kosten entstehen sollten bitte ich es mir eventuell mitzuteilen.

Indem ich Ihn sehr von Herzen danke u. Sie bitte mich Ihrer Gattin sehr zu empfehlen u. mit den besten Wuenschen auch fuer Ihr junges Paar stets Ihre

Gertrud Hensel.

[1] undeutlich

3.8 16.01.1950, Hasse an G.Hensel

Berlin–Zehlendorf, den 16.1.1950

Sehr verehrte Frau Geheimrat,

Der Verlag Walter de Gruyter u.Co. hat mir mitgeteilt, dass es nun endlich soweit ist, dass der Crelleband mit dem Nachruf erscheinen kann. Gegenwärtig werden nur noch die Umschläge gedruckt, sowie die Bogen eingeheftet. Der Verlag rechnet mit dem Herauskommen Anfang Februar.

Da ich nicht weiss, ob Sie noch in Oxford sind, möchte ich mich vor Zusendung der in Aussicht gestellten Sonderdrucke darüber vergewissern. Sie baten mich damals, von den 10 für Sie und Ihre Familie bestimmten Sonderdrucken einige nach Oxford, die anderen nach Marburg (mit dem Vermerk "nicht nachsenden") zu schicken. Ich wäre Ihnen dankbar, wenn Sie mir mitteilten, ob es dabei bleiben soll, und wieviel nach Oxford, wieviel nach Marburg gehen sollen.

Von mir aus werde ich von den durch Sie gewünschten Namen W. Haymann, Prof. Ostrowski, Prof. Hellinger, Prof. Fueter, Prof. Vahlin Abdrucke zusenden.

Von uns ist nicht viel Neues zu berichten. Wir leben noch immer getrennt, da wir nicht sicher sind, ob wir den endgültigen Sprung nach Berlin machen sollen. Wir erhoffen von diesem Jahr eine Entscheidung. Weihnachten war ich mit Jutta, die ja hier in Berlin beim Zentralblatt für Mathematik arbeitet, bei meiner Frau und dem kleinen Rüdiger in Göttingen. Seit längerer Zeit war so die Familie einmal wieder vollzählig beisammen.

Indem ich Ihnen und den Ihren noch nachträglich alles Gute zum Neuen Jahre wünsche bin ich mit freundlichen Grüssen

Ihr sehr ergebener

H. Hasse

3.9 23.01.1950, G.Hensel an Hasse

Marburg–Lahn, d. 23.I.50

Behringweg 7.

Sehr geehrter Herr Professor!

Vielen Dank fuer Ihren heute auf Umwegen hier eingetroffenen Brief▸. Ich bin seit Anfang Aug. wieder hier. Herzl. Dank auch fuer die Fertigstellung der Sonderabdrucke u. die Absendung an die genannten Adressaten. Ich waere dankbar, wenn Sie noch 2 Exemplare an m. Tochter Ruth H., Norham Rd 7, Oxford schicken wuerden; ich werde sie bitten 1 Exemplar Miss Cartwright in Cambridge durch ihren Walter, der ihr sehr viel verdankt u. sie als Forscherin sehr hoch stellt, aber jetzt an Browns Univ., Providence in U.S.A. Gastvorlesungen haelt, zukommen zu lassen. Nach Marb. an mich schicken Sie bitte wenn Sie so viel dafuer eruebrigen koennen 5 Exemplare fuer die Familie, so dass jeder Stamm eins hat u. ein sechstes fuer mich, aber nur wenn es *gut* geht, sonst nicht.

Es freut mich, dass Sie Weihnachten mit allen den Ihren gefeiert haben; es wuerde mich auch freuen, wenn Sie wieder mehr nach dem Westen zoegen. Ich bin noch etwas angegriffener als sonst durch eine kuerzl. ueberstandene Grippe; daher kann ich heut noch nicht viel schreiben; abgesehen von einigen mehr haeuslichen Miseren geht es mir u. den Meinigen ziemlich gut. Mit nochmaligem herzlichen Dank u. der Bitte auch Ihre Damen, ev. schriftlich, sehr zu gruessen bin ich Ihre

Gertrud Hensel.

P.S. Es wuerde mich freuen, wenn auch Prof. *Krafft* 1 Sonderabdruck bekommen koennte, da er unser Freund war; noetig ist es nicht.

3.10 23.02.1950, G.Hensel an Hasse

Marburg–Lahn, d. 23.II.50. Behringweg 7.

Sehr geehrter Herr Professor![1]

Haben Sie herzlichsten Dank fuer die Nachrufexemplare, die heut eintrafen u. die in der endgueltigen Fassung zu lesen natuerlich mein erstes war. Sie haben in das Leben meines Mannes sich so liebevoll vertieft u. es so lebendig geschildert, dass auch spaetere Leser, die ihn nicht mehr gekannt haben, ein farbiges lebendiges Bild von ihm bekommen werden. Wenn ich etwas aussetzen duerfte waere es nur, dass Sie meiner in viel zu ehrenvoller Weise Erwaehnung tun; die belebende Sonne des Hauses, die alle anzog war ja doch mein Mann, das galt fuer alle Besucher, nicht nur fuer die mathematischen. — Sehr wohl getan hat mir die Art wie Sie meines armen Sohnes gedenken; er ist ja nicht so frueh dahingegangen wie mein Enkel Roland Haymann, aber doch zu bald um eine nachhaltige Wirkung auf die Wissenschaft auszuueben, darum erfreuten mich Ihre Worte doppelt. — Mein Enkel Walter H. kommt zu meiner Freude im Fruehsommer aus U.S.A. zurueck. Ich schicke ihm 1 Exemplar.

Nun moechte ich Ihnen noch einmal waermstens fuer Ihre so muehevolle aber auch erfolgreiche Arbeit danken und Sie bitten Ihre Gattin u. Ihre Frau Tochter sehr zu gruessen. Ich moechte Ihnen auch versichern, dass mein Mann sich sehr eng mit Ihnen verbunden u. zusammengehoerig fuehlt. Ich verbleibe in aufrichtiger Dankbarkeit fuer alles was Sie fuer ihn u. dadurch auch fuer die Seinigen getan haben Ihre

Gertrud Hensel.

[1]Randvermerk von Hasse: *Beantw. 4.4.50*

Kapitel 4

Verschiedenes

4.1 01.05.1923, Manuskript Normenreste

Über die Normenreste eines relativ–zyklischen Körpers vom Primzahlgrad ℓ nach einem Primteiler $\mathfrak{l}$ von ℓ.

Tit.: K. Hensel – H. Hasse,
Normenreste im relativ–zyklischen Zahlkörper.[1]

Von **Kurt Hensel** in Marburg und **Helmut Hasse** in Kiel.

Die vorliegende auf Grund gemeinsamer Besprechungen entstandene Arbeit bildet die Fortsetzung einer kürzlich in dieser Zeitschrift erschienenen Abhandlung des einen von uns *). Sei wie dort k ein beliebiger algebraischer Zahlkörper, der die ℓ–te Einheitswurzel ζ enthält (ℓ beliebige Primzahl), α eine Zahl aus k, die nur keine ℓ–te Potenz in k ist und K der durch die reine Gleichung

$$x^\ell = \alpha$$

definierte relativ–zyklische Körper vom Primzahlgrad ℓ über k. Es soll dann hier die Fragenach dem *Normenrestcharakter* (N. R., S. 2) der Zahlen β von k in Bezug auf K für den a. a. O. noch ausgeschlossenen, schwierigsten und zugleich wichtigsten und interessantesten Fall vollständig beantwortet werden, daß der zugrundegelegte Primteiler ein Teiler $\mathfrak{l}$ von ℓ in k ist.

Während die Resultate für den in N. R. behandelten Fall eines zu ℓ primen

---

[1] Anmerkung auf der Originalseite:
"Korrektur an *die* Verf. — Adressen für die Korrektur:
1.) Geheimrat Professor Dr.
K. Hensel, Marburg/L.
Breiter Weg 7
2.) Dr. Helmut Hasse, Kiel,
Math. Seminar der
Universität."

*) **K. Hensel**, Ueber die Normenreste und Nichtreste in den allgemeinen relativ–Abelschen Zahlkörpern, Math. Ann. _85_, 1922, S. 1–10, im folgenden zitiert mit N. R.

$\mathfrak{p}$ im Wesentlichen mit den Sätzen der *Hilbert–Furtwängler*schen Theorie[†)] übereinstimmen und sich von jenen nur durch die u. E. naturgemäßere Behandlungsweise unterscheiden, was schon in der viel einfacheren Definition des Normenrestcharakters (N. R., S. 2) deutlich zum Ausdruck kommt, werden die Ergebnisse dieser Arbeit ersichtlich über die entsprechenden Resultate *Hilberts* und *Furtwänglers* hinausgehen. Das dortige Hauptresultat, das in dem Satz enthalten ist[‡)]:

Geht $\mathfrak{l}$ nicht in der Relativdiskriminante von K auf, so sind alle zu $\mathfrak{l}$ primen Zahlen von k Normenreste von K nach $\mathfrak{l}$. Im anderen Falle bilden die zu $\mathfrak{l}$ primen Normenreste von K nach $\mathfrak{l}$ eine Untergruppe vom Index ℓ aller zu $\mathfrak{l}$ primen Restklassen nach jedem genügend hohen Modul $\mathfrak{l}^g$, (es genügt stets $g \geq \frac{e\ell}{\ell-1}$, wenn ℓ genau durch $\mathfrak{l}^e$ teilbar), gibt nämlich nur eine Abzählung der zu $\mathfrak{l}$ primen Normenreste. Wir werden hier erstens das Resultat in vollster Allgemeinheit, d. h. auch für zu $\mathfrak{l}$ nicht prime Zahlen erhalten und zweitens die betreffende Untergruppe der Normenreste genau angeben.

Das erhaltene Ergebnis wird von dem jüngeren von uns in einigen weiteren Arbeiten zur Aufstellung einer systematischen Theorie der quadratischen Formen[§)] in einem algebraischen Körper k, sowie zu bemerkenswerten Verallgemeinerungen der bekannten *Furtwängler*schen Reziprozitätsgesetze für ℓ–te Potenzreste in k auf nicht primären Zahlen verwendet werden.

Sei $\mathfrak{l}$ ein Primteiler von ℓ in k, e seine Ordnung, f sein Grad, $ef = \mu$ und $k(\mathfrak{l})$ der zu $\mathfrak{l}$ gehörige transzendente Erweiterungskörper von k. Dann gelten folgende, leicht einzusehende Tatsachen (N. R., S. 2 und 3):

[†)] Siehe etwa **D. Hilbert**, Über die Theorie des rel.–quadr. Zahlkörpers, Math. Ann. 51, 1898, S. 1 ff.
und **Ph. Furtwängler**, Über die Reziprozitätsgesetze zwischen ℓ–ten Potenzresten etc., Math. Ann. *58*, (1904), S. 1 ff.; Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten etc., Math. Ann. *67*, (1909), S. 1 ff.; *72*, (1911), S. 346 ff.; *74*, (1913), S. 413 ff.; **T. Takagi**, Über eine Theorie des relativ Abelschen Zahlkörpers, Journ. of Coll. of Science XLI,8 Tokyo

[‡)] **Ph. Furtwängler**, Math. Ann. 58, S. 47 unten, sowie die weiteren zitierten Arbeiten, insbesondere *Takagi* a. a. O., Satz 9, S. 28…

[§)] Übertragung der beiden Arbeiten: **H. Hasse**, “Über die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Körper der rationalen Zahlen” und “Über die Äquivalenz quadratischer Formen im Körper der rationalen Zahlen”, Crelle 152, 1923, S. 129 ff. u. 205 ff.

Jede ℓ–te Potenz $\beta = \xi^\ell(\mathfrak{l})$ in $k(\mathfrak{l})$ ist Normenrest von K nach $\mathfrak{l}$. Ist $\alpha = \xi^\ell(\mathfrak{l})$ ℓ–te Potenz in $k(\mathfrak{l})$, so ist jetzt β von $k(\mathfrak{l})$ Normenrest von $K = k(\sqrt[\ell]{\alpha})$ nach $\mathfrak{l}$.
Produkt und Quotient aus Normenresten sind wieder Normenreste, Produkt und Quotient aus einem Normenrest und einem Normennichtrest sind Normennichtreste, d. h. die Normenreste bilden eine Untergruppe aller Zahlen von $k(\mathfrak{l})$.

Infolge dieser drei Sätze darf man zur Entscheidung über den Normenrestcharakter von β in Bezug auf $K = k(\sqrt[\ell]{\alpha})$ die Zahlen β und α von vornherein durch Multiplikation mit geeigneten ℓ–ten Potenzen aus $k(\mathfrak{l})$ in einfachen Normalformen annehmen, auf die zunächst eingegangen werden soll.

Nach den Ergebnissen einer früheren Arbeit des einen von uns[¶)] lassen sich alle Zahlen β von $k(\mathfrak{l})$ durch ein sogenanntes *Fundamentalsystem für die multiplikative Darstellung* in der Form darstellen:
(4.1)

$$\beta = \lambda^{\bar{b}}\omega^{\bar{c}}\eta_1^{\bar{c}_1}\dots\eta_\mu^{\bar{c}_\mu}\eta_a^{\bar{c}_a}\ (\mathfrak{l})\ ; \qquad \left\{\begin{matrix} \bar{b}, \bar{c} & \text{ganz rational} \\ \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_\mu;\ \bar{c}_a & \text{ganze } \ell\text{–adische Zahlen} \end{matrix}\right\} .$$

Die Basiselemente $\lambda;\ \omega;\ \eta_1, \dots, \eta_\mu;\ \eta_a$ eines solchen Fundamentalsystems sind:

(1.) Eine Primzahl λ für $\mathfrak{l}$, d. h. eine genau durch $\mathfrak{l}^1$ teilbare Zahl aus $k(\mathfrak{l})$.
Es werde[‖)] im folgenden die Entwicklung von $-\ell$ nach Potenzen von λ in der Form

$$-\ell = \lambda^e\omega^g + \text{höhere Glieder in } \lambda$$

angenommen. e und g sind dann, da k nach Voraussetzung die ℓ–ten Einheitswurzeln enthält, durch $\ell - 1$ teilbar, und $k(\mathfrak{l})$ enthält die $\sqrt[\ell-1]{-\ell}$, deren ℓ–te Potenz $\left(\sqrt[\ell-1]{-\ell}\right)^\ell = \lambda_0$ gesetzt werden möge. λ_0 ist genau durch $\mathfrak{l}^{\frac{e\ell}{\ell-1}}$ teilbar.

2.) Eine Primitive (in $k(\mathfrak{l})$ stets vorkommende) $(\ell^f - 1)$–te Einheitswurzel ω.

¶) **K. Hensel**, Die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen für den Beweis eines beliebigen Primteilers, Crelle 146, 191b, S. 189 ff., im folgenden zitiert mit M. D.
‖) Siehe hierzu M. D., S. 212.

3.) e Basissysteme von je f Einseinheiten für die Gruppen der Einseinheiten der e zu ℓ primen Grade der Reihe $1, 2, \ldots, \frac{e\ell}{\ell-1}$:

$$\eta_r \;=\; \eta_{i,s,t} \;=\; 1 + w_i^{(s,t)} \lambda^{s\ell+t} \;; \qquad \left\{ \begin{array}{l} r \;=\; 1, 2, \ldots, ef \;=\; \mu \\ i \;=\; 1, 2, \ldots, f \\ s \;=\; 0, 1, \ldots, \frac{e}{\ell-1} - 1 \\ t \;=\; 1, 2, \ldots, \ell - 1 \end{array} \right\} .$$

Dabei bedeuten $w_1^{(s,t)}, \ldots, w_f^{(s,t)}$ Systeme von je f mod $\mathfrak{l}$ linear unabhängigen Einheiten aus $k(\mathfrak{l})$.

Unter $(w_1, \ldots, w_f)$ kurz (w_i) möge im folgenden durchweg ein solches System verstanden, ferner die e zu ℓ primen Grade $s\ell + t$ kurz mit ϱ bezeichnet werden.

4.) Eine "*ausgezeichnete*" Einseinheit von durch ℓ teilbaren Grade $\frac{e\ell}{\ell-1}$:

$$\eta_a \;=\; 1 + w_0 \lambda_0 \,.$$

Dabei ist unter w_0 hier wie im folgenden stets eine solche Einheit aus $k(\mathfrak{l})$ verstanden, für die der Ausdruck

$$s_{\mathfrak{l}}(w_0) \equiv w_0 + w_0^{\ell} + \cdots + w_0^{\ell^{f-1}} \not\equiv 0 \bmod \ell$$

ist **).

Jedes System $\lambda; \omega; \eta_1, \ldots, \eta_\mu; \eta_a$ dieser Beschaffenheit ist als Fundamentalsystem im Sinne von M. D. geeignet, gestattet also eine Darstellung (1.) aller Elemente β aus $k(\mathfrak{l})$. Diese ist dabei nicht eindeutig, vielmehr besteht eine, aber auch nur eine Relation (M. D., S. 207):

$$\eta_1^{d_1} \ldots \eta_\mu^{d_\mu} \eta_a^{d_a} \;=\; 1 \; (\mathfrak{l}) \;; \quad (d_1, \ldots, d_\mu; \, d_a \text{ ganze } \ell\text{–adische Zahlen})$$

zwischen den Basiselementen, aus der jedesmal unendlich viele Darstellungen folgen ††). In dieser Relation sind sämtliche Exponenten d_r durch ℓ teilbar. Daher sind jedenfalls die Anfangsglieder (nullten Näherungswerte)

) Siehe hierzu **K. Hensel, Zur multiplikativen Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines Primteilers, Crelle 151, 1921, S. 210–212.

††) Die in M. D. getroffene *Normierung* des Koeffizienten $w_i^{(s,t)}$ einer der Einseinheiten η_r (in der dortigen Bezeichnung vom Grade e_0) diente nur dazu, diese Relation möglichst

der ganzen ℓ–adischen Exponenten $\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_\mu; \bar{c}_a$ in (1.) als Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots, \ell - 1$ eindeutig bestimmt. Sieht man also, wie es ja unserem Zwecke entspricht, von allen multiplikativ zu β hinzutretenden ℓ–ten Potenzen aus $k(\mathfrak{l})$ ab und berücksichtigt noch, daß ω als Einheitswurzel des zu ℓ primen Grades $\ell^f - 1$ stets ℓ–te Potenz in $k(\mathfrak{l})$ ist, so erkennt man, daß jedes β aus $k(\mathfrak{l})$ *eindeutig* in der Form

$$(4.2) \qquad \beta = \lambda^b \eta_1^{c_1} \ldots \eta_\mu^{c_\mu} \eta_a^{c_a} \xi^\ell \ (\mathfrak{l}) \ ; \quad (b; c_1, \ldots, c_\mu; c_r = 0, 1, \ldots, \ell - 1)$$

darstellbar ist [*']. Diese Normalform soll für die auf ihren Normenrestcharakter zu untersuchenden Zahlen β aus $k(\mathfrak{l})$ zugrundegelegt werden.

Die Normalform für das den Relativkörper $k(\sqrt[\ell]{\alpha})$ definierende Element α von k ist in einer früheren Arbeit des einen von uns behandelt worden [†']. Dort wurde (ebenfalls auf Grund der Normalform (2.)) gezeigt, daß abgesehen von dem schon oben a.S... vollständig erledigten Fall, wo α eine ℓ–te Potenz in $k(\mathfrak{l})$ ist, durch Fortlassen unwesentlicher ℓ–ter Potenzen und eine einfache Transformation der den Relativkörper bestimmenden Grundgleichung $x^\ell = \alpha$ das Element α stets auf eine der drei folgenden Normalformen gebracht werden kann, und daß nun die daneben angegebene Zerlegung des Primteilers $\mathfrak{l}$ im Relativkörper $K = k(\sqrt[\ell]{\alpha})$ gilt:

a.) $\alpha = \bar{\eta}_a = 1 + \bar{w}_0 \lambda_0 \quad : \quad \mathfrak{l} = \mathfrak{L}.$
$(s_\mathfrak{l}(\bar{w}_0) \not\equiv 0 \bmod \ell)$.

b.) $\alpha = \bar{\lambda} \quad : \quad \mathfrak{l} = \mathfrak{L}^\ell.$
($\bar{\lambda}$ geeignet gewählte Primzahl aus $k(\mathfrak{l})$).

c.) $\alpha = \bar{\eta}_h = 1 + u\lambda^h \quad : \quad \mathfrak{l} = \mathfrak{L}^\ell.$
(u Einheit aus $k(\mathfrak{l})$, h einer der Grade ϱ,
also $0 < h < \frac{e\ell}{\ell - 1}$; $(h, \ell) = 1$).

Bezeichnet $K(\mathfrak{L})$ den zu dem Primteiler $\mathfrak{L}$ von K gehörigen transzendenten Erweiterungskörper, der ein algebraischer Körper vom Relativgrad ℓ

---

einfach zu machen, sodaß sich aus den unendlich vielen Darstellungen jedes β eine ganz bestimmte, *normierte* auswählen ließ (Beschränkung eines Exponenten $\bar{c}_r$). Durch eine einfache Transformation des betr. Basissystems (e_0–ten Grades) kann man sich leicht von dieser Einschränkung befreien und erkennt so die Richtigkeit der im Text ausgesprochenen Behauptungen für allgemeine (nicht normierte) Fundamentalsysteme der angegebenen Gestalt.

*') Daraus folgt noch die wichtige Tatsache, daß jede Einseinheit von höherem als dem $\frac{e\ell}{\ell-1}$–ten Grade aus $k(\mathfrak{l})$ nur ℓ–te Potenz in $k(\mathfrak{l})$ ist.

†') **K. Hensel**, die Zerlegung der Primteiler eines beliebigen Zahlkörpers in einem auflösbaren Oberkörper, Crelle 151, 1921, S. 200–209.

über $k(\mathfrak{l})$ ist, so ist (N. R., S. 2) eine Zahl β aus $k(\mathfrak{l})$ (speziell also aus k) dann und nur dann Normenrest von K nach $\mathfrak{l}$, wenn

$$\beta = n(\mathsf{B})\ (\mathfrak{l}),$$

d. h. [‡)] β der Relativnorm einer Zahl B aus $K(\mathfrak{L})$ für den Bereich von $\mathfrak{l}$ gleich ist. Um die Relativnormen der Zahlen B aus $K(\mathfrak{L})$ und damit die Normenreste in $k(\mathfrak{l})$ zu beherrschen, denken wir uns die Zahlen B von $K(\mathfrak{L})$ ebenfalls durch ein Fundamentalsystem in der zu (2.) analogen Form:

(4.3)

$$\mathsf{B} = \Lambda^{B}\mathsf{H}_1^{C_1}\ldots\mathsf{H}_{\ell\mu}^{C_{\ell\mu}}\mathsf{H}_a^{C_a}\,\Xi^{\ell}\ (\mathfrak{L})\ ; \qquad (B;\, C_1,\ldots,C_{\ell\mu};\, C_a = 0,1,\ldots,\ell-1)$$

dargestellt, wo die Basiselemente $\Lambda;\, \mathsf{H}_1,\ldots,\mathsf{H}_{\ell\mu};\, \mathsf{H}_a$ die entsprechende Bedeutung für $K(\mathfrak{L})$ haben, wie oben $\lambda;\, \eta_1,\ldots,\eta_\mu;\, \eta_a$ für $k(\mathfrak{l})$.

Dann beweisen wir für den hier vorliegenden Fall den folgenden, schon in N. R. S. 4,(+++) aufgestellten, und dort für die zu ℓ primen Primteiler $\mathfrak{p}$ bewiesenen Satz:

Satz 1 *Zu jedem gegebenen* α $(\neq \xi^{\ell}\ (\mathfrak{l}))$ *lassen sich die beiden Fundamentalsysteme*

$$\textbf{\textit{(I.)}}\quad \lambda;\, \eta_1,\ldots,\eta_\mu;\, \eta_a \quad \textit{und} \quad \textbf{\textit{(II.)}}\quad \Lambda;\, \mathsf{H}_1,\ldots,\mathsf{H}_{\ell\mu};\, \mathsf{H}_a$$

so wählen, daß

- *I.) sämtliche Elemente mit Ausnahme eines einzigen des Systems* ***(I.)*** *Normenreste sind.*
  Dieses ausgezeichnete Element soll das "kritische" heißen.
- *II.) Die Relativnorm eines jeden Elementes des Systems* ***(II.)*** *bei der Darstellung durch das System* ***(I.)*** *in der Form (2.) jenes kritische Element nicht, (d. h. nur in ℓ–ter Potenz) enthält.*

Ist dieser Nachweis geführt, so folgt unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $n(\Xi^{\ell}) = \xi^{\ell}$ eine ℓ–te Potenz in $k(\mathfrak{l})$ ist, aus den Darstellungen (2.) und (3.) und ihrer Eindeutigkeit unmittelbar (vergl. N. R. S. 4) der Fundamentalsatz:

[‡)] Wir bezeichnen, abweichend von N. R., im Anschluß an die nach *Hilbert–Furtwängler* übliche Bezeichnungsweise die Elemente des Relativkörpers K durch große griechische Buchstaben.

Satz 2. *Eine Zahl* β *aus* $k(\mathfrak{l})$ *ist dann und nur dann Normenrest von* $K = k(\sqrt[\ell]{\alpha})$ *; (*$\alpha \neq \xi^{\ell}(\mathfrak{l})$*) nach* $\mathfrak{l}$*, wenn sie bei der Darstellung durch das gefundene, zu* α *gehörige Fundamentalsystem **(I.)** in der Form (2.) das kritische Element nicht enthält.*

Nach diesem Satz bilden also, (wenn α keine ℓ–te Potenz in $k(\mathfrak{l})$ ist), die Normenreste von $k(\sqrt[\ell]{\alpha})$ nach $\mathfrak{l}$ stets eine gewisse Untergruppe aller Zahlen von $k(\mathfrak{l})$ vom Index ℓ. Über diesen rein abzählenden Satz hinaus wird sich ferner der folgende, die genaue Charakterisierung der Normenreste liefernde Satz ergeben:

Satz 3. *Das kritische Element, das als einziges Basiselement des zu* α *gehörigen Fundamentalsystems **(I.)** Normennichtrest ist, ist in den drei oben unterschiedenen Fällen für* α *bzw.:*

a.) $\alpha = \overline{\eta}_a = 1 + \overline{w}_0\lambda_0$: *das Element* λ,
b.) $\alpha = \overline{\lambda}$: *das Element* η_a,
c.) $\alpha = \overline{\eta}_h = 1 + u\lambda^h$: *eine gewisse der Einseinheiten* $\eta_1, \ldots, \eta_\mu$ *von der Form*

$$\eta_{h'} = 1 + u'\lambda^{h'},$$

deren Grad h' *der Bedingung*

$$h + h' = \frac{e\ell}{\ell - 1}$$

genügt.

Durch die Sätze 2 und 3 wird für jedes gegebene α eine genaue Übersicht über die Normenreste und Nichtreste β von $k(\sqrt[\ell]{\alpha})$ und $\mathfrak{l}$ vermittelt. Die hier eingeschlagene Methode eröffnet ferner die Möglichkeit, zu einer in der *Hilbert–Furtwängler*schen Theorie keinen Platz findenden, d i r e k t e n Definition und expliziten Formel für das den Normenrestcharakter von β in Bezug auf $k(\sqrt[\ell]{\alpha})$ ausdrückende *Hilbert*sche Normenrestsymbol $\left(\frac{\beta,\alpha}{\mathfrak{l}}\right)$ zu gelangen, und so eine neue Grundlage für die Behandlung des allgemeinsten

Reziprozitätsgesetzes für die ℓ–ten Potenzreste in k zu schaffen, worauf der jüngere von uns in einigen weiteren Arbeiten einzugehen gedenkt.

Zum Beweise der ausgesprochenen Behauptungen ist in den drei getrennt zu behandelnden Fällen a.), b.), c.) jedesmal nur die Möglichkeit der Auswahl der beiden in Satz 1 genannten Fundamentalsysteme **(I.), (II.)** mit den Eigenschaften I.) und II.) und dem in Satz 3 genannten, zu dem betreffenden α gehörigen kritischen Element nachzuweisen. Dabei soll durchweg an den a. S. ... festgesetzten Bezeichnungen festgehalten werden. Außerdem sollen durch Punkte in den Entwicklungen nach Potenzen einer Primzahl λ stets Glieder höherer Ordnung als die hingeschriebenen angedeutet werden.

$$\underline{\text{a.)} \quad \alpha = \overline{\eta}_a = 1 + \overline{w}_0\lambda_0 \; ; \quad \mathfrak{l} = \mathfrak{L}\,.}$$

Der Primteiler $\mathfrak{L}$ von $K(\mathfrak{L})$ hat hier die Relativordnung 1 und den Relativgrad ℓ, also insgesamt die Ordnung e und den Grad ℓf. Eine beliebige Primzahl λ von $k(\mathfrak{l})$ bleibt Primzahl für $K(\mathfrak{L})$, und es kann daher als Fundamentalsystem **(II.)** für $K(\mathfrak{L})$ das System

$$\textbf{(IIa.)} \qquad \Lambda = \lambda\,;\ \mathsf{H}_1, \ldots, \mathsf{H}_{\ell\mu}\,;\ \mathsf{H}_a$$

gewählt werden, wo die H_r irgendwelche nach der bekannten Vorschrift als Basiseinheiten für $K(\mathfrak{L})$ geeignete Einseinheiten sind.

Zur Konstruktion des Fundamentalsystems **(I.)** für $k(\mathfrak{l})$ benötigen wir eine Einheit W von $K(\mathfrak{L})$, deren Relativspur

$$w = S_{\mathfrak{L}}(W) \equiv W + W^{\ell^f} + \cdots + W^{\ell^{(\ell-1)f}} \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{L}\,,$$

also eine Einheit w aus $k(\mathfrak{l})$ ist. Ein solches W kann stets gefunden werden, da die Kongruenz $S_{\mathfrak{L}}(W) \equiv 0 \bmod \mathfrak{L}$ den Grad $\ell^{(\ell-1)f}$ hat und folglich nicht alle $\ell^{\ell f}$ in kongruenten Einheiten mod $\mathfrak{L}$ zu Lösungen haben kann. Bildet man dann die Relativnormen der Einseinheiten

$$\mathsf{H}_{i,\varrho} = 1 + w_i W \lambda^{\varrho}$$

aus $K(\mathfrak{L})$, so wird

(4.4)

$$n(\mathsf{H}_{i,\varrho}) = n(1+w_iW\lambda^{\varrho}) = 1+w_iG_1(W)\lambda^{\varrho}+w_i^2G_2(W)\lambda^{2\varrho}+\cdots+w_i^{\ell}G_{\ell}(W)\lambda^{\ell\varrho},$$

wo $G_1, \dots, G_\ell$ die symmetrischen Grundfunktionen [§')] von W und seinen relativkonjugierten bezeichnen, also speziell $G_1(W)$ die Relativspur $S_{\mathfrak{L}}(W) = w$ ist. Aus der Bestimmung von W folgt dann, daß auf der rechten Seite von (4.) alle auf das "Hauptglied" $w_i G_1(W)\lambda^\varrho = w_i w \lambda^\varrho$ folgenden Glieder von höherer Ordnung sind. Daher erhält man aus (4.) die folgenden $ef = \mu$ Einseinheiten aus $k(\mathfrak{l})$:

$$\eta_{i,\varrho} = n(\mathsf{H}_{i,\varrho}) = 1 + w_i w \lambda^\varrho + \cdots , \tag{4.5}$$

die bei der festgesetzten Bedeutung der w_i und ϱ offenbar als Basiselemente $\eta_1, \dots, \eta_\mu$ eines Fundamentalsystems **(I.)** für $k(\mathfrak{l})$ geeignet sind.

Das letzte Element η_a des Fundamentalsystems **(II.)** kann ferner im Falle eines ungeraden ℓ als

$$\eta_a = \overline{\eta}_a = \overbrace{\alpha}^{2} = \overbrace{1 + \overline{w}_0 \lambda_0}^{1} = n(\sqrt[\ell]{\alpha}) \tag{4.6}$$

gewählt werden. Im Falle $\ell = 2$ ist $n(\sqrt{\alpha}) = -\alpha = 1 - 2 - \overline{w}_0\lambda_0 = 1 - 2 - 4\overline{w}_0$ (es ist hier $\lambda_0 = (\sqrt[\ell-1]{-\ell})^\ell = 4$) genau vom Grade e, also sicher nicht als ausgezeichnete Einseinheit η_a vom Grade $\frac{e\ell}{\ell-1} = 2e$ geeignet. Hier ist jedoch

$$\eta_a = n\big[1 + 2\overline{w}_0(1 + \sqrt{\alpha})\big] = 1 + 4\overline{w}_0 - 16\overline{w}_0^3 \tag{4.7}$$

ein geeignetes η_a.

Das damit bestimmte Fundamentalsystem

(Ia.) $\qquad \lambda,\ \eta_{i,\varrho},\ \eta_a$

für $k(\mathfrak{l})$ hat mit dem zu Anfang angegebenen System **(IIa.)** für $K(\mathfrak{L})$ zusammen die in Satz 1 behaupteten Eigenschaften I.) und II.) mit λ als kritischem Element. Denn erstens ist nach Konstruktion des Systems **(Ia.)** in (5.) – (7.) jedes seiner Elemente mit Ausnahme von λ Relativnorm, zweitens enthält die Relativnorm jedes Elementes von **(IIa.)** λ nur in ℓ–ter Potenz, da ja $n(\Lambda) = n(\lambda) = \lambda^\ell$ und die Relativnormen der Einseinheiten H_r Einseinheiten in $k(\mathfrak{l})$ sind.

Damit sind im Falle a.) unsere Behauptungen bewiesen.

[§')] diese sind mit positivem Zeichen verstanden.

b.) $\alpha = \overline{\lambda}$; $\mathfrak{l} = \mathfrak{L}^\ell$.

Der Primteiler $\mathfrak{L}$ von $K(\mathfrak{L})$ hat hier die Relativordnung ℓ und den Relativgrad 1, also insgesamt die Ordnung ℓe und den Grad f. Eine Primzahl für $\mathfrak{L}$ ist $\Lambda = \sqrt[\ell]{\overline{\lambda}}$. Das System (w_i) und w_0 behalten wegen des unveränderten Grades von $\mathfrak{L}$ ihre Bedeutung auch für $K(\mathfrak{L})$. Daher bilden die folgenden Elemente aus $K(\mathfrak{L})$ ein Fundamentalsystem **(II.)**:

(IIb.)
1.) die Primzahl : $\Lambda = \sqrt[\ell]{\overline{\lambda}}$,
2.) die $\ell e \cdot f$ Einseinheiten der ℓe zu ℓ primen Grade $\overline{\varrho}$ der Reihe $1, 2, \ldots, \frac{e\ell^2}{\ell-1}$:
$$\mathsf{H}_{i,\overline{\varrho}} = 1 + w_i \Lambda^{\overline{\varrho}},$$
3.) die ausgezeichnete Einseinheit :
$$\mathsf{H}_a = 1 + w_0 \lambda_0 = \eta_a ;$$
(H_a ist also schon in $k(\mathfrak{l})$ enthalten und dort als η_a geeignet).

Die Relativnormen der Basiselemente 2.) lassen sich unter Berücksichtigung von

$$n(\mathsf{H}_{i,\overline{\varrho}}) = n(1 + w_i \Lambda^{\overline{\varrho}}) = 1 + w_i^\ell n(\Lambda^{\overline{\varrho}}) = 1 + w_i^\ell \left[(-1)^{\ell-1} \overline{\lambda}\right]^{\overline{\varrho}} \tag{4.8}$$

in folgender Weise zur Konstruktion eines Fundamentalsystems **(I.)** für $k(\mathfrak{l})$ verwenden:

Ib.
1.) die Primzahl : $\lambda = n(\Lambda) = (-1)^{\ell-1} \overline{\lambda}$,
2.) die $e \cdot f$ Einseinheiten der e zu ℓ primen Grade ϱ :
$$\eta_{i,\varrho} = n(\mathsf{H}_{i,\varrho}) = 1 + w_i^\ell \lambda^\varrho$$
Es ist noch hinzuzufügen
3.) die ausgezeichnete Einseinheit :
$$\eta_a = 1 + w_0 \lambda_0 .$$

Das so bestimmte System **(Ib.)** ist ein Fundamentalsystem für $k(\mathfrak{l})$ ¶) und hat mit dem System **(IIb.)** für $K(\mathfrak{L})$ zusammen die in Satz 1 behaupteten Eigenschaften I.) und II.) mit η_a als kritischem Element. Denn erstens ist nach Konstruktion jedes Element des Systems **(Ib.)** mit Ausnahme von η_a Relativnorm, zweitens enthalten die Relativnormen der Elemente von **(IIb.)** η_a nur in ℓ–ter Potenz. Letztens ist ohne weiteres klar für die Normen von Λ

¶) Die w_i^ℓ sind mit den w_i gleichzeitig mod $\mathfrak{l}$ linear unabhängig.

und der ersten $e \cdot f$ Einseinheiten $\mathsf{H}_{i,\overline{\varrho}}$ (für $\overline{\varrho} = \varrho < \frac{e\ell}{\ell-1}$), die ja als von η_a verschiedene Basiselemente in **(Ib.)** verwendet sind. Ferner ist $n(\mathsf{H}_{\mathsf{a}}) = \eta_a^\ell$ eine ℓ–te Potenz in $k(\mathfrak{l})$ und ebenso, wie unmittelbar aus (8.) folgt, die Normen der übrigen $\mathsf{H}_{i,\overline{\varrho}}$ (für $\overline{\varrho} > \frac{e\ell}{\ell-1}$), da sie Einseinheiten von höherem als dem $\frac{e\ell}{\ell-1}$–ten Grade aus $k(\mathfrak{l})$ sind.

Damit sind auch für den Fall b.) unsere Behauptungen bewiesen.

c.) $\alpha = \overline{\eta}_h = 1 + u\lambda^h\,;\ \mathfrak{l} = \mathfrak{L}^\ell\,;\ (0 < h < \frac{e\ell}{\ell-1}\,;\ (h,\ell) = 1)$.

In diesem letzten und schwierigsten Falle hat der Primteiler $\mathfrak{L}$ von $K(\mathfrak{L})$ wie unter b.) wieder die Relativordnung ℓ und den Relativgrad 1, also insgesamt die Ordnung ℓe und den Grad f, sodaß das System (w_i) sowie w_0 auch hier ihre Bedeutung für $K(\mathfrak{L})$ behalten.
Eine Einseinheit

$$\mathsf{H}_{i,s,t} = 1 + w_i\lambda^s(1 - \sqrt[\ell]{\alpha})^t \tag{4.9}$$

aus $K(\mathfrak{L})$ hat offenbar genau den Grad $ht + \ell s$, da die Relativnorm

$$n(1 - \sqrt[\ell]{\alpha}) = 1 - \alpha = -u\lambda^h \tag{4.10}$$

die Ordnungszahl h in Bezug auf $\mathfrak{l}$, also $1 - \sqrt[\ell]{\alpha}$ selbst die Ordnungszahl h in Bezug auf $\mathfrak{L}$ hat. Um daher Einseinheiten aller ℓe für ein Fundamentalsystem **(II.)** von $K(\mathfrak{L})$ in Frage kommenden, zu ℓ primen Grade $\overline{\varrho}$ der Reihe $1, 2, \ldots, \frac{e\ell^2}{\ell-1}$ in der Form $\overline{\varrho} = ht + \ell s$ zu erhalten, hat man t in (9.) der Reihe nach gleich $1, 2, \ldots, \ell - 1$ zu setzen und s für jedes dieser t alle ganzen Zahlen eines bestimmten Intervalls ‖') durchlaufen zu lassen. Da $(h,\ell) = 1$, entstehen so tatsächlich alle Grade $\overline{\varrho}$, und man erhält bei der angegebenen Bedeutung von t und s **') die folgenden Elemente eines Fundamentalsystems **(II.)** für $K(\mathfrak{L})$:

(IIc.)
- 1.) eine beliebige Primzahl : Λ für $\mathfrak{L}$,
- 2.) die $\ell e \cdot f$ Einseinheiten der ℓe zu ℓ primen Grade $\overline{\varrho} = ht + \ell s$:
  $$\mathsf{H}_{i,s,t} = 1 + w_i\lambda^s(1 - \sqrt[\ell]{\alpha})^t\,,$$
- 3.) eine ausgezeichnete Einseinheit :
  $$\mathsf{H}_a = 1 + w_0\lambda_0\,;\ \text{(wie unter b.))}.$$

‖') Nämlich $-\left[\frac{ht}{\ell}\right] \le s \le \frac{e\ell}{\ell-1} - \left[\frac{ht}{\ell}\right] - 1$, dessen Kenntnis aber im folgenden explizit nicht benötigt wird.

**') F hier eine etwas andere Bedeutung als im vorhergehenden $(\mathfrak{l}\ldots)$ F diese ist

Zur Aufstellung des zugehörigen Fundamentalsystems **(Ic.)** für $k(\mathfrak{l})$ sind vor allem die Relativnormen der Einseinheiten $\mathsf{H}_{i,s,t}$ unter 2.) einer genaueren Untersuchung zu unterziehen. Es ist

$$(4.11) \qquad n(\mathsf{H}_{i,s,t}) = n\big[1 + w_i\lambda^s(1 - \sqrt[\ell]{\alpha})^t\big]$$

$$= 1 + w_i\lambda^s G_1(1 - \sqrt[\ell]{\alpha})^t + w_i^2\lambda^{2s} G_2(1 - \sqrt[\ell]{\alpha})^t + \cdots + w_i^\ell\lambda^{\ell s} G_\ell(1 - \sqrt[\ell]{\alpha})^t,$$

wo $G_1, \ldots, G_\ell$ wieder die symmetrischen Grundfunktionen der Größe $(1 - \sqrt[\ell]{\alpha})^t$ und ihre relativ–konjugierten bezeichnen, speziell also G_1 die Relativspur und G_ℓ die Relativnorm ist. Um über die Grade der durch (11.) gelieferten Einseinheiten aus $k(\mathfrak{l})$ Aussagen machen zu können, ist zu untersuchen, welches der ℓ Glieder mit $G_1, \ldots, G_\ell$ rechts, die kurz als das erste, zweite,$\ldots$, ℓ–te bezeichnet werden mögen, die niedrigste Ordnungszahl hat. Ich bezeichne die Ordnungszahlen der Größen $G_1, \ldots, G_\ell$ in Bezug auf den Primteiler $\mathfrak{l}$ mit $g_1, \ldots, g_\ell$, die Ordnungszahlen der entsprechenden Glieder in (11.) selbst mit $a_1, \ldots, a_\ell$, sodaß

$$a_r = g_r + rs\,; \quad (r = 1, 2, \ldots, \ell)$$

ist.

Die Ordnungszahlen a_1 und a_ℓ des ersten und letzten Gliedes und jene Glieder selbst lassen sich in allen Fällen genau angeben. Es ist nämlich einerseits

$$\begin{aligned} G_1(1 - \sqrt[\ell]{\alpha})^t = \quad & \sum_{n=0}^{\ell-1}(1 - \zeta^n\sqrt[\ell]{\alpha})^t = \sum_{n=0}^{\ell-1}\sum_{m=0}^{t}(-1)^m\binom{t}{m}\zeta^{nm}\sqrt[\ell]{\alpha}^m \\ = \quad & \sum_{m=0}^{t}(-1)^m\binom{t}{m}\sqrt[\ell]{\alpha}^m\sum_{n=0}^{\ell-1}\zeta^{nm}, \end{aligned}$$

und da $\sum_{n=0}^{\ell-1}\zeta^{nm}$ für jedes zu ℓ prime m gleich Null, sonst gleich ℓ ist, reduziert sich wegen $1 \leq t \leq \ell - 1$ die $\sum_m$ auf ihr erstes Glied:

$$G_1(1 - \sqrt[\ell]{\alpha})^t = \ell\,.$$

Es wird also das erste Glied in (11.):

$$(4.12) \qquad w_i\lambda^s G_1(1 - \sqrt[\ell]{\alpha})^t = w_i\lambda^s\ell = -w_i\omega^g\lambda^{\ell+s} + \cdots\;; \quad (\text{s. S. } \ldots),$$

also $a_1 = e + s$.

Andererseits ist

$$G_\ell(1-\sqrt[\ell]{\alpha})^t = n(1-\sqrt[\ell]{\alpha})^t = (1-\alpha)^t = (-u)^t\lambda^{ht},$$

also das letzte Glied in (11.):

$$w_i\lambda^{\ell s}G_\ell(1-\sqrt[\ell]{\alpha})^t = w_i^\ell(-u)^t\lambda^{ht+\ell s} = w_i^\ell(-u)^t\lambda^{\overline{\varrho}}. \tag{4.13}$$

Seine Ordnungszahl $a_\ell = ht + \ell s = \overline{\varrho}$ stimmt jedesmal mit dem Grade $\overline{\varrho}$ der zugrundegelegten Einseinheit $\mathsf{H}_{i,s,t}$ aus $K(\mathfrak{L})$ überein.

Eine explizite Angabe der übrigen Ordnungszahlen $a_2, \ldots, a_{\ell-1}$ und der entsprechenden Glieder aus (11.) ist im allgemeinen nicht möglich. Dagegen lassen sich für unsern Zweck hinreichende untere Grenzen für diese Ordnungszahlen angeben, indem solche zunächst für die Ordnungszahlen $s_1, \ldots, s_{\ell-1}$ der ersten $\ell-1$ Potenzsummen $S_1, \ldots, S_{\ell-1}$ von $(1-\sqrt[\ell]{\alpha})^t$ aufgestellt und dann mittels der Newtonschen Formeln für die Potenzsummen auf die Ordnungszahlen der symmetrischen Grundfunktionen übertragen werden.

Sei für das folgende $1 \le r \le \ell-1$. Um gebrochene Zahlen und "größte Ganze" zu vermeiden, erweist es sich als zweckmäßig, alle auftretenden Ordnungszahlen in Bezug auf den Primteiler $\mathfrak{L}$ zu rechnen. Die abzuschätzenden Ordnungszahlen s_r, g_r, a_r sind dann durch ihre ℓ–fachen:

$$\overline{s}_r = \ell s_r\,,\ \overline{g}_r = \ell g_r\,,\ \overline{a}_r = \ell a_r$$

zu ersetzen. Die r–te Potenzsumme $S_r(1-\sqrt[\ell]{\alpha})^t$ stellt sich so dar:

$$\begin{aligned}
S_r(1-\sqrt[\ell]{\alpha})^t &= S_1(1-\sqrt[\ell]{\alpha})^{rt} = \sum_{n=0}^{\ell-1}(1-\zeta^n\sqrt[\ell]{\alpha})^{rt} = \\
&= (1-\sqrt[\ell]{\alpha})^{rt}\left[1+\sum_{n=1}^{\ell-1}\left(\frac{1-\zeta^n\sqrt[\ell]{\alpha}}{1-\sqrt[\ell]{\alpha}}\right)^{rt}\right] \\
&= (1-\sqrt[\ell]{\alpha})^{rt}\left[1+\sum_{n=1}^{\ell-1}\left(\frac{1-\sqrt[\ell]{\alpha}+(1-\zeta^n)\sqrt[\ell]{\alpha}}{1-\sqrt[\ell]{\alpha}}\right)^{rt}\right] \\
&= (1-\sqrt[\ell]{\alpha})^{rt}\left[1+\sum_{n=1}^{\ell-1}\left(1+\frac{\sqrt[\ell]{\alpha}}{1-\sqrt[\ell]{\alpha}}(1-\zeta^n)\right)^{rt}\right] \\
&= (1-\sqrt[\ell]{\alpha})^{rt}\left[1+\sum_{n=1}^{\ell-1}\left(1+\sum_{m=1}^{rt}\binom{rt}{m}\frac{\sqrt[\ell]{\alpha}^m}{(1-\sqrt[\ell]{\alpha})^m}(1-\zeta^n)^m\right)\right] \\
&= (1-\sqrt[\ell]{\alpha})^{rt}\left[\ell+\sum_{m=1}^{rt}\binom{rt}{m}\sqrt[\ell]{\alpha}^m\frac{\sum_{n=1}^{\ell-1}(1-\zeta^n)^m}{(1-\sqrt[\ell]{\alpha})^m}\right]
\end{aligned}$$

Nun ist $1-\zeta^n$ bekanntlich genau durch $\ell^{\frac{1}{\ell-1}} \sim \mathfrak{L}^{\frac{e\ell}{\ell-1}}$ teilbar, $1-\sqrt[\ell]{\alpha}$ nach (10.) genau durch $\mathfrak{L}^h$. Also haben die einzelnen Glieder der $\sum_m$ zumindestens die Ordnungszahl $m\left(\frac{e\ell}{\ell-1}-h\right)$. Die wegen $0<h<\frac{e\ell}{\ell-1}$ stets positive und wegen $(h,\ell)=1$ zu ℓ prime Größe $\frac{e\ell}{\ell-1}-h$, die sich nachher als Grad der kritischen Einseinheit des zu konstruierenden Fundamentalsystems **(Ic.)** herausstellen wird, soll mit h' bezeichnet werden:

$$h' = \frac{e\ell}{\ell-1}-h\,,$$

sodaß die Ordnungszahlen der Glieder der $\sum_m$ nacheinander $\geq\ h', 2h', \ldots, mh', \ldots$ sind.

Über die ersten $\ell-1$ Glieder läßt sich noch Genaueres aussagen. Für $1\leq m\leq \ell-1$ ist nämlich, ähnlich wie oben

$$\sum_{n=1}^{\ell-1}(1-\zeta^n)^m = \ell\,.$$

Also sind die Ordnungszahlen der ersten $(\ell-1)$ Glieder der $\sum_m$ nicht kleiner als

$$e\ell - mh \geq e\ell-(\ell-1)h = (\ell-1)h'$$

und dasselbe gilt von der Ordnungszahl $e\ell$ des zu Beginn stehenden ℓ, sowie nach obigem für alle weiteren Glieder der $\sum_m$. Da schließlich der Faktor $(1-\sqrt[\ell]{\alpha})^{rt}$ nach (10.) die Ordnungszahl rth hat, wird

$$\overline{s}_r \geq rth + e\ell - (\ell-1)h \;=\; rth + (\ell-1)h'. \tag{4.14}$$

Für den Übergang von den S_r zu den G_r benutzen wir die Newtonschen Formeln:

$$S_r - G_1 S_{r-1} + G_2 S_{r-2} - \cdots \mp G_{r-1} S_1 \pm r G_r \;=\; 0\,; \quad (1 \leq r \leq \ell - 1)\,.$$

Sei schon bewiesen, daß die Ordnungszahlen $\overline{g}_n$ für $n = 1, 2, \ldots, r-1$ d i e s e l b e untere Grenze $nth + (\ell-1)h'$ haben, wie $\overline{s}_n$ in (14.). Dann sind die Ordnungszahlen von $G_1 S_{r-1}\,,\; G_2 S_{r-2}\,,\; \ldots, G_{r-1} S_1$ sämtlich nicht kleiner als

$$rth + 2(\ell-1)h' > rth + (\ell-1)h',$$

also auch die Ordnungszahl $\overline{g}_r$ von G_r, da r prim zu ℓ ist,

$$\overline{g}_r \geq rth + (\ell-1)h', \tag{4.15}$$

und da für $r = 1$ wegen $S_1 = G_1$ die gemachte Annahme stimmt, gilt (15.) allgemein für $1 \leq r \leq \ell - 1$. Es wird somit

$$\begin{aligned} \overline{a}_r \;=\; \overline{g}_r + rs\ell \geq rth + (\ell-1)h' + rsl = &\quad rth + e\ell - (\ell-1)h + rsl \\ = &\quad e\ell + \big[rt - (\ell-1)\big]h + rsl, \end{aligned}$$

$$a_r \geq e + \frac{rt - (\ell-1)}{\ell} h + rs\,; \quad (r \;=\; 1, 2, \ldots, \ell-1) \tag{4.16}$$

und speziell nach (12.), (13.) genau:

$$a_1 \;=\; e + s\,, \tag{4.17}$$

$$a_\ell \;=\; ht + \ell s\,. \tag{4.18}$$

Wir denken uns nun für jedes feste t der Reihe $1, 2, \ldots, \ell-1$ die ganze Zahl s variabel, von ihrem kleinsten bis zu ihrem größten Werte aufsteigend und die a_r als Funktionen von s graphisch dargestellt. Dann entspricht nach (11.) jedem a_r eine bestimmte gerade Linie, deren Steigung die positive Zahl

r ist, sodaß die Steigungen von $a_1, \dots, a_\ell$ eine zunehmende Folge bilden. Die Geraden a_1 und a_ℓ werden durch (17.) und (18.) genau gegeben, die übrigen $a_2, \dots, a_{\ell-1}$ sind Parallelen zu den durch die rechten Seiten in (16.) gegebenen Geraden und verlaufen jedenfalls nicht unterhalb der letzteren. Für unseren Zweck genügen dann die beiden folgenden Hilfssätze über die Lage der ℓ Geraden $a_1, \dots, a_\ell$:

Hilfssatz 1. *Für $t = \ell - 1$ verlaufen die Geraden $a_2, \dots, a_{\ell-1}$ ganz außerhalb des durch a_1 und a_ℓ bestimmten, nach unten geöffneten, stumpfen Winkelraums (inkl. Scheitel), d. h. es ist bei wachsendem s zuerst a_ℓ, von einer gewissen Stelle s_0 an a_1 die niedrigste aller Ordnungszahlen a_r.*

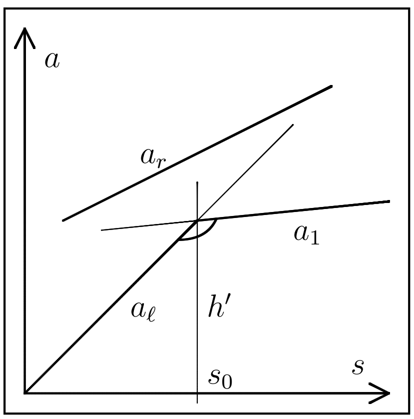


Fig. 1.

Beweis: Für $t = \ell - 1$ schneiden sich a_1 und a_ℓ nach (17.), (18.) für

$$e + s = h(\ell - 1) + \ell s,$$

d. h. für

$$s = s_0 = \frac{e}{\ell - 1} - h = h' - e$$

und haben den gemeinsamen Wert

$$\frac{e\ell}{\ell - 1} - h = h'. \tag{4.19}$$

Da die Steigung ℓ von a_ℓ größer als die Steigung 1 von a_1 ist, ist tatsächlich a_ℓ für $s < s_0$, a_1 für $s > s_0$ das kleinere. Um die Behauptung für die übrigen a_r zu beweisen, deren Steigungen $2, 3, \dots, \ell - 1$ zwischen den Steigungen 1 und ℓ von a_1 und a_ℓ liegen, ist, wie aus Fig. 1. ersichtlich, nur zu zeigen, daß jedes dieser a_r für $s = s_0$ größer als h' ist. Dazu genügt, daß schon die in (16.) gefundene untere Schranke für die a_r:

$$e + \frac{(r-1)(\ell-1)}{\ell} h + rs_0 > h'$$

ist, d. h., wenn der Wert für s_0 eingesetzt wird, daß

$$e + \frac{(r-1)(\ell-1)}{\ell} h + rh' - re > h'$$

oder nach (19.)

$$(r-1)\Big[h' - e + \frac{\ell-1}{\ell} h\Big] = (r-1)\Big[\frac{e}{\ell-1} - \frac{h}{\ell}\Big] > 0$$

ist, was für $r > 1$ wegen $\frac{e\ell}{\ell-1} > h$ stets der Fall ist. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Hilfssatz 2. *Für jedes t, (also $1 \leq t \leq \ell - 1$), verlaufen die Geraden $a_1, \ldots, a_{\ell-1}$ ganz außerhalb des durch a_ℓ und die Parallele zur s–Achse im Abstande $h' = \frac{e\ell}{\ell-1} - h$ bestimmten, nach unten geöffneten, stumpfen Winkelraums (exkl. Scheitel), d. h. wenn $s_0 = s_0'$ die Abszisse des Schnittpunktes von a_ℓ mit jener Parallelen ist: Für $s < s_0'$ ist a_ℓ die niedrigste aller Ordnungszahlen $a_1, \ldots, a_\ell$, für $s > s_0'$ sind alle $a_1, \ldots, a_\ell$ größer als der "kritische" Grad h'.*

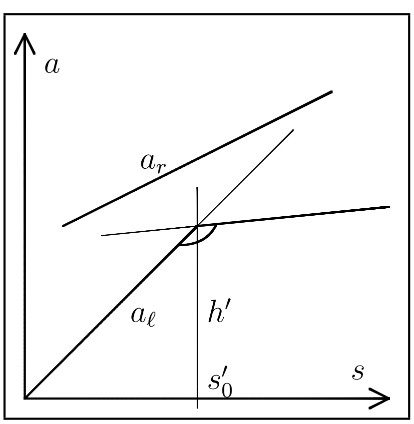


Fig. 2.

Beweis: Der Wert s'_0 ergibt sich nach (18.) aus

$$a_\ell \;=\; ht + \ell s \;=\; h' \;=\; \frac{e\ell}{\ell - 1} - h$$

zu[††’)]

$$s \;=\; s'_0 \;=\; \frac{e}{\ell - 1} - \frac{h(t+1)}{\ell}\,.$$

Wie bei Hilfssatz 1 genügt hier der Nachweis, daß $a_1, \ldots, a_{\ell-1}$ für $s \;=\; s'_0$ nicht kleiner als h' sind. Dazu genügt wieder, daß schon die in (16.) gefundene untere Schranke für die a_r :

$$e + \frac{rt - (\ell - 1)}{\ell}\, h + r s'_0 \geq h' \;=\; \frac{e\ell}{\ell - 1} - h$$

ist, d. h. wenn der Wert von s'_0 eingesetzt wird, daß

$$e + \frac{rt - (\ell - 1)}{\ell} h + r\frac{e}{\ell - 1} - r\frac{h(t+1)}{\ell} \geq \frac{e\ell}{\ell - 1} - h$$

oder

$$\frac{r-1}{\ell - 1} e \geq \frac{r-1}{\ell} h$$

ist, was für $r \;=\; 1$ stimmt, für $r > 1$ gleichwertig mit der ebenfalls +++ Ungleichung $\frac{e\ell}{\ell-1} > h$ ist.

Nach den beiden hiermit bewiesenen Hilfssätzen ist in der oben a. S.... angegebenen Entwicklung (11.) von $n(\mathsf{H}_{i,s,t})$ das letzte Glied sicher dann das niedrigste, wenn

$$a_\ell \;=\; ht + \ell s \;=\; \overline{\varrho} < h',$$

also der Grad $\overline{\varrho}$ von $\mathsf{H}_{i,s,t}$ kleiner als der kritische Grad h' ist. Daher lautet in diesem Falle die Entwicklung (11.) unter Berücksichtigung des Ausdruckes (13.) für das letzte Glied:

$$\eta_{i,s,t} \;=\; n(\mathsf{H}_{i,s,t}) \;=\; 1 + w_i^\ell (-u)^t \lambda^{ht+\ell s} + \cdots \tag{4.20}$$

[††’)] s'_0 ist also nur für $t \;=\; \ell - 1$ eine ganze Zahl, sodaß für $1 \leq t < \ell - 1$ ein eventuelles Hindurchgehen eines a_r durch den Scheitel des genannten Winkelraums für die beabsichtigte Anwendung auf ganzzahlige s belanglos ist. Für $t \;=\; \ell - 1$ geht nach Hilfssatz 1 tatsächlich a_1 durch den Scheitel, aber keins der übrigen $a_2, \ldots, a_{\ell-1}$.

$$= 1 + w_i^\ell(-u)^t\lambda^\varrho + \cdots\ ; \quad (\varrho\ =\ ht + \ell s < h')\,.$$

Es [‡‡')] entstehen also, wenn s und t alle nach den früheren Festsetzungen in Frage kommenden und der angegebenen Bedingung genügenden Werte durchlaufen, auf diese Weise alle für unser zu konstruierendes Fundamentalsystem für $k(\mathfrak{l})$ notwendigen Basissysteme, deren Grade $\varrho < h'$ sind, jedes einmal, und dazu werden die Normen der sämtlichen Basiselemente $\mathsf{H}_{i,s,t}$ des Fundamentalsystems **(IIc.)** für $K(\mathfrak{L})$ verwendet, deren Grade $\overline{\varrho} < h'$ sind.

Für die Grade $\varrho > h'$ erhält man Basissysteme für den Unterkörper, indem man speziell die Normen der $\mathsf{H}_{i,s,\ell-1}$ für $t\ =\ \ell-1$ verwendet. In deren Entwicklungen (11.) ist nach Hilfssatz 1 für $s > s_0\ =\ \frac{e}{\ell-1} - h$ das erste Glied das niedrigste, sodaß man unter Berücksichtigung des Ausdruckes (12.) für dieses Glied hat:

$$\eta_{i,s,\ell-1}\ =\ n(\mathsf{H}_{i,s,\ell-1})\ =\ 1 - w_i\omega^g\lambda^{e+s} + \cdots\ ; \quad (s > s_0)\,. \tag{4.21}$$

Läßt man also s alle der angegebenen Bedingung genügenden Werte durchlaufen, für die $e+s$ kleiner als $\frac{e\ell}{\ell-1}$ und prim zu ℓ ist, so erhält man auf diese Weise alle für unser zu konstruierendes Fundamentalsystem für $k(\mathfrak{l})$ notwendigen Basissysteme, deren Grade $\varrho\ (=\ c+s) > h'$ sind.

In der Form (21.) erhält man ferner auch eine als ausgezeichnete Einseinheit unseres Fundamentalsystems geeignete Einseinheit η_a vom Grade $\frac{e\ell}{\ell-1}$. Denn für $s\ =\ \frac{e}{\ell-1}$ (dies ist tatsächlich $> s_0$) liefert (21.) ein Basissystem für den Grad $\frac{e\ell}{\ell-1}$ und also sicher ein $\eta_a\ =\ 1 + \overline{w}_0\lambda_0$ mit $(\overline{w}_0) \not\equiv 0 \bmod \ell$. Sei also etwa

$$\eta_a\ =\ n(\mathsf{H}_{1,\frac{e}{\ell-1},\ell-1})\ =\ 1 - w_1\omega^g\lambda^{\frac{e\ell}{\ell-1}} + \cdots\ =\ 1 + \overline{w}_0\lambda_0\,. \tag{4.22}$$

Für den noch übrigen, kritischen Grad $\varrho\ =\ h'$ erhält man $f-1$ Basiselemente als Relativnormen der $\mathsf{H}_{i,\sigma,\tau}$ indem man wieder $t\ =\ \ell-1$ und $s\ =\ s_0$ setzt. In der Entwicklung (11.) ist dann nach Hilfssatz 1 das erste und letzte Glied von gleicher Ordnung h', sodaß unter Berücksichtigung der Ausdrücke (12.) und (13.) für diese beiden Glieder die Entwicklung (11.) lautet:

$$\eta_{i,s_0,\ell-1}\ =\ n(\mathsf{H}_{i,s_0,\ell-1})\ =\ 1 + (w_i^\ell u^{\ell-1} - w_i\omega^g)\lambda^{h'} + \cdots\,. \tag{4.23}$$

Ist dann das System (w_i) so gewählt, daß für eines seiner Elemente, etwa w_f:

$$w_f^\ell u^{\ell-1} - w_f\omega^g \equiv 0 \bmod \mathfrak{l}$$

[‡‡')] Für $\overline{\varrho}$ setzen wir hier, wo es sich um die Grade der $\eta_{i,s,t}$ des Unterkörpers handelt, nach unseren früheren Festsetzungen ϱ.

wird, was nach einer in M. D. auf S. 198/99 angestellten Betrachtung hier möglich ist, da die Exponenten $\ell-1$ und g von u und ω beide durch $\ell-1$ teilbar sind, so sind, wie a. a. O. S. 200/01 ausgeführt, die $f-1$ übrigen Koeffizienten $w_i^\ell u^{\ell-1} - w_i\omega^g \bmod \mathfrak{l}$ linear unabhängig, sodaß in der Form (23.) für $i = 1, 2, \ldots, f-1$ die ersten $f-1$ Einseinheiten eines Basissystems für den Grad h' enthalten sind. Wir haben dann noch eine letzte Basiseinheit

$$\eta_{h'} = 1 + u'\lambda^{h'} \tag{4.24}$$

für diesen Grad hinzuzufügen, die hier die Rolle der kritischen Einseinheit übernimmt; dabei ist u' als irgendeine von den $f-1$ Einheiten $w_i^\ell u^{\ell-1} - w_i\omega^g \bmod \mathfrak{l}$ linear unabhängige Einseinheit zu wählen.

Nimmt man Schließlich noch die Norm der Primzahl Λ:

$$\lambda' = n(\Lambda) \tag{4.25}$$

als Primzahl für $k(\mathfrak{l})$, so bilden die Elemente (20.) – (25.) nach Konstruktion ein Fundamentalsystem **(Ic.)** für $k(\mathfrak{l})$, dessen sämtliche Elemente, bis auf das kritische $\eta_{h'}$ in (24.) Relativnormen sind, sodaß also das gewonnene System **(Ic.)** die in Satz 1 behauptete Eigenschaft I.) mit $\eta_{h'}$ als kritischem Element hat.

Schließlich haben die beiden Systeme **(IIc.)** (S. ...) und **(Ic.)** auch die in Satz 1 genannte Eigenschaft II.).

Denn einmal sind die Normen der Basiselemente Λ in (25.) und aller $\mathsf{H}_{i,s,t}$ vom Grade $\overline{\varrho} < h'$ in (20.) als von $\eta_{h'}$ verschiedene Basiselemente des Systems **(Ic.)** verwendet, ebenso die Normen der $\mathsf{H}_{i,s_0,\ell-1}$ vom Grade $\overline{\varrho} = h'$ für $i = 1, 2, \ldots, f-1$ in (23.), während die Norm der f–fachen Basiseinheit $\mathsf{H}_{f,s_0,\ell-1}$ dieses Grades nach Wahl der w_i bei (23.) sicher von höherem Grade als h' ist, also die Basiseinheit $\eta_{h'}$ vom Grade h' nur in ℓ–ter Potenz enthalten kann *")[*"]. Dasselbe gilt ferner von den Normen der noch übrigen Basiseinheiten $\mathsf{H}_{i,s,t}$, deren Grad $\overline{\varrho} > h'$ ist. Denn nach dem obigen Hilfssatz 2 ist für diese wegen $\overline{\varrho} = a_\ell$ der Grad der Einseinheit $n(\mathsf{H}_{i,s,t})$ aus $k(\mathfrak{l})$ sicher größer als der kritische Grad h' von $\eta_{h'}$. Schließlich ist die Norm von $\mathsf{H}_a = 1 + w_0\lambda_0$ eine ℓ–te Potenz in $k(\mathfrak{l})$.

Damit sind unsere Behauptungen auch für den letzten Fall $\alpha = \overline{\eta}_h = 1 + a\lambda^h$ und somit die auf S. ... aufgestellten Hauptsätze 2 und 3 vollständig

[*"] Letzteres ergibt sich unmittelbar aus der in M. D. entwickelten Regel zur Darstellung eines gegebenen Elementes von $k(\mathfrak{l})$ durch ein gegebenes Fundamentalsystem.

bewiesen.

(*Eingegangen am 1. 5. 1923*).

4.2 21.06.1923, Anweisungen

Bemerkungen für den Setzer.

	(zweimal unterstrichen	) : fetter Druck
	(einmal 〃	) : kursiv
- - - - - - - -	(gestrichelt 〃	) : gesperrt
	(blau 〃	) : unterstrichen
	(rot 〃	) : große *griechische* Buchstaben, die senkrecht (nicht schrägliegend) zu drucken sind: $\mathsf{A}, \mathsf{H}, \ldots$

Es bedeutet stets:

$\mathfrak{l}$	kleines *deutsches* “el”
$\mathfrak{L}$	großes *deutsches* “el”
ℓ	kleines *lateinisches* “el” (nicht zu verwechseln mit e)
	In der Verbindung: $k(\sqrt[\ell]{\alpha})$ stets kl. lat. “el”
r	klein *lateinisch* “er”

S oder S beidesmal dasselbe große *lateinische* “es”
An einigen Stellen ist durch: $\|$ ein anzubringender *Absatz* bezeichnet.

4.3 23.06.1923, Manuskript Hilb. Normenrestsymbol

Zur Theorie des Hilbertschen Normenrestsymbols in algebraischen Zahlkörpern.
(Zweiter Teil: Fall eines ungeraden ℓ).

Von Herrn Helmut Hasse in Kiel.

Ich gebe in dieser Arbeitdie Fortsetzung meiner früheren Untersuchungen *) über die Normenreste in algebraischen Zahlkörpern;die Ergebnisse sind zum Teil an sich von Interesse, zum anderen Teil sollen sie in einer weiteren Arbeit zu einer Verschärfung des allgemeinsten Reziprozitätsgesetzesin algebraischen Körpern Verwendung finden. In den Bezeichnungen schließe ich mich an die genannten Arbeiten an.

1.) In Q. N. R. hatte ich im Falle $\ell = 2$ für den Wert des Symbols $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right)$ eine gewisse Normalform hergeleitet, nämlich

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = (-1)^{L(x|y)}, \tag{4.1}$$

wo $L(x|y)$ eine symmetrische Bilinearform in den Exponentenreihen x_i und y_i aus der multiplikativen Darstellung von α und β für den Bereich von $\mathfrak{l}$ ist, die bei geeigneter Wahl des Fundamentalsystems $\lambda; \eta_1, \dots, \eta_m; \eta_a$ für die multiplikative Darstellung in $k(\mathfrak{l})$ die in Q. N. R., Satz ... angegebene, einfache Gestalt annimmt.

Nachdem in Z. V. die notwendigen Vorbereitungen für die Ausdehnung dieser Untersuchungen auf den Fall eines ungeraden ℓ durch den direkten Beweis des Zerlegungs– und Vertauschungssatzes für das Hilbertsche

*) H. Hasse, Zur Theorie des quadratischen Hilbertschen Normenrestsymbols..., Crelle 153, S. ...
H. Hasse, Direkter Beweis des Zerlegungs– u. Vertauschungssatzes..., Crelle 153, S. ...
Siehe auch: K. Hensel u. H. Hasse, Über die Normenreste..., Ann. ... S. ...
zitiert mit resp. Q. N. R., Z. V., H. H.

Normenrestsymbol getroffen sind, fällt es nunmehr nicht schwer, eine (1.) entsprechende Normalform auch in diesem allgemeinsten Fall herzuleiten. Die Beweise und das Resultat werden hier viel einfacher, als für $\ell = 2$, da für ungerades ℓ stets $\left(\frac{\alpha,\alpha}{\mathfrak{l}}\right) = 1$ ist, also das die Untersuchungen in Q. N. R. erheblich komplizierende Glied, das eventuell in der Hauptdiagonale der reduzierten Matrix L noch stehen bleibt, hier gar nicht auftreten kann.

2.) Sei also ℓ eine ungerade Primzahl, k ein beliebiger algebraischer Körper, der die ℓ–ten Einheitswurzeln enthält, und $\mathfrak{l}$ ein Primteiler von ℓ in k. Durch die Festsetzungen von Z. V. ist das Hilbertsche Normenrestsymbol $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right)$ folgenden Bedingungen unterworfen:

Für beliebige Zahlen $\alpha, \beta, \ldots$ aus $k(\mathfrak{l})$ ist:

(4.2) $\left(\dfrac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right) = 1$ oder ζ^c, je nachdem α Normzahl von $k(\mathfrak{l}; \sqrt[\ell]{\beta})$ ist oder nicht. (*"Vorläufige" Definition.*) (ζ feste, primitive ℓ–te Einheitswurzel, $1 \leq c \leq \ell - 1$).

(4.3) $$\left(\frac{\alpha_1,\beta}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\alpha_2,\beta}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\alpha_1\alpha_2,\beta}{\mathfrak{l}}\right);$$ (*Zerlegungssatz für die erste Komponente*)

(4.4) $$\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\beta,\alpha}{\mathfrak{l}}\right) = 1;$$ (Vertauschungssatz)

(2.) – (4.) [†] sind nach den Ergebnissen von Z. V. widerspruchsfrei. Aus (3.) und (4.) folgt noch:

(4.5) $$\left(\frac{\alpha,\beta_1}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\alpha,\beta_2}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\alpha,\beta_1\beta_2}{\mathfrak{l}}\right);$$ (*Zerlegungssatz für die zweite Komponente*)

Sei nun

(4.6) $$\lambda = \eta_0\ ; \quad \eta_1, \ldots, \eta_m\ ; \quad \eta_a = \eta_{m+1}$$

[†] Die in Z. V. noch getroffene Festsetzung $\left(\frac{\alpha\alpha_0^\ell,\beta\beta_0^\ell}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right)$ ist eine unmittelbare Folge aus (2.), (3.), (5.), braucht also hier nicht mit aufgezählt zu werden.

ein beliebiges Fundamentalsystem für die multiplikative Darstellung in $k(\mathfrak{l})$ [‡], dann folgt aus (3.) und (5.) für zwei beliebige Zahlen

$$(4.7) \qquad \alpha = \prod_{i=0}^{m+1} \eta_i^{x_i} \alpha_0^\ell \quad \text{und} \quad \beta = \prod_{k=0}^{m+1} \eta_k^{y_k} \beta_0^\ell \, ; \quad (0 \leq x_i, y_k \leq \ell - 1)$$

aus $k(\mathfrak{l})$:

$$(4.8) \qquad \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = \prod_{i,k=0}^{m+1} \left(\frac{\eta_i, \eta_k}{\mathfrak{l}}\right)^{x_i y_k} = \zeta^{\sum_{i,k=0}^{m+1} a_{ik} x_i y_k} = \zeta^{L(x|y)},$$

wenn $\left(\frac{\eta_i, \eta_k}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{a_{ik}}$ für ein festes ζ gesetzt wird.

Da nach Z. V. eine den Bedingungen (2.) – (5.) genügende Bestimmung der Werte des Symbols $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right)$ möglich ist, so gilt also:

Satz 1. *Zu jedem Fundamentalsystem (6.) existiert eine Bilinearform*

$$L(x|y) \equiv \sum_{i,k=0}^{m+1} a_{ik} x_i y_k \ \textit{mod. } \ell,$$

sodaß der Wert des Symbols $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right)$ für zwei beliebige Zahlen (7.) aus $k(\mathfrak{l})$ durch (8.) gegeben wird.

Die Koeffizientenmatrix $L = (a_{ik})$ dieser Bilinearform ist nach (4.) Schiefsymmetrisch mod. ℓ. Ferner gilt:

Satz 2. *Es ist die Determinante* $|L| = |a_{ik}| \not\equiv 0$ *mod.* ℓ

Beweis: Wäre $|L| \equiv 0$ mod. ℓ, so gäbe es eine mod. ℓ nicht identisch verschwindende Lösung $(y_k^{(0)})$ der Kongruenzen

$$\sum_{k=0}^{m+1} a_{ik} y_k \equiv 0 \text{ mod. } \ell,$$

sodaß für dieses System $(y_k^{(0)})$ *identisch* in den x_i gälte:

$$L(x|y^{(0)}) \equiv \sum_{i=0}^{m+1} x_i \Big(\sum_{k=0}^{m+1} a_{ik} y_k^{(0)} \Big) \equiv 0 \text{ mod. } \ell.$$

[‡] Siehe etwa H. H., S. ...

Das würde aber bedeuten, daß für das jenem System $(y_k^{(0)})$ entsprechende β_0 *jedes* α der Gleichung $\left(\frac{\alpha,\beta_0}{\mathfrak{l}}\right) = 1$ genügte; im Widerspruch zu (2.), da dies nach den Ergebnissen von H. H. nur für $\beta_0 = \xi^\ell(\mathfrak{l})$, d. h. $(y_k^{(0)}) \equiv 0 \bmod. \ell$ eintritt.

Aus dem Nichtverschwinden von $|L| \bmod. \ell$ ergibt sich nun sofort die fundamentale Tatsache:

Satz 3. *Zu jedem Fundamentalsystem (6.) existiert bis auf eine willkürliche multiplikative Konstante $c \not\equiv 0 \bmod. \ell$ auch* ***nur*** *eine Bilinearform L mit der Eigenschaft von Satz 1, d. h. der Wert des Hilbertschen Symbols $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right)$ ist durch die Festsetzungen (2.) – (5.) in allen Fällen bis auf die einmalige Wahl eines bestimmten ζ* ***eindeutig*** *festgelegt.*

Beweis: Sei $L'(x|y) \equiv \sum a'_{ik} x_i y_k$ eine zweite Bilinearform mit der Eigenschaft von Satz 1. Dann gilt nach (2.):

Aus $L(x|y) \equiv 0 \bmod. \ell$ folgt $L'(x|y) \equiv 0 \bmod. \ell$ und umgekehrt.

Man überzeugt sich aber leicht auf elementar–algebraischem Wege, daß dies infolge $|L| \not\equiv 0 \bmod. \ell$ die Identität

$$L'(x|y) \equiv c\,L(x|y) \bmod. \ell\ ; \quad (c \not\equiv 0 \bmod. \ell)$$

zur Folge hat, w. z. b. w.

3.) Aus den Gleichungen ..... aus Z. V. folgt ohne weiteres, daß die Matrix L für jedes beliebige Fundamentalsystem (nach steigenden Graden geordnet):

$$\lambda = \eta_0\,;\ \eta_{11}\ldots\eta_{1f}\,;\ \eta_{21}\ldots\eta_{2f}\,;\ \cdots\ ;\ \eta_{e1}\ldots\eta_{ef}\,;\ \eta_a = \eta_{m+1}$$

folgenden Typus hat: $(r = 1, 2, \ldots f)$:

$$
\text{(8a)} \qquad
\begin{array}{l|llllllllll}
 & \lambda & \eta_{1r} & \eta_{2r} & . & . & . & . & \eta_{er} & \eta_a \\
-- & -- & -- & -- & - & - & - & - & -- & -- \\
\lambda & 0 & A_{01} & A_{02} & . & . & . & . & A_{0e} & a_{0\,e+1} \\
\eta_{1r} & A_{10} & A_{11} & A_{12} & . & . & . & . & A_{1e} & 0 \\
\eta_{2r} & A_{20} & A_{21} & A_{22} & & & & & . & 0 \\
. & . & . & & & & & . & . & . \\
. & . & . & & & & . & . & & . \\
. & . & . & & & . & . & & & . \\
. & . & . & & . & . & & & & . \\
. & . & . & . & . & & & & & . \\
\eta_{er} & A_{e0} & A_{e1} & . & & & & & & . \\
\eta_a & a_{e+1\,0} & 0 & . & . & . & . & . & . & 0
\end{array}
$$

Dabei sind entsprechend den e Basissystemen $\eta_{1r}, \eta_{2r}, \ldots, \eta_{er}$ und den beiden " Eckelementen" λ, η_a die Koeffizienten a_{ik} in Teilsystem A_{ik} von entsprechendem Typus zusammengefaßt [§)]. Wegen der Schiefsymmetrie ist

$$A_{ik} + A'_{ki} \equiv 0 \text{ mod. } \ell\,,$$

wenn A'_{ki} das transponierte System zu A_{ki} ist.

Wegen $|L| \not\equiv 0$ mod. ℓ sind auch die Determinanten der $A_{i,e+1-i}$ der Nebendiagonale, sowie die Eckelemente $a_{0\,e+1}$ und $a_{e+1,0}$ mod. ℓ von Null verschieden. Daher läßt sich, ganz entsprechend, wie in Q. N. R. (Substitution ( )) das Fundamentalsystem so transformieren, daß die zugehörige Matrix übergeht in:

$$
\begin{pmatrix}
0 & \overline{A}_{01} & \overline{A}_{02} & \ldots & \ldots & \ldots & \overline{A}_{0e} & 1 \\
\overline{A}_{10} & \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} & \ldots & \ldots & \ldots & E & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & \iddots & \iddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \ddots & E & \iddots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & -E & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \iddots & \iddots & & & & \vdots \\
\overline{A}_{e0} & -E & \iddots & & & & \ddots & \vdots \\
-1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0
\end{pmatrix}
$$

§) Siehe Q. N. R., S. ...

Dabei bezeichnet E die f–reihige Einheitsmatrix. (Die Anzahl e der in der Nebendiagonale stehenden $\pm E$ ist wegen $e = e_0(\ell-1)$ stets gerade; es tritt also, anders wie in Q. N. R., hier ein " Zentralglied" in der Matrix L auf).

Durch weitere Transformation des Fundamentalsystems, entsprechend zu Q. N. R. ( ), läßt sich dann die Matrix ohne weiteres auf die Normalform bringen:

$$
\left(\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & E & 0 \\
 & \vdots & \ddots & & & \iddots & \iddots & \vdots \\
 & \vdots & & \ddots & E & \iddots & & \vdots \\
 & \vdots & & -E & \ddots & & & \vdots \\
 & \vdots & \iddots & \iddots & & & & \vdots \\
0 & -E & \iddots & & & & \ddots & \vdots \\
-1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{array}\right) \tag{4.9}
$$

Die genannten beiden Transformationen sind genau dieselben, wie in Q. N. R., mit dem einen, ganz unwesentlichen Unterschied, daß hier die zu transformierende Matrix *schief* symmetrisch ist [¶], und mit der schon erwähnten bedeutenden Vereinfachung durch das identische Verschwinden der Hauptdiagonalglieder a_{ii}.

Es ergibt sich somit der Satz:

Satz 4: *Es läßt sich ein Fundamentalsystem* [‖]

$$\lambda = \eta_0\,;\ \eta_{ik}\,;\ \eta_a = \eta_{m+1}\,;\ \left(\begin{array}{ccc} i & = & 1,2,\ldots,e \\ k & = & 1,2,\ldots,f \end{array}\right)$$

für die multiplikative Darstellung in $k(\mathfrak{l})$ *so wählen, daß für zwei beliebige, durch dieses System dargestellte Zahlen*

$$\alpha = \eta_0^{x_0}\prod_{i,k}\eta_{ik}^{x_{ik}}\eta_{m+1}^{x_{m+1}}\alpha_0^{\ell};\ \beta = \eta_0^{y_0}\prod_{i,k}\eta_{ik}^{y_{ik}}\eta_{m+1}^{x_{m+1}}\beta_0^{\ell};\ (0 \leq x, y \leq \ell-1)$$

[¶] Für $\ell = 2$ fallen die Begriffe schiefsymmetrisch und symmetrisch mod. 2 zusammen. Natürlich hätte man in Q. N. R. auch immer von schiefsymmetr. Matrizen reden können. Die Schiefsymmetrie ist natürlich invariant gegen die in Frage kommenden +++gredienten Transformationen $P'LP$.

[‖] und zwar ein solches genau von der Beschaffenheit wie stets in H. H., Z. V.

aus $k(\mathfrak{l})$ das Hilbertsche Normenrestsymbol durch die Gleichung gegeben wird

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{L(x|y)} \; ; \quad (\textit{mit einem festen } \zeta)$$

Dabei bedeutet $L(x|y)$ die schiefsymmetrische Bilinearform mit der Koeffizientenmatrix (9.), es ist also

$$L(x|y) \;=\; x_0 y_{m+1} - x_{m+1} y_0 + \sum_{i=1}^{\frac{\ell}{2}} \sum_{k=1}^{f} (x_{i,k} y_{e+1-i,k} - x_{e+1-i,k} y_{i,k}) \,.$$

Dies Resultat stellt die gewünschte Verallgemeinerung des Ergebnisses von Q. N. R. auf den Fall eines ungeraden ℓ dar.

4.) Nachdem nach Satz 3 der Wert des Hilbertschen Normenrestsymbols für alle Zahlen α, β aus $k(\mathfrak{l})$ bis auf die einmalige Auswahl von ζ eindeutig festgelegt ist, entsteht natürlich die Frage, ob und wie diese letzte Unstimmigkeit noch zu beseitigen ist. Naturgemäß läßt sich in dieser Richtung durch alleinige Betrachtung eines einzigen Primteilers $\mathfrak{l}$ nicht erreichen, da in $k(\mathfrak{l})$ eine sinngemäße Heraushebung eines bestimmten ζ unmöglich ist. Auch wenn man alle Primteiler des Körpers k gleichzeitig betrachtet, wird natürlich eine eindeutige Auswahl von ζ nicht möglich sein, da ja die Definition des Symbols lediglich auf Teilbarkeitsbeziehungen, nicht auf Größenbeziehungen gegründet, und folglich auch für die Gesamtheit aller Symbole jedes ζ gleichberechtigt ist. Es kann sich vielmehr nur um Festsetzung von Relationen handeln, die zwischen den Symbolwerten für die einzelnen Primteiler bestehen sollen, wenn ein beliebiges, aber für alle Primteiler festes ζ zugrundegelegt wird. Für die zu ℓ primen $\mathfrak{p}$ ist dies in folgender Weise leicht zu erreichen:

Sei π eine Primzahl für $\mathfrak{p}$ und ω eine in $k(\mathfrak{p})$ enthaltene, primitive ℓ^n–te Einheitswurzel mit größtmöglichem n (≥ 1). Dann bestehen die eindeutigen Darstellungen für irgendzwei Zahlen α, β aus k:

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha &=& \pi^a \omega^b \alpha_0^\ell \; (\mathfrak{p}) \\ \beta &=& \pi^c \omega^d \beta_0^\ell \; (\mathfrak{p}) \end{array}\right\} \qquad (0 \leq a, b, c, d \leq \ell - 1)$$

Es kann dann [**)]

$$\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right) = \zeta^{\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}}$$

gesetzt werden. Man bestimmt nun einfach die zugrundegelegte ℓ^n–te Einheitswurzel ω so, daß $\omega^{\ell^{n-1}}$ gerade das festgewählte ζ ist, oder auch, was auf dasselbe herauskommt, setzt bei irgendwie gewähltem ω das Symbol

$$\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right) = \zeta^{r\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}}$$

wenn $\omega^{\ell^{n-1}}$ gleich der Potenz ζ^r des festgewählten ζ ist [††]. Hierdurch ist also vermöge der festen Wahl von ζ und der Beziehungen von α,β zu *diesem* ζ für *jedes* $\mathfrak{p}$ eine gewisse Verbindung zwischen den Symbolwerten für die einzelnen $\mathfrak{p}$ geschaffen.

Für die Primteiler $\mathfrak{l}_i$ von $\ell = \mathfrak{l}_1^{e_1}\dots\mathfrak{l}_z^{e_z}$ ist etwas Ähnliches deshalb nicht möglich, weil in einem Fundamentalsystem für die multiplikative Darstellung in $k(\mathfrak{l})$ im allgemeinen kein mit ζ in einfacher Beziehung stehende Größe enthalten ist. Die Normierung der Symbole $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}_i}\right)$ läßt sich jedoch auf Grund der eben getroffenen Normierung für die zu ℓ primen $\mathfrak{p}$ durchführen, indem man fordert, daß das über *alle* Primteiler $\mathfrak{w}$ von k erstreckte Produkt

$$\prod_{\mathfrak{w}}\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{w}}\right) = 1 \tag{4.10}$$

sein soll. Wegen der Unabhängigkeit der Werte der Zahlen aus k für die einzelnen Primteiler $\mathfrak{l}_i$ von ℓ kann diese Forderung, *wenn überhaupt*, sicher die Normierung für *jeden einzelnen* Primteiler $\mathfrak{l}_i$ liefern. Sie kann nämlich, wie eine leichte Überlegung zeigt, durch die Forderungen

$$\prod_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\alpha_i,\beta}{\mathfrak{p}}\right)\cdot\left(\frac{\alpha_i,\beta}{\mathfrak{l}_i}\right) = 1\ ;\quad (i = 1,2,\dots z) \tag{4.11}$$

ersetzt werden, wo jedesmal α_i alle solchen Zahlen aus k bedeutet, die nach genügend hohen Potenzen der von $\mathfrak{l}_i$ verschiedenen Primteiler $\mathfrak{l}_i$ einer ℓ–ten

[**] Siehe K. Hensel, Normenreste,... Ann 85, S. 1.

[††] Diese Bestimmung ist offensichtlich dieselbe, wie bei Hilbert–Furtwängler....

Potenz kongruent sind, (sodaß die Symbole für die $\mathfrak{l}_i$ in (10.) identisch 1 sind), und auf Grund von (11.) werden dann offenbar die Symbole für jedes einzelne $\mathfrak{l}_i$ in eindeutiger Weise normiert.

Der Nachweis, daß (11.) und der im vorhergehenden gewonnenen Definition der Symbole $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}_i}\right)$ vereinbar ist, kommt wegen der Gültigkeit des Zerlegungs– und Vertauschungssatzes (s. (3.) – (5.) oben) auch für die zu ℓ primen $\mathfrak{p}$ auf den Nachweis hinaus, daß (11.) nur mit der "vorläufigen Definition" (2.) von $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}_i}\right)$ in Einklang steht, d. h. daß für alle α_i der angegebenen Beschaffenheit gilt:

$$(4.12) \quad \text{Wenn } \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\alpha_i,\beta}{\mathfrak{p}}\right) = 1\,, \text{ ist auch } \left(\frac{\alpha_i,\beta}{\mathfrak{l}_i}\right) = 1 \text{ und umgekehrt.}$$

Der Nachweis dieser Tatsache (12.) bildet den Hauptpunkt beim Beweise der unter dem Namen: "*Hilbertsches allgemeines Reziprozitätsgesetz*" bekannten Formel (10.)Er ist allgemein zuerst von Furtwängler, neuerdings auf einfacherem, aber im Prinzip übereinstimmendem Wege von Takagigeführt und beruht auf dem Beweis spezieller, einfachster Teile des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes und seiner beiden Ergänzungssätze in k. Beide Beweise benutzen in wesentlichen Punkten transzendente Hilfsmittel und scheinen mir einer rein arithmetischen Behandlung auf Grund der hier eingeschlagenen Henselschen Methoden nicht fähig zu sein [‡‡)].

5.) (Hinter 3.) einzuschalten)
Aus der Form (8a.) der Matrix L für ein beliebiges Fundamentalsystem folgt sofort, daß zu irgendzwei eine Linearform $L_0(x|y)$ mit der f reihigen Matrix $A_{i,e+1-i}$ nicht (mod. ℓ) verschwindender Determinante gehört, sodaß für irgendzwei Einseinheiten α, β, die mindestens den Grad h bzw. h' haben, also eine Darstellung

$$\left.\begin{array}{lcll} \alpha & = & \eta_{i1}^{x_1}\ldots\eta_{if}^{x_f}\overline{\eta} & (\mathfrak{l}) \\ \beta & = & \eta_{e+1-i,1}^{y_1}\ldots\eta_{e+1-i,f}^{y_f}\overline{\overline{\eta}} & (\mathfrak{l}) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (0 \le x_i, y_i \le \ell-1 \\ \overline{\eta},\overline{\overline{\eta}} \text{ von mindestens} \\ (h+1)\text{–ten, } (h'+1)\text{–} \\ \text{tem Grade)} \end{array}$$

‡‡) Vgl. das in der Einleitung meiner Arbeit: "Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in algebraischen Zahlkörpern" a. S. ... Gesagte
(Crelle 153, Bd 1/2.).

besitzen,

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{L_0(x|y)}$$

gilt. Wegen des Nichtverschwindens der Determinante $|A_{i,e+1-i}| = |L_0|$ kann dann genau, wie bei Satz 3, die *eindeutige* Bestimmtheit von L_0 bis auf einen konstanten Faktor $c \not\equiv 0 \bmod \ell$ geschlossen werden.

Basissysteme $\eta_{i1}, \ldots, \eta_{if}$ und $\eta_{e+1-i,1}, \ldots, \eta_{e+1-i,f}$ von zu ℓ primen "komplementären Graden" h und $h' = \frac{e\ell}{\ell-1} - h$.

4.4 30.06.1923, Manuskript Reziproz.Gesetz

Das allgemeine Reziprozitätsgesetz und seine Ergänzungssätze in beliebigen algebraischen Zahlkörpern für gewisse nicht–primäre Zahlen.

Von Herrn Helmut Hasse in Kiel.

Das allgemeinste Reziprozitätsgesetz für Potenzreste mitPrimzahlexponenten ℓ in einem beliebigen Oberkörper k des Kreiskörpers k_ζ der ℓ–ten Einheitswurzel ζ läßt sich unter Verwendung des Hilbertschen Normenrestsymbolsin der einfachen Formel

$$\prod_{\mathfrak{w}} \left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{w}}\right) = 1 \tag{4.1}$$

zum Ausdruck bringen, die zuerst von Hilbertaufgestellt und von Furtwängler [*)] allgemein bewiesen wurde. Dabei bedeuten α, β zwei beliebige (ganze oder gebrochene) Zahlen $\neq 0$ aus k und $\mathfrak{w}$ durchläuft alle Primteiler $\mathfrak{p}$ von k sowie die den reellen zu k konjugierten $k^{(i)}$ zugeordneten "Primstellen" $\mathfrak{p}_\infty^{(i)}$.[†)] Da man die nur für $\ell = 2$ von 1 verschiedenen "Vorzeichensymbole" durch ihre Exponentialdarstellung:

$$\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}_\infty^{(i)}}\right) = (-1)^{\frac{\mathrm{sgn}.\alpha^{(i)}-1}{2}\cdot\frac{\mathrm{sgn}.\beta^{(i)}-1}{2}}$$

ohne weiteres beherrscht, soll im folgenden der Einfachheit halber, ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit der anzustellenden Betrachtungen α im Falle $\ell = 2$ als total positive Zahl aus k vorausgesetzt werden, sodaß die Primstellen $\mathfrak{p}_\infty^{(i)}$ in (1.) fortgelassen werden können.

Dann lassen sich für beliebiges ℓ mit der Zerlegung in k:

$$\ell = \mathfrak{l}_1^{e_1}\ldots\mathfrak{l}_z^{e_z}\ ; \quad (\mathfrak{l}_i \text{ vom Grade } f_i)$$

*) Ph. Furtwängler, Reziprozitätsgesetze I,II,III, Ann 67, 72, 74.

†) Siehe Hasse, Quadr. Formen in algebr. Körpern, Crelle 153, S. ...

die aus (1.) folgenden, unter dem Namen allgemeines Reziprozitätsgesetz, erster und zweiter Ergänzungssatz bekannten Reziprozitätsbeziehungen in k in folgender Form schreiben:

$$\text{(4.2)} \qquad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \prod_{i=1}^{z}\left(\frac{\beta,\alpha}{\mathfrak{l}_i}\right); \quad (\alpha,\beta \text{ prim zu } \ell \text{ und zueinander}),$$

$$\text{(2a.)} \qquad \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right) = \prod_{i=1}^{z}\left(\frac{\alpha,\epsilon}{\mathfrak{l}_i}\right); \quad (\alpha \text{ prim zu } \ell,\ (\varepsilon) = \mathfrak{a}^{\ell}),$$

$$\text{(2b.)} \qquad \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) = \prod_{i=1}^{z}\left(\frac{\alpha,\lambda}{\mathfrak{l}_i}\right); \quad (\alpha \text{ prim zu } \ell,\ (\lambda) = \prod_{i=1}^{z}\mathfrak{l}_i^{a_i}\cdot\mathfrak{a}^{\ell}).$$

Dabei bedeuten die Symbole links verallgemeinerte Legendresche Restsymbole für ℓ–te Potenzreste, $\mathfrak{a}^{\ell}$ bezeichnet eine beliebige ℓ–te Idealpotenz. Die rechts auftretenden Normenrestsymbole für die Teiler $\mathfrak{l}_i$ von ℓ beherrscht man bisher abgesehen von speziellen Fällen (Eisensteinsche Reziprozitätsbeziehungen im Kreiskörper k_ζ) nur insofern, als man Bedingungen für α angeben kann, unter denen sie sicher gleich 1 sind. Diese Bedingungen faßt man zusammen in den Definitionen der “primären” und “hyperprimären” Zahlen. Bezeichnet $\mathfrak{l}_0 = (1-\zeta) = (\lambda_0)$ den Primteiler von $\mathfrak{l}$ in k_ζ,[‡)] so nennt man eine Zahl α aus k primär bezw. hyperprimär, wenn sie zu ℓ prim ist und der Bedingung

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \xi^{\ell} \bmod \ell\mathfrak{l}_0 \\ \text{bezw.} \quad \alpha &\equiv \xi^{\ell} \bmod \ell\mathfrak{l}_0\mathfrak{l}_1\ldots\mathfrak{l}_z \end{aligned}$$

genügt (und für $\ell = 2$ total positiv ist). Für solche primäre, bezw. hyperprimäre α spezialisiert, lauten dann die Gesetze (2.) – (2b.):

$$\text{(4.3)} \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = 1, \text{ wenn } \alpha,\beta \text{ prim zu } \ell, \text{ zueinander } \textit{und } \alpha \textit{ primär},$$

$$\text{(3a.)} \qquad \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right) = 1, \text{ wenn } \alpha \textit{ primär}, (\varepsilon) = \mathfrak{a}^{\ell},$$

$$\text{(3b.)} \qquad \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) = 1, \text{ wenn } \alpha \textit{ hyperprimär}, (\lambda) = \prod_{i=1}^{z}\mathfrak{l}_i^{a_i}\cdot\mathfrak{a}^{\ell},$$

[‡)] Für $\ell = 2$ ist im folgenden stets $\zeta = -1$, also $\lambda_0 = 2$, $\mathfrak{l}_0 = 2$ zu setzen.

Nun sind von Herrn Hensel und mir in einer Reihe kürzlich erschienener Arbeiten [§)] Methoden dargelegt, die gestatten, den Wert des Normenrestsymbols $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}_i}\right)$ in expliziter Form darzustellen. Die Anwendung der Ergebnisse dieser Arbeiten führt zu folgender Ausdehnung der bisher allein explizit bekannten Spezialfälle (3.) – (3b.) der Reziprozitätsgesetze (2.) – (2b.) auf gewisse nicht primäre Zahlen:

$$(4.4)\qquad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \zeta^{S\left(\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\ell\lambda_0}\right)}, \text{ wenn } \left\{\begin{array}{lcl} \alpha & \equiv & 1 \bmod \ell \\ \beta & \equiv & 1 \bmod \mathfrak{l}_0 \end{array}\right\}$$

$$\text{und } (\alpha,\beta) = 1,$$

$$(4a.)\qquad \left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) = \zeta^{S\left(\frac{\alpha-1}{\ell}\right)}, \text{ wenn } \alpha \equiv 1 \bmod \ell,$$

$$(4b.)\qquad \left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \zeta^{S\left(\frac{\alpha-1}{\ell\lambda_0}\right)}, \text{ wenn } \alpha \equiv 1 \bmod \ell\mathfrak{l}_0\,.$$

Dabei bedeutet S die Spur in k. (4.) ist eine direkte Verallgemeinerung von (3.), (4a.) ist nicht so allgemein wie (3a.), da nur $\varepsilon = \zeta$ berücksichtigt wird, die entsprechende Verallgemeinerung von (3a.) ist vielmehr als in der Hauptformel (4.) für (α) oder $(\beta) = (\varepsilon) = \mathfrak{a}^\ell$ mit enthalten anzusehen. Ebenso ist (4b.) nicht so allgemein wie (3b.), da nur $\lambda = \ell$ berücksichtigt wird, die entsprechende Verallgemeinerung von (3b.) auf beliebiges λ ist mir bisher nicht gelungen.

Die in den Bedingungen bei (4.), (4a.) für α und β auftretenden Forderungen: “$\equiv 1$” lassen sich ersichtlich durch die allgemeineren: “kongruent einer zu ℓ primen rationalen Zahl” ersetzen, wenn nur in den Exponenten von ζ dann $\alpha^{\ell-1}$ und $\beta^{\ell-1}$ und in (4a.) links $\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)^{-1}$ geschrieben wird. In dieser Form

$$(4c.)\qquad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \zeta^{S\left(\frac{\alpha^{\ell-1}-1}{\ell}\cdot\frac{\beta^{\ell-1}-1}{\lambda_0}\right)}, \text{ wenn } \left\{\begin{array}{lcl} \alpha & \equiv & a \bmod \ell \\ \beta & \equiv & b \bmod \mathfrak{l}_0 \end{array}\right\},$$

$$(\alpha,\beta) = 1$$

ist (4.) eine unmittelbare Verallgemeinerung des bekannten Eisensteinschen Reziprozitätsgesetzes in k_ζ ,(ℓ ungerade).

[§)]..... siehe +++ in +++ Arbeit, S. 1. Z. V. und H. H. haben dieselbe +++ +++ +++ +++ und die +++ Arbeit zitiert.

Für diesen Körper spezialisiert folgt nämlich aus (4c.) für eine rationale, zu ℓ prime Zahl a und eine beliebige zu ℓ prime Zahl:

$$\beta = b_0 + b_1\lambda_0 + \cdots + b_{\ell-2}\lambda_0^{\ell-2}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} &= \zeta^{S\left(\frac{a^{\ell-1}-1}{\ell}\cdot\frac{\beta^{\ell-1}-1}{\lambda_0}\right)} = \zeta^{\frac{a^{\ell-1}-1}{\ell}\cdot S\left(\frac{b_0^{\ell-1}+(\ell-1)b_0^{\ell-2}b_1\lambda_0+\cdots-1}{\lambda_0}\right)} \\ &= \zeta^{\frac{a^{\ell-1}-1}{\ell}\cdot S\left(\frac{b_0^{\ell-1}-1}{\lambda_0}-b_0^{\ell-2}b_1\right)} = \zeta^{\frac{a^{\ell-1}-1}{\ell}S(-b_0^{\ell-2}b_1)} = \zeta^{\frac{a^{\ell-1}-1}{\ell}\cdot b_0^{\ell-2}b_1},\end{aligned}$$

ein schon von Eisenstein gefundenes Resultat ¶), das für semiprimäres β, d. h. $b_1 \equiv 0 \bmod \ell$, übergeht in

$$\left(\frac{a}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{a}\right)^{-1} = 1, \text{ wenn } \left\{\begin{array}{l} a \text{ rationale} \\ \beta \text{ semiprimäre} \end{array}\right\} \text{ zu } \ell \text{ prime Zahl aus } k_\zeta,$$

d. h. die unter dem Namen Eisensteinsches Reziprozitätsgesetz bekannte Formel. Die eigentümliche Unsymmetrie in diesem Gesetz bezüglich der Bedingungen für a und β findet sich auch in meiner Verallgemeinerung (4.), wo α einer Bedingung mod ℓ, β einer solchen nur mod $\mathfrak{l}_0$ genügen muß, und erscheint somit als in der Natur der Sache liegend.

(4a.) ist ersichtlich nichts Neues, da man für $\alpha \equiv 1 \bmod \ell$ leicht

$$S\left(\frac{\alpha-1}{\ell}\right) \equiv \frac{N(\alpha)-1}{\ell} \text{ mod. } \ell$$

nachweist ‖) und andererseits aus den Definition des Symbols $\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)$ sofort

$$\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) = \zeta^{\frac{N(\alpha)-1}{\ell}}$$

folgt (k ist für ungerades ℓ total imaginär, also $N(\alpha)$ positiv, für $\ell = 2$ sollte α total positiv sein). Ich habe jedoch (4a.) und auch (4b.) in

---

¶) Eisenstein, Crelle 39, S. 361 oben. Es muß an jener Stelle wohl $\alpha = \frac{A'(1)}{A(1)}$ heißen, da der Exponent α_1 von A (unser β) in der Darstellung $A = b_0(1-\eta)^{\alpha_1}(1-\eta^2)^{\alpha_2}\cdots$ sich aus $A = A(\zeta) = b_0 + b_1\eta + \cdots$ zu $\alpha_1 \equiv -\frac{b_1}{b_0} \equiv +\frac{A'(1)}{A(1)}$ ergibt. ($\eta = 1-\zeta$) Damit folgt die Identität mit meiner Formel unmittelbar.

‖) Siehe unten, S. ...

dieser Gestalt besonders hervorgehoben, wegen der unmittelbar ins Auge springenden Analogie des Formelsystems (4.) – (4b.) mit dem gewöhnlichen quadratischen Reziprozitätsgesetzim rationalen Körper und seinen beiden Ergänzungssätzen. In der Tat gehen jene Formeln für $\ell = 2$ und den rationalen Grundkörper über in: **)

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{-1} = (-1)^{\frac{a-1}{2}\,\frac{b-1}{2}}, \qquad \text{wenn } \left\{\begin{array}{ccc} a & \equiv & 1 \bmod 2 \\ b & \equiv & 1 \bmod 2 \end{array}\right\},$$

$$(a,b) = 1\,,$$

$$\left(\frac{-1}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}}, \qquad \text{wenn } a \equiv 1 \bmod 2\,,$$

$$\left(\frac{2}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{4}}, \qquad \text{wenn } a \equiv 1 \bmod 4\,,$$

also bis auf den nicht ganz vollständigen zweiten Ergänzungssatz in das bekannte quadratische Reziprozitätsgesetz für das Jacobische Symbol.

Beweis *für (4.) und (4a.).*

Sei wie in meinen früheren Arbeiten $\mathfrak{l}$ ein Primteiler von ℓ in k, der Ordnung e vom Grade f, λ eine Primzahl für $\mathfrak{l}$ aus $k(\mathfrak{l})$ und

$$-\ell = \lambda^e\omega^g + \text{höhere Potenzen von } \lambda\,; \quad \left(\begin{array}{c}\omega \text{ primitive } (\ell^f-1)\text{te} \\ \text{Einheitswurzel aus } k(\mathfrak{l})\,.\end{array}\right)$$

Ferner seien mit $S_\mathfrak{l}$, $N_\mathfrak{l}$ Spur und Norm im Körper $k(\mathfrak{l})$ und mit $s_\mathfrak{l}$, $n_\mathfrak{l}$ Spur und Norm in dem zu $k(\mathfrak{l})$ gehörigen Koeffizientenkörper f–ten Grades (Körper der primitiven $(\ell^f - 1)$ten Einheitswurzel ω über dem Körper der rationalen ℓ–adischen Zahlen) bezeichnet.

Ich betrachte dann Zahlen α, β, die für den Bereich von Einseinheiten nur zwei bestimmten, zu ℓ primen und zueinander "komplementären" Graden h und $h' = \frac{e\ell}{\ell-1} - h$ sind:

$$\alpha = 1 + u\lambda^h \quad (\mathfrak{l})\,,$$
$$\beta = 1 + v\lambda^{h'} \quad (\mathfrak{l})\,.$$

**) Es werde an die Voraussetzung $a > 0$ für $\ell = 2$ erinnert.

Nach den Ausführungen von Z. V., S. ... ergibt sich ohne weiteres, daß das Symbol $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right)$ für solche α, β dann und nur dann gleich 1 ist, wenn die Kongruenz

$$s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{uv}{\omega^{\frac{e\ell}{\ell-1}}}\right) \equiv 0 \bmod \ell$$

besteht. Denn dann und nur dann erfordert (+++) bei der Darstellung durch das zu $k(\mathfrak{l}; \sqrt[\ell]{\beta})$ gehörige, für den Normenrestcharakter der Zahlen (+++) maßgebendeFundamentalsystem dessen "kritische Einseinheit" vom Grade $h = \frac{e\ell}{\ell-1} - h'$ nicht [††]. Dies gilt offensichtlich a fortiori auch in dem Falle, daß α oder β oder beide von höherem als dem h–ten, bzw. h'–ten Grade sind, also u bzw. v durch $\mathfrak{l}$ teilbar sind, da dann $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right) = 1$ und $s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{uv}{\omega^{\frac{e\ell}{\ell-1}}}\right) \equiv 0 \bmod \mathfrak{l}$ ist.

Sind dann auch

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha_i &=& 1 + u_i\lambda^h \\ \beta_i &=& 1 + v_i\lambda^{h'} \end{array}\right\} ; \quad (i = 1, 2, \ldots, f)$$

Basissysteme von Einseinheiten für die Grade h und h' und

$$\begin{array}{rcl} \alpha &=& \alpha_1^{x_1} \ldots \alpha_f^{x_f} \xi \,; \quad (0 \le x_i \le \ell - 1 \,; \quad \xi \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}^{h+1}) \\ \beta &=& \beta_1^{y_1} \ldots \beta_f^{y_f} \eta \,; \quad (0 \le y_i \le \ell - 1 \,; \quad \eta \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}^{h'+1}) \end{array}$$

die Darstellungen irgendzweier α, β der angegebenen Beschaffenheit durch diese Basissysteme, also

$$\begin{array}{rcll} u &\equiv& u_1x_1 + \cdots + u_fx_f & \bmod \mathfrak{l}, \\ v &\equiv& v_1y_1 + \cdots + v_fy_f & \bmod \mathfrak{l}, \end{array}$$

so hat der Ausdruck

$$\begin{aligned} s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{uv}{\omega^{\frac{e\ell}{\ell-1}}}\right) &\equiv s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{(u_1x_1 + \cdots + u_fx_f)(v_1y_1 + \cdots + v_fy_f)}{\omega^{\frac{e\ell}{\ell-1}}}\right) \\ &\equiv \sum_{i,j=1}^{f} x_iy_j\, s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{u_iv_i}{\omega^{\frac{e\ell}{\ell-1}}}\right) \equiv \sum_{i,j=1}^{f} x_iy_j\, b_{ij} \equiv \mathcal{M}_0(x|y) \bmod \ell \end{aligned}$$

[††] Siehe hierzu Hensel–Hasse, Normenreste...

die Eigenschaft, für alle und nur die Exponentensysteme x_i, y_i mod. ℓ zu verschwinden, für die die zugehörigen α, β der Bedingung

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = 1$$

genügen. Nach einem entsprechenden Schluß, wie in H. N. R. Satz 3 ist also die Bilinearform $\mathcal{M}_0(x|y)$ bis auf einen konstanten Faktor mit der nach H. N. R., S. ... existierenden, den beiden komplementären Graden h, h' zugeordneten Bilinearform $L_0(x|y)$ identisch, für die

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{L_0(x|y)}$$

gilt, sodaß demnach

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{cs_{\mathfrak{l}}\left(\frac{uv}{\omega^{\frac{e\ell}{\ell-1}}}\right)} \tag{4.5}$$

mit einem für alle genannten α, β festen $c \not\equiv 0$ mod. ℓ gesetzt werden kann. Dabei ist ζ eine ein– für allemal fest gewählte primitive ℓ–te Einheitswurzel, die im folgenden stets für die Darstellung der Potenzrest– und Normenrestcharaktere zugrunde gelegt wird.

Der Exponent rechts in (5.) läßt sich in folgender Weise ausdrücken: Es ist ‡‡)

$$\frac{uv}{\omega^{\frac{e\ell}{\ell-1}}} = \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\lambda^{h+h'}\omega^{\frac{e\ell}{\ell-1}}} = \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\lambda^{\frac{e\ell}{\ell-1}}\omega^{\frac{e\ell}{\ell-1}}} \equiv \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{(-\ell)^{\frac{\ell}{\ell-1}}} \mod \mathfrak{l}$$
$$\equiv \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{(-\ell)\cdot \sqrt[\ell-1]{-\ell}} \mod \mathfrak{l}$$

Nun folgt aus

$$\ell = (1-\zeta)(1-\zeta^2)\cdots(1-\zeta^{\ell-1}) = (1-\zeta)^{\ell-1}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{\ell-1}\,,$$

wo die Einheit

$$\varepsilon_i = \frac{1-\zeta^i}{1-\zeta} = 1+\zeta+\cdots+\zeta^{i-1} \equiv i \mod \mathfrak{l}_0$$

‡‡) das folgende gilt natürlich wie alle Behauptungen dieser Arbeit auch für $\ell = 2$, wo es trivial ist. Siehe S. ... Ann ...

ist, daß

$$\ell \equiv (1-\zeta)^{\ell-1} 1 \cdot 2 \cdots (\ell-1) \equiv -(1-\zeta)^{\ell-1} \bmod \mathfrak{l}_0^{\ell}$$

ist. Daraus ergibt sich, daß die in $k(\mathfrak{l})$ stets vorhandene

$$\sqrt[\ell-1]{-\ell} \equiv c'(1-\zeta) \bmod \mathfrak{l}_0\mathfrak{l} \equiv c'\lambda_0 \bmod \mathfrak{l}_0\mathfrak{l}$$

ist, wo c' eine naturgemäß nicht näher bestimmbare, mod. ℓ von Null verschiedene Konstante ist, sodaß

$$\frac{uv}{\omega^{\frac{e\ell}{\ell-1}}} \equiv -\frac{1}{c'} \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\ell\lambda_0} \bmod \mathfrak{l}$$

und somit

$$s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{uv}{\omega^{\frac{e\ell}{\ell-1}}}\right) \equiv -\frac{1}{c'} s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\ell\lambda_0}\right) \bmod \ell$$

ist. Daher wird (5.) schließlich zu

$$(4.6) \qquad \left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{-\frac{c}{c'} s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\ell\lambda_0}\right)} = \zeta^{c'' s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\ell\lambda_0}\right)}, \qquad (c'' \not\equiv 0 \bmod \ell)$$

sodaß also der vorher in $\sqrt[\ell-1]{-\ell}$ stehende, unbestimmte rationale Zahlfaktor c' in die nunmehr allein noch zu bestimmende Konstante c'' hineingegangen ist. Gleichzeitig ist durch das Hereinschaffen eines *bestimmten* $\zeta = 1 - \lambda_0$ in den Exponenten*) und Eliminierung aller noch willkürlicher Wahl unterworfenen Elemente aus demselben, die Brücke geschaffen, um mittels des Hilbertschen Reziprozitätsgesetzes (1.)die Konstante c'' zu bestimmen. Hierzu hat man nämlich jetzt nur *ein* spezielles Paar α, β einzusetzen und die linke Seite von (6.) auf Grund von (1.) auszurechnen.

Ich führe dies in dem mir bisher allein zugänglichen Fall $h = e$, $h' = \frac{e}{\ell-1}$ aus, indem ich vorläufig e (und damit $\frac{e}{\ell-1}$) prim zu ℓ voraussetze. α und β können dann in der Gestalt

$$\alpha = 1 + u\ell$$
$$\beta = 1 + v\lambda_0$$

angesetzt werden. Ich wähle dann speziell $v = -1$ also $\beta = \zeta$ und bestimme die zu $\mathfrak{l}$ prime Zahl u aus k zunächst so, daß

$$s_{\mathfrak{l}}(u) \not\equiv 0 \bmod \ell$$

*) nämlich desselben, das als Basis benutzt wird.

ist. Weiter wähle ich eine zu u mod $\mathfrak{l}$ kongruente Zahl u' für die also ebenfalls

$$s_{\mathfrak{l}}(u') \not\equiv 0 \mod \ell$$

gilt, aus k so, daß

$$\pi \;=\; 1 + u'\ell \equiv 1 + u\ell \bmod \mathfrak{l}^{\frac{e\ell}{\ell-1}+1}, \tag{4.7}$$

$$\pi \;=\; 1 + u'\ell \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}_i^{\mathsf{N}}\;; \quad (\mathsf{N}\text{ hinreichend groß}) \tag{4.8}$$

wird, wo $\mathfrak{l}_i$ jeden anderen Teiler von ℓ außer $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1$ bezeichnet, und π eine (total positive) Primzahl für ein Haupt– und Primideal $\mathfrak{p}$ ersten Grades aus k, also $N(\pi) = N(\mathfrak{p}) = p$ eine positive rationale Primzahl ist. Dies ist nach dem bekannten Satz von der arithmetischen Progression stets möglich. Dann ist nach (7.) und (6.):

$$\left(\frac{\pi,\zeta}{\mathfrak{l}}\right) \;=\; \zeta^{c''s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{(\pi-1)(\zeta-1)}{\ell\lambda_0}\right)} \;=\; \zeta^{-c''s_{\mathfrak{l}}(u)}$$

ferner nach (8.)

$$\left(\frac{\pi,\zeta}{\mathfrak{l}_i}\right) = 1, \quad \text{wenn } \mathsf{N} \text{ groß genug}\,,$$

$$\left(\frac{\pi,\zeta}{\mathfrak{q}}\right) = 1, \quad \text{wenn } \mathfrak{q} \text{ irgendeinen zu } \ell \text{ primen,}$$

von $\mathfrak{p}$ verschiedenen Primteiler von k bedeutet.

Schließlich

$$\left(\frac{\pi,\zeta}{\mathfrak{p}}\right) \;=\; \left(\frac{\zeta}{\mathfrak{p}}\right)^{-1} \;=\; \zeta^{-\frac{N(\mathfrak{p})-1}{\ell}} \;=\; \zeta^{-\frac{N(\pi)-1}{\ell}}.$$

Aus (1.) folgt also:

$$\frac{N(\pi)-1}{\ell} + c''s_{\mathfrak{l}}(u') \equiv 0 \bmod \ell\,. \tag{4.9}$$

Nun ist

$$N(\pi) \;=\; N_{\mathfrak{l}_1}(\pi)N_{\mathfrak{l}_2}(\pi)\cdots N_{\mathfrak{l}_z}(\pi) \qquad (\ell)\,,$$

ferner nach (8.)

$$N_{\mathfrak{l}_i}(\pi) \equiv 1 \bmod \ell^{\overline{\mathsf{N}}}, \quad \text{wo } \overline{\mathsf{N}} \text{ mit } \mathsf{N} \text{ beliebig groß wird, also jedenfalls } \overline{\mathsf{N}} \geq 2 \text{ angenommen werden darf,}$$

daher

$$N(\pi) \equiv N_{\mathfrak{l}_1}(\pi) \;=\; N_{\mathfrak{l}}(\pi) \bmod \ell^2$$

Weiter ist $N_{\mathfrak{l}}(\pi)$ das Produkt von $\pi \,=\, 1 + u'\ell$ mit seinen ef konjugierten in Bezug auf $k(\mathfrak{l})$. Die f konjugierten zu u' in Bezug auf den Koeffizientenkörper sind mod $\mathfrak{l}$ kongruent $u', u'^{\ell}, \dots\; u'^{\ell^{f-1}}$, und die sämtlichen ef konjugierten zu u' in Bezug auf $k(\mathfrak{l})$ zerfallen in f Gruppen von je e zu $u', u'^{\ell}, \dots\;, u'^{\ell^{f-1}}$ mod $\mathfrak{l}$ kongruenten. Es ist daher

$$\begin{aligned} N(\pi) \equiv N_{\mathfrak{l}}(\pi) &\equiv \Big[(1+u'\ell)(1+u'^{\ell}\ell)\dots(1+u'^{\ell^{f-1}}\ell)\Big]^e \bmod \ell\mathfrak{l} \\ &\equiv \Big[1 + \ell s_{\mathfrak{l}}(u')\Big]^e \bmod \ell\mathfrak{l} \\ &\equiv 1 + e\, s_{\mathfrak{l}}(u')^{\ell} \bmod \ell\mathfrak{l} \end{aligned}$$

also

$$\frac{N(\pi)-1}{\ell} \equiv e\, s_{\mathfrak{l}}(u') \bmod \mathfrak{l}\,, \quad \text{also mod } \ell$$

Somit ergibt sich aus (9.) wegen $s_{\mathfrak{l}}(u') \not\equiv 0 \bmod \ell$:

$$c'' \,=\, -e \bmod \ell$$

und somit nach (6.) allgemein für zu ℓ primes e und $\alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}^{\ell}$, $\beta \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}^{\frac{e}{\ell-1}}$ aus k:

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) \,=\, \zeta^{-e\, s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\ell\lambda_0}\right)} \,=\, \zeta^{-S_{\mathfrak{l}}\left(\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\ell\lambda_0}\right)}, \tag{4.10}$$

da allgemein

$$S_{\mathfrak{l}}(\gamma) \equiv e\, s_{\mathfrak{l}}(\gamma) \bmod \mathfrak{l} \qquad \text{also mod } \ell \tag{4.11}$$

für ganzes γ aus $k(\mathfrak{l})$ gilt. Die Formel (10.) gilt aber auch dann, wenn e durch ℓ teilbar ist, da dann einerseits nach (11.) $S_{\mathfrak{l}}$ stets durch ℓ teilbar, andererseits α und β sich in die Form setzen lassen

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi\, \alpha_0^{\ell} \quad (\mathfrak{l}) \\ \beta &= \eta\, \beta_0^{\ell} \quad (\mathfrak{l}) \end{aligned}$$

wo ξ, η Einseinheiten mindestens von den Graden $e+1$, $\frac{e}{\ell-1}+1$ sind, sodaß

$$\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\xi,\eta}{\mathfrak{l}}\right) = 1$$

wird.

Erfüllen nunmehr α, β die gemachten Voraussetzungen für *alle* Teiler $\mathfrak{l}_i$ von $\ell = \mathfrak{l}_1^{e_1}\dots\mathfrak{l}_z^{e_z}$, d. h. ist

$$\begin{aligned}\alpha &\equiv 1 \mod \ell\,,\\ \beta &\equiv 1 \mod \mathfrak{l}_0\,,\end{aligned}$$

so folgt

$$\begin{aligned}1 = \prod_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)\prod_{i=1}^{z}\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}_i}\right) &= \prod_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)\zeta^{-\sum_{i=1}^{z}S_{\mathfrak{l}_i}\left(\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\ell\lambda_0}\right)}\\ &= \prod_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)\zeta^{-S\left(\frac{\alpha-1}{\ell}\cdot\frac{\beta-1}{\lambda_0}\right)},\end{aligned}$$

da die Summe aller $S_{\mathfrak{l}_i}$ gleich der gewöhnlichen Spur S in k ist. Folglich gilt für noch zu einander prime α, β der angegebenen Kongruenzeigenschaft die zu beweisende Relation (4.)

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \zeta^{S\left(\frac{\alpha-1}{\ell}\cdot\frac{\beta-1}{\lambda_0}\right)}$$

und speziell für $\beta = \zeta = 1-\lambda_0\,,\ \alpha\equiv 1 \bmod \ell$ die Relation (4b.):

$$\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) = \zeta^{S\left(\frac{\alpha-1}{\ell}\right)}.$$

Im Falle $\ell = 2$ lassen sich die Betrachtungen noch etwas weiterführen. Da nämlich dann nur ein einziger Normennichtrestcharakter -1 existiert, ist die auf tiefergehende Betrachtungen gestützte Bestimmung der obigen Konstanten c'' hier nicht notwendig. Es ist a fortiori $c'' = 1$, und man hat aus (6.)

$$\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right) = (-1)^{S_{\mathfrak{l}}\left(\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{4}\right)} \tag{4.12}$$

für beliebige α, β die den Bedingungen

$$(4.13) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & \equiv & 1 \bmod \mathfrak{l}^h \\ \beta & \equiv & 1 \bmod \mathfrak{l}^{h'} \end{array} \right\} ; \quad h + h' = 2e$$

genügen.

Wenn e ungerade ist, darf hier $s_\mathfrak{l}$ durch $S_\mathfrak{l}$ ersetzt werden. Also folgt für Grundkörper k, in denen 2 keinen Primteiler gerader Ordnung enthält, das quadratische Reziprozitätsgesetz

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = (-1)^{S\left(\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{4}\right)}$$

für irgendzwei der Bedingungen (13.) genügende, zueinander prime α, β. (α total positiv, sonst nach Vorzeichenfaktoren!).

Für beliebige Grundkörper läßt sich jetzt unter diesen allgemeineren Voraussetzungen für α, β nur aussagen:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = (-1)^{\sum_{i=1}^{z} S_{\mathfrak{l}_i}\left(\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{4}\right)}$$

sodaß also zur Bestimmung des sogenannten "Umkehrfaktors" nicht allein die Kenntnis der Hauptgleichung für $\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{4}$ in k ausreicht, sondern die "Hauptkongruenzen" für jeden Modul $\mathfrak{l}_i$ benötigt werden, um die $s_{\mathfrak{l}_i}$ aus ihnen abzulesen.

Speziell erhält man übrigens für $\alpha = \beta = -1$ aus (10.) für $\ell = 2$:

$$\left(\frac{-1,-1}{\mathfrak{l}}\right) = (-1)^{S_\mathfrak{l}(1)} = (-1)^{ef}$$

wie ich es in einer früheren Arbeit behauptet hatte*').

Beweis *für (4.b)*

Ist λ irgendeine Primzahl für $\mathfrak{l}$ und $\alpha = 1 + u\ell\lambda_0$ eine Zahl aus k, die für den Bereich von $\mathfrak{l}$ eine Einseinheit vom Grade $\frac{e\ell}{\ell-1}$ ist und sich

*') Hasse, Quadr. Formen in algebr. Körpern, Crelle 153.

durch ein Fundamentalsystem für $k(\mathfrak{l})$ mit der "ausgezeichneten" Einseinheit $\eta_a = 1 + \omega\ell\lambda_0$; $\quad (s_{\mathfrak{l}}(\omega) \not\equiv 0 \bmod \ell)$ so darstellt:

$$\alpha = \eta_a^x \xi^\ell \quad (\mathfrak{l}),$$

so ist nach den Ausführungen von H. H., Z. V.:

$$\left(\frac{\lambda^c, \alpha}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\lambda, \eta_a}{\mathfrak{l}}\right)^{cx} = \zeta^{c'cx},$$

wo c' aus $\left(\frac{\lambda, \eta_a}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{c'}$ eine vorläufig unbestimmte Konstante $\not\equiv 0$ mod. ℓ ist. Der Ausdruck

$$s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{\alpha - 1}{\ell\lambda_0}\right) = s_{\mathfrak{l}}(u)$$

ist, da nach Hensel, Bemerkungen..., $u = xw + \overline{w}$ mit $s_{\mathfrak{l}}(\overline{w}) \equiv 0 \bmod \ell$ ist,

$$\begin{array}{r} N(1 + u\ell) \equiv \\ + + + + u\ell) = \end{array} \; xs_{\mathfrak{l}}(w) \equiv xs_{\mathfrak{l}}\left(\frac{\eta_a - 1}{\ell\lambda_0}\right) \equiv c''x \mod \ell,$$

sodaß

$$\left(\frac{\lambda^c, \alpha}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{\frac{cc'}{c''}\, s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{\alpha - 1}{\ell\lambda_0}\right)} = \zeta^{cc''' s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{\alpha-1}{\ell\lambda_0}\right)}$$

gesetzt werden kann, wo $c''' \not\equiv 0 \bmod \ell$ eine vorläufig unbestimmte, für alle in kommenden α feste Konstante ist.

Für $\ell = 2$ ist a fortioris $c''' \equiv 1 \bmod 2$. Sei also im folgenden $\ell > 2$.

Um c''' in gewissen Fällen zu bestimmen, betrachte ich unter der zunächst zu machenden Annahme $e \not\equiv 0 \bmod \ell$ die Darstellung von ℓ durch ein Fundamentalsystem für $k(\mathfrak{l})$:

$$\ell = \lambda^e \eta_1^{c_1} \ldots \eta_m^{c_m} \eta_a^{c_{m+1}} \xi^\ell \quad (\mathfrak{l})$$

Wegen $(e, \ell) = 1$ können hierin die $\eta_1^{c_1}, \ldots, \eta_a^{c_{m+1}}$ als e–te Potenzen von Zahlen aus $k(\mathfrak{l})$ geschrieben werden, sodaß unter Einführung einer neuen Primzahl λ'

$$\ell = \lambda'^e \xi^\ell \quad (\mathfrak{l})$$

geschrieben werden kann. Daher gilt für die vorhin betrachteten $\alpha = 1 + u\ell\lambda_0$

$$\left(\frac{\ell, \alpha}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{ec''' s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{\alpha-1}{\ell\lambda_0}\right)} \tag{4.14}$$

c''' bestimmt sich dann wie oben auf Grund des Hilbertschen Reziprozitätsgesetzes (1.). Dazu wähle ich das Hauptglied u von α als ganze Zahl aus k so, daß

$$(4.15) \qquad s_{\mathfrak{l}}(u) \not\equiv 0 \text{ mod. } \ell$$

$$(4.16) \qquad u \equiv 0 \bmod \mathfrak{l}_i^{\mathsf{N}} \qquad \text{für hinreichend großes } \mathsf{N}$$

wird, wobei wieder $\mathfrak{l}_i$ alle übrigen Teiler von ℓ außer $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{l}$ bezeichnet. Dies ist natürlich stets möglich. Dann wird nach dem Hilbertschen Reziprozitätsgesetz (1.)

$$(4.17) \qquad \left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \left(\frac{\alpha, \ell}{\mathfrak{l}_1}\right) \cdots \left(\frac{\alpha, \ell}{\mathfrak{l}_2}\right) = \left(\frac{\alpha, \ell}{\mathfrak{l}_1}\right) \zeta^{-ec''' s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{\alpha-1}{\ell\lambda_0}\right)}$$

wenn nur N in (16.) hinreichend groß ist.

Das Symbol $\left(\frac{\ell}{\alpha}\right)$ läßt sich nun unter Verwendung einer im Prinzip von Herrn E. Artin[†')] herrührenden Schlußweise folgendermaßen bestimmen:

Es ist $\left(\frac{u\zeta}{\alpha}\right) = 1$; denn aus (4a.) folgt einerseits $\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) = 1$. Andererseits ist wegen $\alpha = 1 + u\ell\lambda_0$, da u ganz ist, $(\alpha, u) = 1$, ferner noch +++ $(u, \mathfrak{l}) = 1$ also wenn

$$u = \mathfrak{u} \prod_{i=2}^{z} \mathfrak{l}_i^{a_i}$$

gesetzt wird,

$$1 = \prod_{\mathfrak{w}} \left(\frac{u, \alpha}{\mathfrak{w}}\right) = \left(\frac{u}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{u}}\right)^{-1} \prod_{i=1}^{z} \left(\frac{u, \alpha}{\mathfrak{l}_i}\right) = \left(\frac{u}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{u}}\right)^{-1},$$

da für $i = 2, \ldots, z$ für hinreichend großes N: $\left(\frac{u,\alpha}{\mathfrak{l}_i}\right) = 1$ und $\left(\frac{u,\alpha}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1$ ist, letzteres, weil u prim zu $\mathfrak{l}$ und $\alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}^{\frac{e\ell}{\ell-1}}$ (Z. V., S. ...).

Daher gilt

$$\left(\frac{u}{\alpha}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{u}}\right).$$

Wegen $\mathfrak{u}|u$ ist aber $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{u}}\right) = \left(\frac{1+u\ell\lambda_0}{\mathfrak{u}}\right) = \left(\frac{1}{\mathfrak{u}}\right) = 1$. Somit ist auch, wie behauptet, $\left(\frac{u}{\alpha}\right) = 1$ und $\left(\frac{u\zeta}{\alpha}\right) = 1$.

[†')] S. Anm. am Schluß der Arbeit

Daraus folgt weiter, daß

$$\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \left(\frac{u\ell\zeta}{\alpha}\right)$$

ist. Letzteres Symbol läßt sich aber so weiter berechnen:

$$\left(\frac{u\ell\zeta}{\alpha}\right) = \left(\frac{u\ell\zeta+\alpha}{\alpha}\right),$$

da der Wert des Legendreschen Symbols nur von der Restklasse abhängt, der sein "Zähler" mod. "Nenner" angehört. $u\ell\zeta+\alpha$ und α sind aber offenbar zwei zueinander und zu ℓ prime Zahlen und α primär, sodaß schon nach dem speziellen Reziprozitätsgesetz (3.)

$$\left(\frac{u\ell\zeta+\alpha}{\alpha}\right) = \left(\frac{\alpha}{u\ell\zeta+\alpha}\right)$$

ist. Durch erneute Anwendung des vorherigen Verfahrens wird dann

$$\begin{aligned}\left(\frac{\alpha}{u\ell\zeta+\alpha}\right) &= \left(\frac{\alpha-(u\ell\zeta+\alpha)}{u\ell\zeta+\alpha}\right) = \left(\frac{-u\ell\zeta}{u\ell\zeta+\alpha}\right)\\ &= \left(\frac{-u\ell\zeta}{1+u\ell}\right) = \left(\frac{-u\ell}{1+u\ell}\right)\left(\frac{\zeta}{1+u\ell}\right)\end{aligned}$$

Nun ist $\left(\frac{-u\ell}{1+u\ell}\right) = \left(\frac{-u\ell+1+u\ell}{1+u\ell}\right) = \left(\frac{1}{1+u\ell}\right) = 1$ und $\left(\frac{\zeta}{1+u\ell}\right) = \zeta^{\frac{|N(1+u\ell)|-1}{\ell}}$ wobei $|N(1+u\ell)| = N(1+u\ell)$ ist, da für ungerades ℓ der Körper k total imaginär ist. Wie oben ist weiter

$$\begin{aligned} & N(1+u\ell) && \equiv N_{\mathfrak{l}}(1+u\ell) \mod \ell^2\\ \text{und}\quad & N_{\mathfrak{l}}(1+u\ell) && \equiv 1+e\,s_{\mathfrak{l}}(u)\ell \mod \ell\mathfrak{l},\\ \text{sodaß}\quad & \frac{N(1+u\ell)-1}{\ell} && \equiv e\,s_{\mathfrak{l}}(u) \mod \mathfrak{l},\ \text{also mod } \ell\end{aligned}$$

ist. Daher wird schließlich

$$\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \zeta^{e\,s_{\mathfrak{l}}(u)} = \zeta^{e\,s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{\alpha-1}{\ell\lambda_0}\right)}$$

also nach (17.)

$$c''' \equiv -1 \mod \ell\,,$$

sodaß nunmehr nach (14.) allgemein für $e \not\equiv 0 \bmod \ell$ und $\alpha \equiv 1 + u\ell\lambda_0$ ($\mathfrak{l}$) gilt:

$$\left(\frac{\ell, \alpha}{\mathfrak{l}}\right) \equiv \zeta^{-e\, s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{\alpha-1}{\ell\lambda_0}\right)} = \zeta^{-S_{\mathfrak{l}}\left(\frac{\alpha-1}{\ell\lambda_0}\right)}$$

Für $e \equiv 0 \bmod \ell$ gilt dies aber ebenfalls, da dann $\ell = \eta\xi^\ell$ ($\mathfrak{l}$) sich von einer Einseinheit aus $k(\mathfrak{l})$ nur um eine ℓ–te Potenz aus $k(\mathfrak{l})$ unterscheidet, und dann nach Z. V., S. ... $\left(\frac{\ell,\alpha}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\eta,\alpha}{\mathfrak{l}}\right) = 1$ ist, andererseits auch die rechte Seite 1 wird. Daher folgt wie oben:

$$\prod_{i=1}^{z} \left(\frac{\ell, \alpha}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{-S\left(\frac{\alpha-1}{\ell\lambda_0}\right)}$$

und somit (4b.):

$$\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \zeta^{S\left(\frac{\alpha-1}{\ell\lambda_0}\right)}, \quad \text{wenn} \quad \alpha \equiv 1 \bmod \ell\mathfrak{l}_0$$

Anmerkung zu S. ...

Herr E. Artinteilte mir ein einfaches Rekursionsverfahren mit, das gestattet, im Falle des quadratischen Reziprozitätsgesetzes im rationalen Körperund des kubischen imKreiskörper k_ζ der dritten Einheitswurzeln den zweiten Ergänzungssatz aus dem allgemeinen Gesetz zu erschließen, und somit angedeutet, daß der in der Hilbert–Furtwänglerschen Theorie stets besonders schwer zu beweisende zweite Ergänzungssatz auch im allgemeinen Falle als nicht tieferliegend anzusehen ist, als das allgemeine Reziprozitätsgesetz und der erste Ergänzungssatz. In einer gemeinsamen Besprechung konnten wir dann dies Verfahren auf den Kreiskörper k_ζ der ℓ–ten Einheitswurzeln übertragen. Des Interesses halber teile ich die einfachen Überlegungen, denen der Hauptschluß bei meinem obigen Beweise entnommen ist, hier mit:

1.) **Rationaler Grundkörper**, a positiv ungerade,

Voraussetzung: $\left(\frac{-1}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}}$; $\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{b}{a}\right)$, wenn a oder b $\equiv$

$1 \bmod 4$ (primär)

$$\left(\frac{2}{a}\right) = \left(\frac{-1}{a}\right)\left(\frac{-2}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a-2}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{a-2}\right) =$$
$$= (-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a-(a-2)}{a-2}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{2}{a-2}\right)$$

also
$$\left(\frac{2}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}+\frac{a-3}{2}+\ldots+1}\left(\frac{2}{1}\right) = (-1)^{\frac{a^2-1}{8}}.$$

2.) **Grundkörper** k_ζ **der 3 ten Einheitswurzeln**, $\alpha = a+3b\zeta$, (a prim zu 3, a, b ganz rational d. h. α ganz) semiprimär

Voraussetzung: $\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) = \zeta^{\frac{N(\alpha)-1}{3}}$; $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, wenn α, β semiprimär

$$\left(\frac{3}{\alpha}\right) = \left(\frac{\zeta^2}{\alpha}\right)\left(\frac{3\zeta}{\alpha}\right)$$

$$\left(\frac{3\zeta}{\alpha}\right) = \left(\frac{-3\zeta}{\alpha}\right) = \left(\frac{\alpha-3\zeta}{\alpha}\right) =$$
$$= \left(\frac{\alpha}{\alpha-3\zeta}\right) = \left(\frac{\alpha-(\alpha-3\zeta)}{\alpha-3\zeta}\right) = \left(\frac{3\zeta}{\alpha-3\zeta}\right),$$

also $\left(\frac{3\zeta}{\alpha}\right) = \left(\frac{3\zeta}{\alpha-3b\zeta}\right) = \left(\frac{3\zeta}{a}\right) = \left(\frac{3}{a}\right)\left(\frac{\zeta}{a}\right) = \left(\frac{\zeta}{a}\right)$ weil $\left(\frac{3}{a}\right)$ seinem konjugierten gleich, also 1 ist. Somit

$$\left(\frac{3}{\alpha}\right) = \left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\zeta}{a}\right) = \zeta^{-\frac{N(\alpha)-1}{3}+\frac{a^2-1}{3}} = \zeta^{-\frac{a^2-1-3ba+9b^2}{3}+\frac{a^2-1}{3}}$$
$$\left(\frac{3}{\alpha}\right) = \zeta^{ab}$$

3.) **Grundkörper** k_ζ **der ℓ–ten Einheitswurzeln.** α prim zu ℓ und $\equiv$ rationaler Zahl mod ℓ, d. h. $\alpha = a+\ell\gamma = a+\ell(b_1\zeta+b_2\zeta^2+\cdots+b_{\ell-1}\zeta^{\ell-1})$ wo a prim zu ℓ und $b_1,\ldots,b_{\ell-1}$ rationale Zahlen, die ℓ nicht im Nenner enthalten sind. Wegen $\left(\frac{\ell}{b}\right) = 1$ für rationales, zu ℓ primes b dürfen die Zahlen $b_1,\ldots,b_{\ell-1}$ ganz vorausgesetzt werden (dasselbe gilt übrigens auch im Spezialfall 2.)).

Voraussetzung. $\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) = \zeta^{\frac{N(\alpha)-1}{\ell}}$; $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, wenn $\alpha, \beta \equiv$ rat. zu ℓ primer Zahl mod ℓ, was nach (4a.) für $\ell > 2$ sicher richtig.

Es werde

$$\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \Phi(b_1, \ldots, b_{\ell-1})$$

gesetzt. Dann folgt, ähnlich wie unter 1.) u. 2.) die Rekursionsformel

$$\Phi(b_1, \ldots, b_{\ell-1} = \left(\frac{\zeta^{-1}}{\alpha}\right)\Phi(b_1 - 1, b_2, \ldots, b_{\ell-1})\left(\frac{\zeta}{a - \ell\zeta}\right)$$

also

$$\Phi(b_1, b_2, \ldots, b_{\ell-1}) = \left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{\zeta}{\alpha - \ell b_1 \zeta}\right)\Phi(0, b_2, \ldots, b_{\ell-1}$$

und durch die "konjugierten" Rekursionsformeln:

$$\begin{aligned}\Phi(b_1, b_2, \ldots, b_{\ell-1}) &= \left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{\zeta}{\alpha - \ell b_1\zeta}\right)^{-1}\left(\frac{\zeta^2}{\alpha - \ell b_1\zeta}\right)^{-1}\left(\frac{\zeta^2}{\alpha - \ell b_1\zeta - \ell b_2\zeta^2}\right)\\ &\quad \cdots\left(\frac{\zeta^{\ell-1}}{a + \ell b_{\ell-1}\zeta^{\ell-1}}\right)^{-1}\left(\frac{\zeta^{\ell-1}}{a}\right)\\ \left(\frac{\ell}{\alpha}\right) &= \left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\zeta}{\alpha - \ell b_1\zeta}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\zeta}{\alpha - \ell b_1\zeta - \ell b_2\zeta^2}\right)^{-1}\cdots\\ &\quad \cdots\left(\frac{\zeta}{a + \ell b_{\ell-1}\zeta^{\ell-1}}\right)^{-1}\left(\frac{\zeta}{a}\right)^{-1}\end{aligned}$$

Werden hier die einzelnen "Nenner" zur Abkürzung mit

$$\alpha_0 = \alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_{\ell-2},\ \alpha_{\ell-1} = a$$

bezeichnet, so ist allgemein

$$\left(\frac{\zeta}{\alpha_i}\right) = \zeta^{\frac{N(\alpha_i)-1}{\ell}}$$

und
$$\begin{aligned}
\frac{N(\alpha_0)-1}{\ell} &\equiv \frac{a^{\ell-1}-1}{\ell} - a^{\ell-2}\sum_{i=1}^{\ell-1} b_i && \mod \ell \\
\frac{N(\alpha_1)-1}{\ell} &\equiv \frac{a^{\ell-1}-1}{\ell} - a^{\ell-2}\sum_{i=2}^{\ell-1} b_i && \mod \ell \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{N(\alpha_{\ell-2})-1}{\ell} &\equiv \frac{a^{\ell-1}-1}{\ell} - a^{\ell-2}\sum_{i=\ell-1}^{\ell-1} b_i && \mod \ell \\
\frac{N(\alpha_{\ell-1})-1}{\ell} &= \frac{a^{\ell-1}-1}{\ell}
\end{aligned}$$

Folglich wird

$$\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \zeta^{-\sum_{i=0}^{\ell-1}\frac{N(\alpha_i)-1}{\ell}} = \zeta^{-\ell\frac{a^{\ell-1}-1}{\ell}+a^{\ell-2}\left(\sum_1^{\ell-1} b_i+\sum_2^{\ell-1} b_i+\cdots\right)}$$

$$\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \zeta^{\frac{1}{a}\sum_1^{\ell-1} i b_i}$$

Dies Resultat ist die entsprechende Verallgemeinerung zu dem unter 2.) für k_ζ erhaltenen (bekannten). In der Tat wird für $\ell = 3$

$$\left(\frac{3}{\alpha}\right) = \zeta^{a(b_1+2b_2)}$$

wenn

$$\alpha = a + 3(b_1\varrho + b_2\varrho)^2 = a + 3(b_1 - b_2)\varrho - 3b_2$$

also nach 2.)

$$\left(\frac{3}{\alpha}\right) = \zeta^{(a-3b_2)(b_1-b_2)} = \zeta^{a(b_1+2b_2)}$$

Allgemein läßt sich die erhaltene Formel für $\left(\frac{\ell}{\alpha}\right)$ noch etwas einfacher schreiben. Entwickelt man nämlich in

$$\alpha \;=\; a + \ell \sum_{i=1}^{\ell-1} b_i \zeta^i \;=\; a + \ell\gamma$$

γ nach steigenden Potenzen von $1 - \zeta \;=\; \lambda_0$, schreibt also:

$$\alpha \;=\; a + \ell(c_0 + c_1\lambda_0 + \cdots + c_{\ell-2}\lambda_0^{\ell-2})$$

so findet man leicht:

$$\sum_{i=1}^{\ell-1} ib_i \equiv -c_1 \bmod \ell$$

also

$$\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) \;=\; \zeta^{-\frac{c_1}{a}}$$

Dies Resultat ist ersichtlich allgemeiner, als das durch Spezialisierung für k_ζ aus (4b.) zu gewinnende

$$\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) \;=\; \zeta^{-c_1} \qquad \text{wenn} \quad \alpha \;=\; 1 + c_1\ell\lambda_0 + \cdots$$

indem es für beliebiges $\alpha \equiv$ rat. Zahl mod ℓ gilt, jenes aber auf $\alpha \equiv 1 \bmod \ell\mathfrak{l}_0$ beschränkt ist. Übrigens gilt letzteres in der Form

$$\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) \;=\; \zeta^{-c_1}$$

auch schon für $\alpha \equiv 1 \bmod \ell$, da der Koeffizient c_0 in die allgemeine Formel nicht eingeht, kann aber dann nicht mehr in der Form (4b.) mit "Spur" im Exponenten geschrieben werden.

4.5 Sept.1923, Vortrag Hasse in Marburg

Vortrag, Marburg, September 1923

k beliebiger algebraischer Körper, der ℓ-te E. W. ζ enthält (für $\ell = 2$ ganz beliebig).

Ferner sei in k: $\qquad \ell = \mathfrak{l}_1^{e_1} \dots \mathfrak{l}_z^{e_z}$.

Alle Reziprozitätsbeziehungen für die ℓ–ten Potenzreste in k lassen sich nach Hilbert in die eine Formel

$$\prod_{\mathfrak{w}} \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{w}} \right) = 1 \; ; \qquad (\alpha, \beta \quad \text{beliebige Zahlen aus } k)$$

zusammenfassen. Darin bedeutet $\mathfrak{w}$ alle Primteiler des Körpers k, für $\ell = 2$ einschl. der Primstellen $\mathfrak{p}_\infty$ für die reellen zu k konjugierten, $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{w}}\right)$ *Normenrestsymbol*.

Aus dieser Formel entstehen *allgemeines Reziprozitätsgesetz*, *erster u. zweiter Ergänzungssatz*, wenn für α, β spezielle Werte eingesetzt werden. Die zu ℓ primen $\mathfrak{p}$ liefern die *Legendre–Jacobischen Symbole*, die übrigen $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{p}_\infty$ schafft man dann durch *Vertauschungssatz* nach rechts.

Allgem Rez. gesetz $\qquad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \prod_{\mathfrak{l}} \left(\frac{\beta,\alpha}{\mathfrak{l}}\right) \cdot \prod_{\mathfrak{p}_\infty} \left(\frac{\beta,\alpha}{\mathfrak{p}_\infty}\right)$;
α, β prim zu einander und zu ℓ

erster Ergänzungssatz $\qquad \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right) = \prod_{\mathfrak{l}} \left(\frac{\alpha,\varepsilon}{\mathfrak{l}}\right) \cdot \prod_{\mathfrak{p}_\infty} \left(\frac{\alpha,\varepsilon}{\mathfrak{p}_\infty}\right)$;
α prim zu ℓ, $\varepsilon = \mathfrak{a}^\ell$ prim zu α (speziell Einheit)

zweiter Ergänzungssatz $\qquad \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) = \prod_{\mathfrak{l}} \left(\frac{\alpha,\lambda}{\mathfrak{l}}\right) \cdot \prod_{\mathfrak{p}_\infty} \left(\frac{\alpha,\lambda}{\mathfrak{p}_\infty}\right)$;
α prim zu ℓ, $\lambda = \prod \mathfrak{l}_i^{a_i} \mathfrak{a}^\ell$ prim zu α
(also eine durch Primteiler von ℓ teilbare Zahl).

Man beherrscht diese 3 Gesetze erst dann, wenn man die rechten Seiten *explizit* kennt. Für die $\mathfrak{p}_\infty$–Symbole ist das nicht schwer. Sie sind nach ihrer

Definition falls $\ell = 2$:

$$\prod_{\mathfrak{p}_\infty} \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}_\infty}\right) = (-1)^{\sum_i \frac{\operatorname{sgn} \alpha^{(i)}-1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sgn} \beta^{(i)}-1}{2}}; \qquad \textit{Vorzeichencharaktere}$$

Ohne Beschränkung sei einfachheitshalber: *Für* $\ell = 2$*:* α *total positiv*, sodaß die $\mathfrak{p}_\infty$–Symbole identisch 1 sind.

Dann kommt es also nur auf die *Normenrestsymbole nach den* $\mathfrak{l}_i$ an. Abgesehen von Spezialfällen (rat. Grdk., Kreiskörper, *Eisenstein*) beherrschte man diese Symbole bisher nur insofern, als man *Bedingungen für* α angeben kann, unter denen sie identisch 1 sind. Hierzu *Begriffe primär, hyperprimär.*

> Sei $\mathfrak{l}_0$ Primteiler $(1-\zeta) = (\lambda_0)$ des Kreiskörpers k_ζ (für $\ell = 2$: $\mathfrak{l}_0 = 2$).

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha \ \textit{primär} & \text{, wenn} & \alpha \equiv \xi^\ell \mod \ell\mathfrak{l}_0 \\ \alpha \ \textit{hyperprimär} & , \quad " & \alpha \equiv \xi^\ell \mod \ell\mathfrak{l}_0\,\mathfrak{l}_1 \ldots \mathfrak{l}_z \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{prim zu } \ell \\ \text{(u. für } \ell = 2 \\ \text{tot.} \\ \text{positiv.)} \end{array}$$

Dann gilt:

$$\begin{array}{rcll} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} & = & 1\,, & \text{wenn } \alpha, \beta \text{ prim zu } \ell\text{, zueinander und } \alpha \ \textit{primär.} \\ \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right) & = & 1\,, & \quad " \quad \alpha \ \textit{primär,} \quad \varepsilon = \mathfrak{a}^\ell \text{ prim zu } \alpha \\ \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) & = & 1\,, & \quad " \quad \alpha \ \textit{hyperprimär,} \quad \lambda = \prod_i \mathfrak{l}_i^{a_i}\mathfrak{a}^\ell, \text{ prim zu } \alpha \end{array}$$

Es ist mir nun auf Grund der Henselschen Methoden gelungen, die Normenrestsymbole für die $\mathfrak{l}_i$ in weiteren Fällen, wo sie nicht identisch 1 sind, in einfache Form zu setzen und folgende Gesetze zu beweisen, in denen α nicht mehr primär zu sein braucht:

$$\begin{array}{rcll} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} & = & \zeta^{S\left(\frac{\alpha-1}{\ell}\cdot\frac{\beta-1}{\lambda_0}\right)}, & \text{wenn } \left\{\begin{array}{lcl} \alpha & \equiv & 1 \mod \ell \\ \beta & \equiv & 1 \mod \lambda_0 \end{array}\right\} \text{ und } (\alpha, \beta) = 1 \\ \left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) & = & \zeta^{S\left(\frac{\alpha-1}{\ell}\right)}, & \text{wenn } \ \alpha \equiv 1 \mod \ell \\ \left(\frac{\ell}{\alpha}\right) & = & \zeta^{S\left(\frac{\alpha-1}{\ell\lambda_0}\right)}, & \text{wenn } \ \alpha \equiv 1 \mod \ell\lambda_0 \end{array}$$

$S = Spur\ in\ k$. Die Ergänzungssätze sind nicht die allgemeinsten. Diese haben sehr verwickelten Typus. Der erste für beliebiges ε ist als im allgemeinen Gesetz enthalten anzusehen, der zweite läßt sich ähnlich auch noch für λ_0 statt ℓ aussprechen, jedoch für beliebige *unsymmetrische* Verbindungen der $\mathfrak{l}_i$ habe ich ihn noch nicht.

Ergänzungssätze in dieser Form geschrieben, wegen Analogie zum bekannten quadr. Rez. Ges.im rat. Körper:

$$\begin{array}{rcll}
\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right) & = & (-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{b-1}{2}}, & \text{wenn } \left\{\begin{array}{l} a \equiv 1 \bmod 2 \\ b \equiv 1 \bmod 2 \end{array}\right\} \ (a,b) = 1, \quad a \text{ pos.} \\
\left(\frac{-1}{a}\right) & = & (-1)^{\frac{a-1}{2}}, & \text{wenn } a \equiv 1 \bmod 2, \quad a \text{ pos.} \\
\left(\frac{2}{a}\right) & = & (-1)^{\frac{a-1}{4}}, & \quad \shortparallel \quad a \equiv 1 \bmod 4 \quad \text{(hier kann } a \text{ pos. entbehrt werden, da 2 positiv ist).}
\end{array}$$

Das allgemeine Gesetz ist auch als Verallgem. d. Eisensteinschen Rez. Ges. anzusehen.

1.) Die Bedingung $\equiv 1$ ist unwesentl. ebenso gilt:

$$\equiv \ rat. \ (\text{zu } \ell \text{ prime Zahl}).$$

Dann muß das Gesetz geschrieben werden

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \zeta^{S\left(\frac{\alpha^{\ell-1}-1}{\ell}\cdot\frac{\beta^{\ell-1}-1}{\lambda_0}\right)}$$

2.) Ist nun k der Kreiskörper und

$$\begin{array}{lcl} \alpha & \equiv & a \bmod \ell \\ \beta & \equiv & b \bmod \lambda_0^2 \qquad \text{(semiprimär)} \end{array}$$

so wird $\beta^{\ell-1} \equiv b^{\ell-1} \equiv 1 \mod \lambda_0^2$, also $\frac{\beta^{\ell-1}-1}{\lambda_0}$ durch λ_0 teilbar, also Spur $\equiv 0 \ (\ell)$, d. h.

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = 1 \qquad \text{wenn im Kreiskörper} \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha \equiv \text{rat. Zahl mod } \ell \\ \beta \equiv \text{rat. Zahl mod } \lambda_0^2 \end{array}\right\}$$

das ist das bekannte *Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz.*

Es entsteht natürlich die Frage, ob sich die *notwendigen Voraussetzungen* nicht noch weiter herabdrücken lassen, also die Moduln noch weiter verkleinern.

In dieser Richtung habe ich noch kein abschließendes Resultat. Den Ausgangspunkt für die Aufstellung einer ganz allgemeinen Formel findet man am zweckmäßigsten in der *Kummer*schen Formel *für den Kreiskörper* k_ζ .

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \zeta^{\sum_{\kappa=1}^{\ell-1}(-1)^\kappa \ell_\kappa(\alpha)\ell_{(\ell-\kappa)}(\beta)} \quad \left| \begin{array}{l} \alpha, \beta \text{ prim zu } \ell \text{ und zu-} \\ \text{einander} \\ \text{und} \equiv 1 \bmod \lambda_0 \,. \end{array} \right.$$

wo die $\ell_\kappa(\alpha)$ die Kummerschen *logarithmischen Diff. Quot.* sind. Dieser entsteht aus

$$\alpha = \alpha(\zeta)$$

$$\text{als} \qquad \ell_\kappa(\alpha) \equiv \left.\frac{d^\kappa \log \alpha(e^v)}{dv^\kappa}\right|_{v=0} \quad \bmod \ \ell \,.$$

Ich habe zeigen können, daß man diese unerfreulichen Ausdrücke durch einfachere ersetzen kann, die zu ihrer Bildung nicht noch den formalen Differentiationsprozeß erfordern, sondern direkt angebbare *Spuren* von *Polynomen in* α sind.

Sei $\quad \log \alpha = (\alpha - 1) - \dfrac{(\alpha-1)^2}{2} + \dfrac{(\alpha-1)^3}{3} - \cdots\cdots \qquad$ für $\quad \alpha \equiv 1 \bmod \lambda_0$

hinreichend weit fortgesetzt. Die Glieder werden schließlich durch jede noch so hohe Potenz von λ_0 teilbar, also hat

$$S \log \alpha \qquad \begin{cases} 1.) & \text{teilbar durch } \ell \\ 2.) & \text{ganz bestimmten Kongruenzwert mod. } \ell. \end{cases}$$

Damit ist

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \zeta^{\sum_{\kappa=1}^{\ell-1} \kappa \cdot \frac{S(\zeta^{-\kappa}\log\alpha)}{\ell} \cdot \frac{S(\zeta^{\kappa}\log\beta)}{\ell} + S\left(\frac{\alpha-1}{\lambda_0}\right)\frac{S\log\beta}{\ell} - S\left(\frac{\beta-1}{\lambda_0}\right)S\left(\frac{\log\alpha}{\ell}\right)}$$

für $\alpha, \beta \equiv 1 \bmod \lambda_0$, prim zu ℓ und zueinander *im Kreiskörper*

Das ist *soweit heruntergedrückt, als möglich.* Höchstens noch $\alpha \equiv$ rat. Zahl mod λ_0, das aber leicht durch $\alpha^{\ell-1}$ zu erreichen. Letzten beiden Glieder treten nur für

$$\alpha, \beta \not\equiv 1 \bmod \lambda_0^2$$

auf. Für *semiprimäre* α, β nur das erste Glied.

Nach einem allgemeinen Satz über Legendre Symbole im Ober– und Unterkörper folgt hieraus:

$$\left(\frac{A}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{A}\right)^{-1} = \zeta^{\sum_{\kappa=1}^{\ell-1} \kappa \cdot \frac{S_\kappa(\zeta^{-\kappa} \log A)}{\ell} \cdot \frac{S_\zeta(\zeta^{\kappa} \log \beta)}{\ell} + S_\kappa\left(\frac{A-1}{\lambda_0}\right)\frac{S_\zeta \log \beta}{\ell} - S_\zeta\left(\frac{\beta-1}{\lambda_0}\right)\left(\frac{S_\kappa \log A}{\ell}\right)}$$

für $A, \beta \equiv 1 \mod \lambda_0$, prim zueinander, β im Kreiskörper k_ζ.

Es fehlt also noch die entspr. Formel, wenn A, B *beide* im Oberkörper liegen, und auch nur nach niedrigeren Potenzen, als λ_0, $\equiv 1$ sind.

Den *ersten Ergänzungssatz* besonders zu führen, ist nicht notwendig, da er für $\beta = \ell$te Idealpotenz im allgem. Gesetz unmittelbar enthalten ist.

Der *zweite Ergänzungssatz* läßt eine entsprechende Darstellung zu. *Mitteilungen von Artin.* Wieder erhält man zunächst den allgemeinsten zweiten Ergänzungssatz in k_ζ, der dort offenbar nur die beiden Symbole

$$\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\lambda_0}{\alpha}\right)$$

zu behandeln braucht:

$$\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \zeta^{-S\left(\frac{\log \alpha}{\lambda_0^\ell}\right)}; \quad \left(\frac{\lambda_0}{\alpha}\right) = \zeta^{-S\left(\frac{\zeta \log \alpha}{\ell \lambda_0}\right)} \qquad \text{für } \alpha \equiv 1 \text{ mod } \lambda_0 \text{ im Kreiskörper.}$$

Für beliebigen Grundkörper k wird dann, wenn ebenfalls λ auf die beiden Werte $\lambda = \lambda_0, \ell$, *die schon im Kreiskörper liegen*, beschränkt wird

$$\left(\frac{\ell}{A}\right) = \zeta^{-S\left(\frac{\log A}{\lambda_0^\ell}\right)}; \quad \left(\frac{\lambda_0}{A}\right) = \zeta^{-S\left(\frac{\zeta \log A}{\ell \lambda_0}\right)} \qquad \text{für } A \equiv 1 \text{ mod } \lambda_0 .$$

Es fehlt also wieder eine entspr. Formel für

1.) beliebiges λ

2.) niedrigere Kongruenzbedingung für A.

4.6 1928,Manuskr. Kub.Koerper,Fragment

Kubische Körper vorgegebener Diskriminante.

1. Allgemeines

Sei K ein kubischer Körper, der *nicht* mit seinen konjugierten zusammenfällt. *Nur* von solchen ist im Folgenden die Rede; die Galoisschen und somit zyklischen kubischen Körper sind also vollständig beiseite gelassen.

Wenn D die Diskriminante von K ist, so ist

$$\overline{K} = K(\sqrt{D})$$

der durch K bestimmte Galoissche Körper.Er ist vom Grade 6. In ihm steckt als Teilkörper der quadratische Zahlkörper

$$k = k_0(\sqrt{D})$$

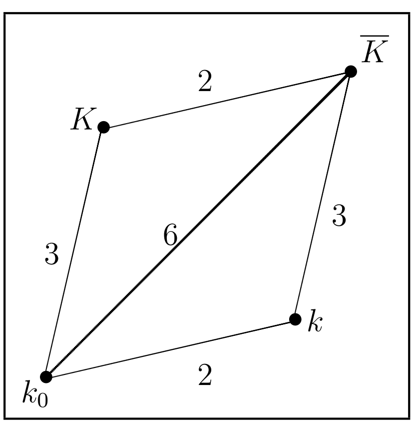
wo k_0 den rationalen Körper bezeichnet.Wenn d seine Diskriminante ist, so ist auch

$$k = k_0(\sqrt{d})$$

und

$$D = df^2$$

mit ganz rationalem f.



Der Körper $\overline{K}$ ist nun Abelsch (zyklisch) vom Grade 3 über k .Nach dem Umkehrsatz der Klassenkörpertheorie ist er also als Klassenkörper zugeordnetzu einer bestimmten Kongruenz–Idealgruppe H vom Index 3 in k . Von dieser Idealgruppe H kann man nun, wie ich hier nicht weiter ausführen will, die folgenden beiden Eigenschaften beweisen:

(1.) Die oben auftretende ganze rationale Zahl f ist der *Führer* von H

(2.) H enthält alle zu f primen *rationalen* Zahlen.

(1.) besagt, daß die Zugehörigkeit zu H zwar mod. f beschrieben werden kann, aber nicht mod. f_0 , wo f_0 irgendein echter Teiler von f in k ist.
(2.) besagt, daß H auch alle Zahlen enthält, die mod. f einer rationalen zu f primen Zahl kongruent sind, also den sog. Zahlring mod. f (Diskriminante $D = df^2$). H ist also eine Gruppe von Ringklassen mod. f .

Nach dem Existenzsatz der Klassenkörpertheoriegehört umgekehrt jeder Idealgruppe H vom Index 3 in k ein bestimmter über k vom Grade 3 zyklischer Körper $\overline{K}$ als Klassenkörper. Man kann wieder zeigen, daß dieser vom obigen Typus ist, d. h. Galoisscher Körper zu einem kubischen Körper K der Diskriminante $D = df^2$, wenn H die beiden Eigenschaften (1.) und (2.) hat.

Es gilt also der folgende Satz:

*Es sei D eine ganze rationale Zahl, die keine Quadratzahl ist**⁾*,und*

$$D = df^2$$

ihre Zerlegung in eine quadratische Körperdiskriminante d und das Quadrat einer ganzen rationalen Zahl f .

---

*⁾ $D = f^2$ entspricht dem ausgeschlossenen Fall, daß K schon selbst Galoissch ist. Dann modifiziert sich +++ +++ sodaß +++ einfacheren Fall +++ +++.
Nun enthält H_p als Zahlgruppe vom Index 3 alle 3–ten Potenzen. Da $1+p$ und $1+\omega p$ wegen $p \neq 3$ nach dem mod. p^m kongruent 3–ten Potenzen sind, gehören diese Basiselemente also zu H_p . Die Gruppe H_p enthält also mit einer Potenz ω^a auch gleich immer alle $a \equiv \omega^a(1+p)^{b_0}(1+\omega p)^{b_1}$ mod. p^m wo b_0, b_1 *beliebig*, d. h. alle $\alpha \equiv \omega^a$ mod. $\underline{\underline{p}}^1$.
H_p besteht somit aus vollen Restklassen mod. p^1, d. h. es ist notwendig $\underline{\underline{m = 1}}$.

Dann und nur dann ist D Diskriminante eines kubischen Körpers K, wenn es im quadratischen Körper $k = k_0(\sqrt{d})$ eine Kongruenzidealgruppe H vom Index 3 gibt, deren Führer f ist, und die alle zu f primen rationalen Zahlen enthält.

Die Anzahl der nicht–konjugierten kubischen Körper K mit der Diskriminante D ist gleich der Anzahl der verschiedenen Idealgruppen H von dieser Art. ...

...setzt werde noch ausgenutzt, daß H_p alle zu p primen rationalen Zahlen enthält. Nun ist ω als primitive (p^2-1)–te Einheitswurzel wählbar und folglich ω^{p+1} eine primitive $(p-1)$–te Einheitswurzel, also einer rationalen Zahl mod. p kongruent, d. h. zu H_p gehörig. Wenn nun $p+1$ nicht durch 3 teilbar wäre, so folgte aus

$$\omega^{p+1} \quad \text{zu} \quad H_p \qquad \text{und} \qquad \omega^3 \quad \text{zu} \quad H_p\,,$$

daß ω selbst zu H_p gehört, also $\underline{\underline{\text{alle}}}$ Restkl. mod. p, d. h. $\underline{\underline{\text{alle}}}$ zu p primen Zahlen zu H_p gehören. Das geht nicht, wenn p wirklich im Führer von H steckt. Also ist notwendig $\underline{p \equiv -1 \text{ mod. } 3.}$

Auf dieselbe Weise zeigt man, daß im Falle $p \neq 3$, $\left(\frac{d}{p}\right) = +1$ (also $p' = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ in k) notwendig $m = 1$ und $p \equiv +1$ mod. 3, sein muß.

Ferner, daß im Falle $p = 3$, $d \not\equiv 0$ mod. 3 notwendig $m = 2$ ist, während für $p = 3$, $d \equiv 0$ mod. 3 nur geschlossen werden kann

$$\left\{ \begin{array}{lll} m = & 1 \text{ oder } 2, & \text{wenn} \quad d \equiv -3 \text{ mod. } 9 \\ m = & 1, & \text{wenn} \quad d \equiv +3 \text{ mod. } 9 \end{array} \right\}.$$

Gerade diese +++ Fälle dürften Ihnen keinerlei Schwierigkeiten machen, da sie auf die bekannten Eventualitäten: $\left\{ \begin{array}{c} +++ \\ +++ \end{array} \right\}$ +++ +++, +++ +++ +++ Einseinheit bei der +++ Darstellung in +++ +++ +++ +++ hinauslaufen.

Der Einfachheit halber sei für das Folgende +++ +++ f *prim zu +++* ist. Dann läßt sich das bisherige Ergebnis so zusammenfassen:

Ist der Führer f eines H der gesuchten Art prim zu 3, so ist er von der

Form

$$f = p_1 \cdots p_n$$

wo $p_1, \ldots, p_n$ *verschiedene Primzahlen in einer Anzahl* $n \geq 0$ *sind, die die Kongruenzeigenschaft* $\left\{ \begin{array}{lll} p_i & \equiv & 1 \ mod.\ 3 \quad für \ \left(\frac{d}{p_i}\right) = +1 \\ p_i & \equiv & -1 \ mod.\ 3 \quad für \ \left(\frac{d}{p_i}\right) = -1 \end{array} \right\}$ *, kurz* $p_i \equiv \left(\frac{d}{p_i}\right)$ *mod.* 3 *haben.*

Es ergibt sich ferner bei der angedeuteten Diskussion der H_p, daß für jedes $p_i \equiv \left(\frac{d}{p_i}\right)$ mod. 3 ein *einziges* Basiselement ω_i existiert derart, daß für jede zu p_i prime Zahl α eine eindeutige Darstellung besteht:

$$\alpha \equiv \omega_i^{y_i} \cdot r \cdot \gamma^3 \text{ mod. } p_i \qquad (y_i \text{ mod } 3),$$

wo r eine rationale Zahl und γ^3 eine 3–te Potenz aus k ist.

Um nun zu einer Basisdarstellung in Bezug auf H zu kommen, aus der man auf die Zugehörigkeit zu H schließen kann, wähle ich zunächst die Basiselemente ω_i so, daß

$$\omega_i \equiv 1 \text{ mod. } p_j \qquad \text{für alle } j \neq i$$

ist. Dann folgt leicht, daß für jedes zu f prime α aus k eine eindeutige Basisdarstellung

$$\alpha \equiv \omega_1^{y_1} \ldots \omega_n^{y_n} \cdot r \cdot \gamma^3 \text{ mod. } f \qquad (y_i \text{ mod. } 3) \tag{4.1}$$

besteht, wo r eine rationale Zahl und γ^3 eine 3–te Potenz aus k ist.

Nunmehr müssen noch die Ideale $\mathfrak{a}$ aus k einbezogen werden. Natürlich gehört jede 3–te Idealpotenz zu H, da H den Index 3 hat. Aus einer Basis für die Idealklassen des Körpers k können +++ diejenigen Basiselemente sofort weggelassen (d. h. als eine 3–te Potenz geschrieben) werden, deren Exponenten keine Potenzen von 3 sind. Es seien $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_t$ zu f prime Ideale aus den übrigen Basisklassen, +++ Exponenten also Potenzen 3^{ℓ_i} von 3 sind, sodaß also einerseits

$$\mathfrak{r}_i^{3^{\ell_i}} = \rho_i$$

Zahlen (Hauptideale) sind, andererseits jedes (zu f prime) Ideal $\mathfrak{a}$ aus k eine eindeutige Darstellung

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{r}_1^{x_1} \ldots \mathfrak{r}_t^{x_t} \cdot \mathfrak{c}^3 \cdot \alpha \qquad (x_i \text{ mod. } 3) \tag{4.2}$$

besitzt, wo $\mathfrak{c}^3$ eine 3–te Idealpotenz aus k und α eine zu f prime Zahl aus k ist. Fügt man jetzt die Darstellung (1.) für α in (2.) ein, so bekommt man für jedes zu f prime Ideal $\mathfrak{a}$ aus k eine Darstellung:

$$(4.3) \qquad \mathfrak{a} = \mathfrak{r}_1^{x_1} \dots \mathfrak{r}_t^{x_t} \, \omega_1^{y_1} \dots \omega_n^{y_n} \cdot r \cdot \mathfrak{c}^3 \cdot \beta \qquad \begin{pmatrix} x_i & \text{mod. } 3 \\ y_i & \text{mod. } 3 \end{pmatrix},$$

wo r eine rationale Zahl, $\mathfrak{c}^3$ eine 3–te Idealpotenz und β eine Zahl $\equiv 1 \text{ mod. } f$ aus k ist.

In (3.) sind die Exponenten x_i, wie in (2.), eindeutig mod. 3 bestimmt, dagegen i. a. *nicht* mehr, wie in (1.), die Exponenten y_i.
Aus

$$1 = \mathfrak{r}_1^{x_1} \dots \mathfrak{r}_t^{x_t} \, \omega_1^{y_1} \dots \omega_n^{y_n} \cdot r \cdot \mathfrak{c}^3 \cdot \beta$$

folgt nämlich wegen der Eindeutigkeit der Darstellung (2.) zunächst, daß die $x_i \equiv 0 \pmod{3}$ sind, also eine Relation der Form

$$1 = \omega_1^{y_1} \dots \omega_n^{y_n} \cdot r \cdot \mathfrak{c}^3 \cdot \beta \, .$$

Die 3–te Idealpotenz $\mathfrak{c}^3$ ist also Hauptideal (Zahl), d. h. es besteht eine Relation von der Form

$$\rho = \omega_1^{y_1} \dots \omega_n^{y_n} \cdot r \cdot \beta \qquad (\rho \text{ dritte Idealpotenz}).$$

Daraus kann im allgemeinen nicht auf $y_i \equiv 0 \text{ mod. } 3$ geschlossen werden. Denn ρ kann dritte Idealpotenz sein, ohne 3–te Zahlpotenz zu sein (und erst das letztere ergäbe gemäß (1.) $y_i \equiv 0 \text{ mod. } 3$). Die 3–ten Idealpotenzen, die Zahlen ρ sind, ergeben sich nach S. 306 leicht so: Ist $\mathfrak{c}^3 = \rho$, so muß

$$\mathfrak{c} = \left(\mathfrak{r}_1^{3^{\ell_1 - 1}}\right)^{a_1} \dots \left(\mathfrak{r}_t^{3^{\ell_t - 1}}\right)^{a_t} \cdot \xi \qquad (\xi \text{ Zahl aus } k)$$

sein, also

$$\mathfrak{c}^3 = \rho_1^{a_1} \dots \rho_t^{a_t} \, \xi^3,$$

und daher bis auf eine Einheit ε auch ρ gleich der rechten Seite:

$$\rho = \varepsilon \rho_1^{a_1} \dots \rho_t^{a_t} \, \xi^3.$$

Für ε kann man noch seine Basisdarstellung durch +++ +++ ε_0 einführen, falls k reell ist. Sonst ist i. a. $\varepsilon = \pm 1 = (\pm 1)^3$ in +++.

Diese 3–ten Idealpotenzzahlen ρ liefern also (wenn man sie in der Form (1.) darstellt) i. a. eine Anzahl r von unabhängigen Relationen der Form

$$1 = \omega_1^{y_{1j}} \dots \omega_n^{y_{nj}} \cdot r \cdot \mathfrak{c}^3 \cdot \beta \qquad (j = 1, \dots, r), \tag{3'}$$

und es kann dann das y_i–Exponentensystem in (3.) um eine beliebige lineare Kombination dieser y_{ij}–Exponentensysteme verändert werden, alles immer nur mod. 3.

In einer Idealgruppe H der verlangten Art sind nun die r, $\mathfrak{c}^3, \beta$ durchweg darin, sodaß *die Zugehörigkeit zu H +++ von den Exponenten x_i, y_i in (3.) abhängt.* Da H vom Index $\underline{\underline{3^1}}$ ist, wird es also in dem Sinne durch $\underline{\underline{\textit{eine}}}$ lineare Kongruenz

$$L(x_i, y_i) \equiv \sum_{i=1}^{t} X_i x_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i y_i \equiv 0 \mod. 3 \tag{4.4}$$

definiert, daß ein Ideal $\mathfrak{a}$, in der Form (3.) geschrieben, dann und nur dann zu H gehört, wenn seine Exponenten x_i, y_i dieser Kongruenz genügen.

Zwei unabhängige $L(x_i, y_i)$ definieren verschiedene Idealgruppen und zwei $L(x_i, y_i)$ sind unabhängig, wenn sie nicht +++ sind, d. h. nicht $L_1 \equiv \pm L_2$ mod. 3 identisch gilt.

Nicht jede *willkürlich* hingeschriebene lineare Form $L(x_i, y_i)$ definiert aber eine Idealgruppe H. Vielmehr muß $L(x_i, y_i)$ die Identitäten (3') respektieren, es müssen also die Koeffizienten Y_i in (4.) *so* gewählt werden, daß

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i y_{ij} \equiv 0 \text{ mod. } 3 \qquad (j = 1, \dots, r) \tag{4'}$$

gilt.

Und ferner darf, damit H wirklich den Führer f hat, *kein einziges* $Y_i \equiv 0$ *mod.* 3 *werden*, da sonst +++ +++ p_i bei der Entscheidung über die Zugehörigkeit von +++ gar +++ mitsprechen würde. Sind diese Bedingungen erfüllt, so existiert eine durch $L(x_i, y_i) \equiv 0$ mod. 3 definierte Idealgruppe

+++ +++ +++ +++.

Es kommt also nur darauf an, diejenigen Lösungen Y_i der Kongruenzen (4.') zu ermitteln, bei denen kein einziges $Y_i \not\equiv 0$ mod. 3 ist.

Es sei $\mathcal{N}_0$ deren Anzahl. Nach (4.) ist dann im Falle $n > 0$, $t > 0$ die Anzahl $\mathcal{N}$ der unabhängigen $L(x_i, y_i)$, die in Frage kommen, gleich

$$\mathcal{N} = \frac{3^t \mathcal{N}_0}{2},$$

speziell im Falle $n = 0,\ t > 0$:

$$\mathcal{N} = \frac{3^t - 1}{2},$$

im Falle $n > 0,\ t = 0$:

$$\mathcal{N} = \frac{\mathcal{N}_0}{2},$$

im Falle $n = 0,\ t = 0$

$$\mathcal{N} = 0.$$

Hierin sind also die Anzahlen der nicht konjugierten kubischen Körper K mit der Diskriminante $D = df^2$ ausgedrückt, +++ $(f, 3) = 1$, und jeder Primteiler p von f genau zur ersten Potenz +++ und $p \equiv \left(\frac{d}{p}\right)$ mod. 3 +++. (Andernfalls gibt es überhaupt keine kubischen Körper K zu D)

4.7 02.12.1930, Courant an Hensel

2. Dezember 30

Herrn

Geheimrat Prof. Dr. H e n s e l ,

M a r b u r g . (L)

-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.

Sehr verehrter Herr Geheimrat!

Da meine Hoffnung, Sie einmal für einige Zeit als Gast unseres Institutes hier zu sehen und dann ausführlich mit Ihnen sprechen zu können, anscheinend doch nicht so schnell in Erfüllung geht, möchte ich mich heute in meiner Eigenschaft als Herausgeber der "Gelben Sammlung" schriftlich mit einem Vorschlage an Sie wenden.

Es besteht ja noch der alte Vertrag mit Ihnen und Hasse wegen eines mehrbändigen Werkes über Zahlentheorie. Bei dem langen Zeitraum, der seit Abschluss jenes Vertrages verstrichen ist, hat sich naturgemäss die Sachlage in mancher Hinsicht ein wenig verschoben, sodass vielleicht eine Neuordnung der auf die Zahlentheorie bezüglichen Pläne in dieser Sammlung zweckmässig erscheint. Schon seit längerer Zeit bereitet Knopp ein Buch über ausgewählte Kapitel aus der elementaren Zahlentheorie vor, ein Buch, das übrigens mit den alten Plänen keineswegs in Kollision steht. Ihnen, hochverehrter Herr Geheimrat, liegen ja vor allen Dingen die Zweige der Zahlentheorie am Herzen, welche durch Ihre eigenen Ideen entscheidend beeinflusst worden sind, und ich glaube daher, dass vielleicht die Verwirklichung unserer hierauf bezüglichen Pläne am einfachsten erreicht werden kann, wenn dies im Rahmen eines besonderen Buches geschieht. Hasse würde wohl sicher gern bereit sein, ein solches Buch über p-adik mit Ihnen für unsere Sammlung zu schreiben. Auf der anderen Seite würde dann die Darstellung der übrigen Gebiete der Zahlentheorie, insbesondere auch der analytischen Zahlentheorie, von jenem Plan unabhängig gemacht werden können. Ich wollte dann Hasse bitten, die Bearbeitung dieser Abschnitte in Form eines besonderen Werkes zu übernehmen und denke, dass er das gern und auch – woran uns besonders liegt – in nicht allzu ferner Zeit machen würde.

Springer ist mit einer solchen Lösung der Frage vollkommen einverstanden.

Ich wäre Ihnen sehr dankbar, wenn Sie mir möglichst bald – hoffentlich in zustimmendem Sinne – antworten wollten, weil Springer mit Rücksicht auf seine Stellungnahme zunanderen Möglichkeiten den grössten Wert darauf legt, dass die zahlentheoretischen Pläne für die Sammlung bald geregelt werden.

Indem ich hoffe, dass Sie diesen Brief nicht als ein unberechtigtes Drängen auffassen werden, verbleibe ich mit herzlichen Grüssen

Ihr sehr ergebener

R. Courant

4.8 20.02.1936, Manuskript Einseinheiten

Zur Multiplikativen Darstellung der Einseinheitengruppe in einem π–adischen algebraischen Zahlkörper.

$\underline{\underline{1.}}$

Es sei k ein π–adischer algebraischer Zahlkörper der Charakteristik 0, mit endlichem Restklassenkörper $\mathfrak{k}$ von $q = p^f$ Elementen und mit der Verzweigungsordnung e.

Dann ist bekanntlich k eine Eisensteinsche Erweiterung

$$k = k_0(\pi), \quad \pi \quad \text{Eisensteinsch vom Grade } e \text{ über } k_0$$

vom Grade e über einem eindeutig bestimmten unverzweigten (p–adischen) Teilkörper k_0, der genau denselben Restklassenkörper $\mathfrak{k}$ hat und aus dem Körper R_p der rational–p–adischen Zahlen durch Adjunktion der $(q-1) = (p^f-1)$–ten Einheitswurzeln entsteht:

$$k_0 = R_p(\omega), \quad \omega \text{ primitive } (p^f-1)\text{–te Einheitswurzel.}$$

Die Gruppe H der Einseinheiten η aus k hat folgende Struktur:
Es durchlaufe κ die e zu p primen Zahlen zwischen 1 und $\frac{ep}{p-1}$ und es bezeichne $\pi^{(\kappa)}$ ein festes zu π^κ assoziiertes Element aus k. Ferner bezeichne $\omega_i \quad (i = 1, \ldots, f)$ eine Basis für den Restklassenkörper $\mathfrak{k}$ in k_0.

a.) Enthält dann k nicht die p–ten Einheitswurzeln, so besitzt jedes η eine eindeutige Darstellung:

$$\eta = \prod_{i,\kappa} \left(1 - \omega_i \pi^{(\kappa)}\right)^{c_{i\kappa}}, \qquad c_{i\kappa} \text{ ganz, rational–}p\text{–adisch.}$$

b.) Enthält aber k die p–ten Einheitswurzeln, und sind die p^n–ten die höchsten Einheitswurzeln von p–Potenzgrad, die in k enthalten sind, so ist

$$e = e_0 p^{N-1}(p-1) \quad \text{mit} \quad N \geq n \quad \text{und} \quad (e_0, p) = 1\,,$$

und jedes η besitzt eine eindeutige Darstellung:

$$\eta = \prod_{i,\kappa} \left(1 - \omega_i \pi^{(\kappa)}\right)^{c_{i\kappa}} \cdot (1-\pi_n)^c \cdot (1 - \alpha p \pi_1)^{c^\#},$$

wo folgendes der Fall ist: $\zeta_n = 1 - \pi_n$ ist eine primitive p^n–te Einheitswurzel, $\zeta_n^{p^{n-1}} = \zeta_1 = 1 - \pi_1$; π_n und π_1 sind ja zu $\pi^{e_0 p^{N-n}}$ und $\pi^{e_0 p^{N-1}}$ assoziiert. Das Element $\pi^{(e_0)}$ ist speziell so gewählt, daß die Entwicklung seiner p^{N-n}–ten (zu π_n assoziierten) Potenz so anfängt: $\pi^{(e_0)^{p^{N-n}}} = \pi_n + \cdots$ und die Basis ω_i ist so gewählt, daß etwa $\omega_1 = 1$ ist, während dann $\omega_i^q - \omega_i \neq 0$ $(i = 2, \ldots, f)$ ist; α ist ein festes ganzes Element aus k_0 mit der Eigenschaft, von den $\omega_i^q - \omega_i$ linear unabhängig mod. p zu sein, d. h. mit der Eigenschaft

$$s(\alpha) \equiv \alpha + \alpha^p + \cdots + \alpha^{p^{f-1}} \not\equiv 0 \text{ mod. } p\,.$$

Die Exponenten $c_{i\kappa}$, c, $c^\#$ sind ganze rational–p–adische Zahlen; bei c kommt es nur auf die Restklasse mod. p^n an, innerhalb deren c *ganz beliebig* gewählt werden kann; c_{1e_0} ist auf ein *festes Restsystem* mod. p^{N-n} zu beschränken.

2.

Ziel der folgenden Ausführungen ist, zu einer multiplikativen Darstellung zu gelangen, *bei der auch die ω_i in die Exponenten gezogen sind, bei der also die Exponenten ganze p–adische Zahlen aus dem (nicht mehr rationalen) Koeffizientenkörper k_0 sind.*

Dazu ist der Potenzbegriff auf solche Exponenten zu verallgemeinern. Das geschieht durch eine genauere Analyse der Struktur des p–adischen Logarithmus. Dieser ist gegeben durch die Potenzreihe

$$-\log(1-x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^h}{h} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\,,$$

konvergent für alle x von positiver Ordnungszahl. Ich zerspalte diese Reihe so, daß ich die im p–adischen *wesentlichen* Nenner, d. h. die Primzahlpotenzen p^ϱ, vor den unwesentlichen Nennern, d. h. den zu p primen ganzen positiven Zahlen m hervorhebe. Ich setze also

$$h = mp^{\varrho}, \quad (m,p) = 1$$

und zerlege

$$-\log(1-x) = \sum_{(m,p)=1} \frac{1}{m} \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{x^{mp^{\varrho}}}{p^{\varrho}} .$$

Dementsprechend führe ich die folgende Funktion ein:

$$L(1-x) = \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{x^{p^{\varrho}}}{p^{\varrho}} = x + \frac{x^p}{p} + \frac{x^{p^2}}{p^2} + \cdots$$

Es wird dann

$$-\log(1-x) = \sum_{(m,p)=1} \frac{1}{m} L(1-x^m) .$$

Diese Beziehung läßt sich nach bekanntem Schema mittels der Möbiusschen Funktion umkehren:

$$L(1-x) = \sum_{(m,p)=1} \frac{\mu(m)}{m} \Big(-\log(1-x^m) \Big) .$$

In dieser Umkehrformel kann aber rechts die Funktionalgleichung des Logarithmus angewandt werden. Zunächst ist

$$\frac{\mu(m)}{m} \Big(-\log(1-x^m) \Big) = -\log(1-x^m)^{\frac{\mu(m)}{m}} ,$$

weil der Exponent eine *ganze* rational–p–adische Zahl ist, und daher weiter:

$$L(1-x) = -\log \prod_{(m,p)=1} (1-x^m)^{\frac{\mu(m)}{m}} .$$

Dementsprechend führe ich die Funktion

$$\mathsf{P}(1-x) = \prod_{(m,p)=1} (1-x^m)^{\frac{\mu(m)}{m}} = 1 - x - a_2x^2 - a_3x^3 - \cdots$$

ein, die sich als mit $1-x$ beginnende Potenzreihe darstellen läßt, deren weitere Koeffizienten $a_2, a_3, \ldots$ ganze rational–p–adische Zahlen sind.
Es wird dann

$$L(1-x) = -\log \mathsf{P}(1-x) .$$

Die Funktion $\mathsf{P}(1-x)$ verwandelt jede Einseinheit $1-x$ in eine äquivalente (mit demselben Hauptglied). Nennt man diese $1-y$, so ist die Beziehung

$$1-y \;=\; \mathsf{P}(1-x) \;=\; 1-x-a_2x^2-a_3x^3-\cdots$$

eindeutig durch eine Beziehung der Form

$$1-x \;=\; \mathsf{Q}(1-y) \;=\; 1-y-b_2y^2-b_3y^3-\cdots$$

mit ganzen rational–p–adischen Koeffizienten $b_2, b_3, \ldots$ umkehrbar.
Diese beiden zueinander inversen Funktionen $1-y \;=\; \mathsf{P}(1-x)$, $1-x \;=\; \mathsf{Q}(1-y)$ vermitteln also eine *umkehrbar eindeutige Hauptgliederhaltende Abbildung der Einseinheitengruppe* H *jedes* π*–adischen Körpers* k.

Es gilt die *Funktionalgleichung*

$$L(1-x_1)+L(1-x_2) \;=\; L(1-x_3), \quad \text{wenn} \quad \mathsf{P}(1-x_1)\cdot\mathsf{P}(1-x_2) \;=\; \mathsf{P}(1-x_3)\,.$$

Unsere Abbildungsfunktion P erzeugt also für die modifizierte Logarithmusfunktion L die additive Funktionalgleichung.

3.

Nun zur Definition der Potenzfunktion $(1-y)^{\alpha}$ mit einem Exponenten α, der eine *ganze* p*–adische Zahl aus dem Koeffizientenkörper* k_0 *von* k *ist.* Sei

$$\alpha \;=\; \alpha_0+\alpha_1p+\alpha_2p^2+\cdots$$

mit *multiplikationstreuen* Koeffizienten α_ν; diese α_ν sind also 0 oder Potenzen der $(q-1)$–ten Einheitswurzel ω, d. h. Lösungen von $\alpha_\nu^q \;=\; \alpha_\nu$. Die Konjugierten von α sind gegeben durch

$$\alpha^{(p^\varrho)} \;=\; \alpha_0^{p^\varrho}+\alpha_1^{p^\varrho}p+\alpha_2^{p^\varrho}p^2+\cdots,$$

wo in den Koeffizienten *wirkliche* p^ϱ*–te Potenzen* auftreten.
Wir *definieren* dann

$$(1-y)^{\alpha} \;=\; \mathsf{P}(1-\alpha_0x)\cdots\Big(\mathsf{P}(1-\alpha_1x)\Big)^{p}\cdot\Big(\mathsf{P}(1-\alpha_2x)\Big)^{p^2}\cdots$$

wo x zu y aus

$$1 - y \;=\; \mathsf{P}(1-x), \quad 1 - x \;=\; \mathsf{Q}(1-y)$$

bestimmt ist.

Ich zeige, daß diese Potenzfunktion folgende Eigenschaften hat:

(4.1) $(1-y)^{\alpha} \cdot (1-y)^{\beta} \;=\; (1-y)^{\alpha+\beta}$

(4.2) $(1-y)^{a}$, wo a eine ganze rational–p–adische Zahl ist, ist die im gewöhnlichen Sinne verstandene a–te Potenz von $1-y$

(4.3) $(1-y)^{\alpha a} = \Big((1-y)^{\alpha}\Big)^{a}$, wenn $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \text{ ganz aus } k_0 \\ a \text{ ganz aus } R_p \end{array} \right\}$.

Für die Beweise bemerke ich vornweg: Hat man eine Gleichung

$$-\log(1-y_1) \;=\; -\log(1-y_2)\,,$$

wo y_1, y_2 ganze durch x teilbare Potenzreihen in einer *Unbestimmten* x sind, so folgt daraus

$$1 - y_1 \;=\; 1 - y_2\,.$$

Denn es folgt zunächst

$$-\log \frac{1-y_1}{1-y_2} \;=\; 0\,,$$

wo $\frac{1-y_1}{1-y_2} \;=\; 1-y$ und dann y auch eine derartige Potenzreihe in x ist, und also

$$-\log(1-y) \;=\; \sum_{h=1}^{\infty} \frac{y^h}{h} \;=\; 0\,.$$

Diese Relation kann aber aus Ordnungszahlgründen in der Unbestimmten x nur für $y \;=\; 0$ bestehen, denn für $y \;=\; cx^n + \cdots$ mit $c \neq 0$ haben die einzelnen Summanden $\frac{y^h}{h}$ durchweg verschiedene Ordnungszahlen in x, es kann sich also nichts wegheben.

Hiernach genügt es, die logarithmischen Gleichungen (1.)–(3.) zu beweisen. Denn man kann ja wegen des umkehrbar eindeutigen Zusammenhangs $1-y \;=\; \mathsf{P}(1-x)$, $\quad 1-x \;=\; \mathsf{Q}(1-y)$ das x als unabhängige Unbestimmte auffassen. Man beweist dann also (1.)–(3.) gleich als Identitäten in der Unbestimmten x, in die man dann nachher für x beliebige Elemente positiver Ordnungszahl aus k einsetzen kann, und dadurch erhält man dann eben wegen des umkehrbar eindeutigen Zusammenhangs $1-y = \mathsf{P}(1-x)$, $1-x = \mathsf{Q}(1-y)$ auch jedes beliebige y positiver Ornungszahl aus k.

Nun ist nach Definition

$$\begin{aligned} -\log(1-y)^{\alpha} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} p^{\nu}\big(-\log \mathsf{P}(1-\alpha_{\nu}x)\big) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} p^{\nu} L(1-\alpha_{\nu}x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p^{\nu} \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{\alpha_{\nu}^{p^{\varrho}} x^{p^{\varrho}}}{p^{\varrho}} \end{aligned}$$

oder nach Umordnung der Summation wegen $\alpha^{(p^{\varrho})} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu}^{p^{\varrho}} p^{\nu}$:

$$-\log(1-y)^{\alpha} = \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{\alpha^{(p^{\varrho})} x^{p^{\varrho}}}{p^{\varrho}},$$

wo als Koeffizienten jetzt die Konjugierten $\alpha^{(p^{\varrho})}$ auftreten.

(1.) folgt jetzt also ohne weiteres aus der gewöhnlichen Logarithmus-Funktionalgleichung und der Tatsache $\alpha^{(p^{\varrho})} + \beta^{(p^{\varrho})} = (\alpha+\beta)^{(p^{\varrho})}$ für die Konjugierten.

(2.) folgt ohne weiteres aus $a^{(p^{\varrho})} = a$ für rational–p–adisches a; denn das ergibt

$$-\log(1-y)^{a} = a \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{x^{p^{\varrho}}}{p^{\varrho}} = aL(1-x) = a\big(-\log(1-y)\big),$$

und hier ist die rechte Seite bekanntlich gerade der (negative) Logarithmus der im gewöhnlichen Sinne verstandenen Potenz $(1-y)^{a}$.

(3.) folgt ganz analog aus $(\alpha a)^{(p^{\varrho})} = \alpha^{(p^{\varrho})} a^{(p^{\varrho})} = \alpha^{(p^{\varrho})} a$, was

$$-\log(1-y)^{\alpha a} = a\big(-\log(1-y)^{\alpha}\big)$$

ergibt. —

Ich bemerke aber ausdrücklich, daß für $\big((1-y)^{\alpha}\big)^{\beta}$, $(1-y_1)^{\alpha}(1-y_2)^{\alpha}$

nicht die gewöhnlichen Potenzregeln gelten, wenn α, β bzw. α allgemeine (nicht–rationale) p–adische Zahlen sind; auch überträgt sich das für rational–p–adische a gültige Gesetz $\log(1-y)^a = a\log(1-y)$ *nicht* auf allgemeine p–adische α.

4.

Dem Erfinder der "multiplikativen Darstellung" brauche ich wohl nicht in allen Einzelheiten auseinanderzusetzen, wie man mittels dieses Potenzbegriffs zu den nachstehend angegebenen multiplikativen Darstellungen kommt.

a.) *k enthalte nicht die p–ten Einheitswurzeln.* Dann besitzt jede Einseinheit η aus k eine eindeutige Darstellung

$$\eta = \prod_{\kappa} (1-\pi^{(\kappa)})^{\gamma_\kappa}, \qquad \gamma_\kappa \quad \text{ganz im Koeffizientenkörper } k_0 \,.$$

Dabei ist $\pi^{(\kappa)}$ wie vorher ein festes System zu den π^κ assoziierter Elemente aus k, wo κ die e zu p primen Zahlen zwischen 1 und $\frac{ep}{p-1}$ durchläuft.

b.) k enthalte die p–ten Einheitswurzeln, und es sei $\zeta_n = 1-\pi_n$ eine p^n–te Einheitswurzel in k von größtmöglichem Exponenten n, und wieder

$$e = e_0 p^{N-1}(p-1)\,; \quad N \geq n\,, \quad (e_0, p) = 1\,.$$

Dann besitzt jede Einseinheit η aus k eine eindeutige Darstellung

$$\eta = \prod_{\kappa \neq e_0} \left(1-\pi^{(\kappa)}\right)^{\gamma_\kappa} \cdot \left(1-\pi^{(e_0)}\right)^{\gamma_{e_0}} \cdot (1-\pi_n)^{\gamma} \cdot (1-p\pi_1)^{\alpha c^{\#}}$$

Dabei ist wieder $\zeta_1 = \zeta_n^{p^{n-1}} = 1-\pi_1$ und α ein festes ganzes Element aus k_0 mit $s(\alpha) \not\equiv 0 \text{ mod. } p$, ferner

γ_κ $(\kappa \neq e_0)$ ganz aus k_0,

γ_{e_0} ganz aus k_0 und bei Entwicklung nach multiplikationstreuen Koeffizienten mod. p^{N-n} reduziert,

γ ganz aus k_0 und bei Entwicklung nach multiplikationstreuen Koeffizienten mod. p^n reduziert,

$c^{\#}$ ganz aus R_p.

Entsprechend der Relation

$$(1-\pi_n)^{p^n} \;=\; \zeta_n^{p^n} \;=\; 1\,,$$

also allgemeiner

$$(1-\pi_n)^{cp^n} \;=\; 1 \qquad \text{für beliebiges ganzes } c \text{ aus } R_p$$

kann γ auch um beliebige cp^n abgeändert werden, ohne η zu ändern.

5.

Diese Darstellung ist für die Zwecke, die ich verfolge, nämlich die Anwendung auf die höheren Reziprozitätsgesetze noch nicht vollkommen.
Es stört dabei ganz wesentlich das Auftreten des Zusatzbasiselements $(1-p\pi_1)^\alpha$. Ich will daher nachstehend eine etwas abgeänderte Darstellung entwickeln, bei der man zwar dieses Basiselement *nicht* braucht, dafür aber für den Exponenten γ neben den p–adischen Zahlen aus k_0 auch solche aus $\underline{\underline{p}}$–adischen Körpern K_0 mit größerem Koeffizientenkörper zulassen muß.

Ausgangspunkt für die Herleitung der Basisdarstellung sind die Formeln:

a.) Sei κ eine zu p prime Zahl zwischen 1 und $\frac{ep}{p-1}$, aber $\kappa \neq e_0$, und sei als letztes $\kappa p^\varrho < \frac{ep}{p-1}$, d. h. also

$$e_0 p^{N-1} \;=\; \frac{e}{p-1} < \kappa p^\varrho < \frac{ep}{p-1} \;=\; e_0 p^N,$$

dann ist für beliebige “Koeffizienten” ξ aus k_0 (Einheitswurzeln oder 0):

$$\begin{aligned}
\big(1-\pi^{(\kappa)}\big)^{\xi} &= 1-\xi\pi^{(\kappa)}+\cdots &&= 1-\xi\pi^{(\kappa)}+\cdots\\
\big(1-\pi^{(\kappa)}\big)^{\xi p} &= 1-\xi^p\pi^{(\kappa)p}+\cdots &&= 1-\xi^p\pi^{(\kappa p)}+\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\big(1-\pi^{(\kappa)}\big)^{\xi p^\varrho} &= 1-\xi^{p^\varrho}\pi^{(\kappa)p^\varrho}+\cdots &&= 1-\xi^{p^\varrho}\pi^{(\kappa p^\varrho)}+\cdots\\
\big(1-\pi^{(\kappa)}\big)^{\xi p^{\varrho+\nu}} &= 1-\xi^{p^\varrho}p^\nu\big(\pi^{(\kappa)}\big)^{p^\varrho}+\cdots &&= 1-\xi^{p^\varrho}\pi^{(\kappa p^\varrho+\nu e)}+\cdots
\end{aligned}$$

b.) Ist $\kappa = e_0$, so tritt an die Stelle dieser Gleichungskette die folgende:

$$\begin{array}{rll}
\big(1-\pi^{(e_0)}\big)^{\xi} = 1-\xi\pi^{(e_0)}+\cdots & & = 1-\xi\pi^{(e_0)}+\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\big(1-\pi^{(e_0)}\big)^{\xi p^{N-n-1}} = 1-\xi^{p^{N-n-1}}\pi^{(e_0)^{p^{N-n-1}}}+\cdots & & = 1-\xi^{p^{N-n-1}}\pi^{(e_0p^{N-n-1})}+\cdots \\
-----------\,- & & --------- \\
\big(1-\pi_n\big)^{\xi} = 1-\xi\pi_n+\cdots & & = 1-\xi\pi^{(e_0p^{N-n})}+\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\big(1-\pi_n\big)^{\xi p^{n-1}} = 1-\xi^{p^{n-1}}\pi_n{}^{p^{n-1}}+\cdots & & = 1-\xi^{p^{n-1}}\pi^{(e_0p^{N-1})}+\cdots \\
-----------\,- & & --------- \\
\big(1-\pi_n\big)^{\xi p^{n+\nu}} = 1-(\xi^p-\xi)^{p^{n-1}}p^{\nu}\pi_n^{p^n}+\cdots & & = 1-(\xi^p-\xi)^{p^{n-1}}\pi^{(e_0p^N+\nu e)} \\
 & & \quad +\cdots
\end{array}$$

$$\Big(\pi^{(e_0)^{p^{N-n}}} \sim \pi_n\Big)$$

$$\Big(\pi^{p^n}(?)\pi_1^p+\cdots\;=\;-p\pi_1+\cdots\Big)$$

Hieraus ergibt sich, daß man bei der sukzessiven Bestimmung der Koeffizienten ξ in den Exponenten der Basisdarstellung in den meisten Fällen nur Kongruenzen der Form

$$\xi^{p^{\varrho}} \equiv \text{ geg. Rest mod. } p$$

zu lösen hat, jedoch beim Übergang vom Einseinheitengrad $e_0p^N+\nu e$ zu $e_0p^N+\nu e+1$ für $\nu = 0,1,\ldots$ jedesmal eine Kongruenz der Form

$$(\xi^p-\xi)^{p^{n-1}} \equiv \text{ geg. Rest mod. } p$$

Dies erfordert beim ersten Male ($\nu = 0$) die Erweiterung des Koeffizientenkörpers k_0 auf den (einzigen) $\underline{\underline{p}}$–adischen Körper vom Grade p über k_0; natürlich liegen dann auch die “gegebenen Reste mod p” für die nunmehr zwischengeschobenen Kongruenzen der ersteren Form in diesem erweiterten Koeffizientenbereich. Beim nächsten Male ($\nu = 1$) wird dann eine neue Erweiterung des Koeffizientenkörpers auf den (einzigen) $\underline{\underline{p}}$–adischen Körper vom Grade p^2 über k_0 erforderlich, u. s. w.

So gelangen wir also zu einer eindeutigen Darstellung der Form

$$\eta = \prod_{\kappa \neq e_0} \left(1 - \pi^{(\kappa)}\right)^{\gamma_\kappa} \cdot \left(1 - \pi^{(e_0)}\right)^{\gamma_{e_0}} \cdot \left(1 - \pi_n\right)^{\gamma}$$

wo jetzt die Exponenten γ_κ, γ jedenfalls ganze p–adische Zahlen der folgenden Form sind:

$$\gamma = \xi_0 + \xi_1 p + \xi_2 p^2 + \cdots ,$$

wo jedes ξ_ν 0 oder eine $\left(q^{p^{h_\nu}} - 1\right)$–te Einheitswurzel mit einem gewissen h_ν ist (das mit ν gegen ∞ streben kann).
γ_{e_0} bricht mod. p^{N-n} ab, *nicht* aber jetzt auch γ; an γ können ganz beliebige Zusatzsummanden cp^n mit ganzem rational–p–adischem c angebracht werden.

γ_{e_0} liegt nach der Konstruktion noch in k_0, während die übrigen γ_κ nach der Herleitung möglicherweise die oben angegebene kompliziertere Struktur haben können. In Wahrheit haben diese γ_κ aber *nicht* diese kompliziertere Struktur, sondern *liegen von selbst auch in* k_0*,* und nur der Exponent γ von $1 - \pi_n$ hat diese kompliziertere (irrationale) Struktur. Überdies läßt sich auch über γ noch eine charakteristische Aussage machen, die diese Struktur noch genauer einengt, so wie es bei der Herleitung schon ungefähr herauskam.
Um das alles zu erhalten, geht man aber besser nicht von der *schrittweisen* Herleitung der Koeffizienten ξ der Exponenten aus, sondern betrachtet vielmehr gleich die fertige Basisdarstellung in der obigen Form. Daraus, daß η eine Zahl aus k ist, folgt ja, daß η bei dem Automorphismus, der jedes ξ durch ξ^q ersetzt, ungeändert bleibt, (und umgekehrt ist dies auch nach der galoisschen Theorie gerade hinreichend dafür, daß η zu k gehört, und nicht zu einem der unverzweigten Erweiterungskörper K von k vom Grade $p, p^2, \dots$). Es folgt also:

$$\eta = \prod_{\kappa \neq e_0} \left(1 - \pi^{(\kappa)}\right)^{\gamma_\kappa^{(q)}} \cdot \left(1 - \pi^{(e_0)}\right)^{\gamma_{e_0}^{(q)}} \cdot \left(1 - \pi_n\right)^{\gamma^{(q)}},$$

wo $\gamma^{(q)}$ die Erhebung aller Koeffizienten ξ in die q–te Potenz ξ^q bezeichnet. Der Vergleich mit der ursprünglichen Basisdarstellung ergibt dann wegen der Eindeutigkeit:

$$\gamma_\kappa^{(q)} = \gamma_\kappa \qquad (\kappa \neq e_0 \quad \text{und auch} \quad \kappa = e_0),$$

alle diese γ_κ liegen also in der Tat schon im ursprünglichen Koeffizientenkörper k_0. Für γ kann nach der obigen Bemerkung nur geschlossen werden:

$$\gamma^{(q)} = \gamma + p^n a \qquad \text{mit einem gewissen ganzen rational–}p\text{–adischen } a\,.$$

Diese Relation beschreibt gerade das sukzessive Anwachsen der Irrationalitäten in den Koeffizienten ξ_ν von ϱ; es beginnt erst von ξ_n ab, ganz im Einklang mit der obigen Herleitung.
Für ξ_n ergibt sich eine Kongruenz

$$\xi_n^q \equiv \xi_n + a_0 \text{ mod. } p\,, \quad a_0 \quad \text{rational}$$

also

$$\xi_n^{q^p} \equiv \xi_n \text{ mod. } p,$$

was (i. a.) erst im endlichen Körper von q^p Elementen lösbar ist, für ξ_{n+1} kommt man entsprechend auf eine erst im endlichen Körper von q^{p^2} Elementen lösbare Kongruenz, u. s. w., ganz im Einklang mit der obigen schrittweisen Herleitung.

So gelangt man also schließlich zu folgendem Resultat:
Jede Einseinheit η aus k besitzt eine eindeutige Darstellung der Form:

$$\eta = \prod_\kappa \left(1 - \pi^{(\kappa)}\right)^{\gamma_\kappa} \cdot \zeta_n^\gamma.$$

Dabei sind die Koeffizienten γ_κ ganze p–adische Zahlen aus dem Koeffizientenkörper k_0 von k, insbesondere γ_{e_0} bei Entwicklung nach multiplikationstreuen Koeffizienten (0 oder $(q-1)$–ten Einheitswurzeln) mod. p^{N-n} abbrechend. γ ist eine ganze p–adische Zahl mit in Bezug auf k_0 irrationalen Koeffizienten, und zwar ist genauer

$$\gamma^{(q)} = \gamma + p^n a$$

mit einem gewissen ganzen rational–p–adischen a.

Mittels dieser Darstellung kann ich die schwierige Frage lösen, wann ein zyklischer Körper

$$K = k(\sqrt[p^n]{\eta})$$

unverzweigt ist. Antwort: η *muß sich nach Abspaltung aller* p^n*–ten Potenzen auf den Bestandteil* ζ_n^γ *reduzieren,* d. h. es müssen alle γ_κ durch p^n teilbar sein.

Ich habe das allerdings bisher nur für den Fall $N = n$ bewiesen, wo also kein abbrechendes γ_{e_0} auftritt. Ich glaube aber, es stimmt auch allgemein. Es ergibt sich daraus hoffentlich bald eine entscheidende Förderung der ganzen Theorie der expliziten Reziprozitätsformeln.

Kapitel 5

Register