Inhaltsverzeichnis

0.1 Brief von Erdös an Mordell vom 4.4.1934

Budapest, 4. IV. 1934.

Dear Professor Mordell,

In your paper „The number of solutions of some congruences in two variables“ you have written: „consider the congruence $x^3+y^3+1\equiv 0 \pmod p$; $p\equiv 1 \pmod 3$. The number of its solutions is $N=\xi+p-2$, where ξ is uniquely determined from the integer solutions of $\xi^2+27\eta^2=4p$, $\xi\equiv 1 \pmod 3$ which means that $N=p+O\left(p^{1/2}\right)$ “ Further you say: „it seems likely that no lower exponent than 1/2 can occur, since probably $\eta=1$ for an infinity of values of p, that is, ξ^2+27 is prime for an infinity of values of ξ.“ Now it is easy to prove that for an infinity of values of p, $\xi=O\left(p^{1/2}\right)$, from which it is evident that really 1/2 is the best possible exponent. Permit me to give the sketch of this proof.

By the method of Brun it may be proved that the number of the $4p$ integers until n of the form a^2+27y^2 is $< c_1\frac{\sqrt{n}}{\log n\prod_{p_i|a}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)}$

Now we have to estimate $\sum_{a=1}^{x}\frac{1}{\prod_{p_i|a}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)}$

$$\sum_{a=1}^{x}\frac{1}{\prod_{p_i|a}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)}=\sum_{a=1}^{x}\prod_{p_i|a}\left(1+\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_i^2}+\cdots\right)\leqq$$
$$\leqq x\prod_{p_i<x}\left(1+\frac{1}{p_i^2}+\frac{1}{p_i^3}+\cdots\right)<c_2x$$

The quadruple of each $(3k+1)$ prime has the form $\xi^2+27\eta^2$. We take these primes until $\frac{n}{4}$, the number of these primes for sufficiently large n is $>\frac{n}{16\log n}$. We are going to show that the supposition that in each of these expressions $\xi<\frac{\sqrt{n}}{16c_1c_2}$, leads to a contradiction.

The number until n of the quadruples of the $(3k+1)$ primes of the form $\xi^2+27\eta^2$, $\xi<\frac{\sqrt{n}}{16c_1c_2}$ is $<\sum_{\xi=1}^{\frac{\sqrt{n}}{16c_1c_2}}c_1\frac{\sqrt{n}}{\log n\prod_{p_i|\xi}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)}<\frac{n}{16\log n}$ (conseqence of (1)) And this establishes an evident contradiction. Thus we see that for an infinity of p $\xi^2+27\eta^2=4p$ and $\xi=O\left(p^{1/2}\right)$.

Please, kindly forgive me for the bad composition and for having disturbed you.

Yours very truly

Paul Erdös

0.2 Brief von Hasse an Erdös vom 5.4.1935

H.|TR. 5. April 1935.

Herrn
Dr. E r d ö s
Departm. of Mathemat.
The University Manchester
(England)

Sehr geehrter Herr Erdös!

Es hat mir sehr leid getan, Sie während meines Aufenthalts in England im März dort nicht anzutreffen. Mein Freund Davenport hat mir erzählt, dass Sie glauben, in einem mir naheliegenden Problem durchgekommen zu sein, nämlich im Problem der Dichte derjenigen Primzahlen, die eine gegebene Zahl zur primitiven Wurzel haben. Die Sache liegt nun so, dass ein Schüler von mir hier, Herr Billharz, seit einiger Zeit sich mit diesem Problem abmüht. Deshalb würde es mich besonders interessieren, wenn ich Genaueres von Ihnen über Ihre Ergebnisse erfahren könnte. Für den Fall, dass Sie das Problem bewältigt haben, müsste ich natürlich Herrn Billharz, der schon ein Jahr an dieser Arbeit sitzt, schleunigst ein anderes Thema für seine Dissertation empfehlen, damit er nicht unnötige Arbeits– und Zeitverluste hat.

Mit freundlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

0.3 Karte von Erdös an Hasse vom 6.4.1935

Budapest den 6. IV. 1935

Sehr geehrter Herr Professor!

Empfangen Sie meinen besten Dank für Ihre sehr interessanten Separata, die mir heute aus Manchester zugesandt worden sind. Ich erlaube mir, Ihnen gleichzeitig einige Separata einzusenden.

Mit vorzüglicher Hochachtung

Ihr ergebenster

Paul Erdös

0.4 Brief von Hasse an Erdös vom 8.4.1935

8. April 1935.

Herrn

Dr. P. Erdös,

B u d a p e s t VII.

Abonyi n. 8.

Sehr geehrter Herr Erdös,

Herzlichen Dank für Ihre freundliche Karte und die Zusendung Ihrer interessanten Arbeiten. Ich hatte gerade vor einigen Tagen an Sie geschrieben. Da der Brief nach Manchester gerichtet war, lege ich sicherheitshalber noch einmal einen Durchschlag hier ein. Für eine baldige Antwort wäre ich Ihnen sehr dankbar.

Mit freundlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

0.5 Karte von Erdös an Hasse vom 11.4.1935

Dr. P. Erdös, Budapest, VII. Abonyi u. 8.
Budapest, 11. IV. 1935.

Hochwohlgeboren Herrn
Professor Helmut Hasse

Göttingen
Universität

Sehr geehrter Herr Professor,

besten Dank für Ihr freundliches Schreiben. Es tat mir aufrichtig leid, Sie in Manchester nicht erwartet zu können, will hoffen, dass ich ein anderes Mal mehr Glück haben werde. Ich schreibe heute nur kurz, denn ich muss meinen Beweis noch einmal durchdenken, allerdings benötigt meine Beweisführung die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung. Ich sende meinen Brief Sonnabend ganz sicher ab.

Mit vorzüglichster Hochachtung

Ihr ergebenster

Paul Erdös.

0.6 Brief von Erdös an Hasse vom 14.4.1935

Budapest, 14. IV. 1935.

Sehr geehrter Herr Professor,

Ich habe meinen Beweis durchgedacht. Der Beweis beruht auf einem Satz, welcher — wie es mir scheint — eine Folge der verallgemeinerten Riemann'schen Vermutung ist. Um dies zu entscheiden, kann ich die analytische Idealtheorie nicht genügend gut. Davenport hielt den Satz für wahrscheinlich, doch war er auch unschlüssig. Es handelt sich nämlich um Folgendes: p sei eine Primzahl. Wir betrachten die Kongruenz

$$X^p - 2 \equiv 0 \pmod{q}\,; \quad q \equiv 1 \pmod{p} \cdots \tag{1}$$

Aus dem Primidealsatz folgt ohne Schwierigkeit, dass die Anzahl der Primzahlen $q < n$, welche (1) befriedigen kleiner als $(1+\varepsilon)\frac{n}{p(p-1)\log n}$ ist für genügend grosses n. Nun brauche ich diese Abschätzung für jedes $p < n^{1/3-\delta}$. Mein vermeintlicher Satz lautet daher: Es sei $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ beliebig, $p < n^{1/3-\delta}$, so ist die Anzahl der Primzahlen $q < n$, für welche (1) lösbar ist kleiner als $(1+\varepsilon)\frac{n}{p(p-1)\log n}$.

Wenn der Satz nur für $p < n^{1/4-\delta}$ wahr wäre, wäre mein Beweis vielleicht noch zu retten.

Momentan möchte ich den Beweis nicht niederschreiben, da er doch in der Luft schwebt. Ich wäre Herrn Professor sehr dankbar, wenn Sie mir mitteilen würden ob der Satz richtig ist. Wenn dies entschieden ist, werde ich Ihnen den Beweis mit grosser Freude einsenden. Mit vorzüglichster Hochachtung

Ihr ergebenster

P. Erdös

0.7 Brief von Hasse an Erdös vom 18.4.1935

18. April 1935.

Herrn
Dr. P. Erdös,
B u d a p e s t VII
Abonyi u 8.

Sehr geehrter Herr Erdös!

Herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief. Ob die von Ihnen ausgesprochene Vermutung aus der Primzahlverteilung richtig ist, kann ich auch nicht entscheiden. So muss dann die Frage nach der Gültigkeit der Artinschen Vermutung über die Primzahlen mit vorgegebener Primitivwurzel zunächst offenbleiben.

Im Fall, dass der Grundkörper nicht der rationale Zahlkörper, sondern der Körper der rationalen Funktionen einer Unbestimmten über einem endlichen Konstantenkörper ist, habe ich die entsprechende Artinsche Vermutung kürzlich bestätigen können. Ich arbeite da zunächst mit Dirichlet–Dichte statt natürlicher Dichte und ferner mit der Produktzerlegung der L–Funktionen nach ihren Nullstellen statt den bloss asymptotischen Abschätzungen und ich komme mit der abgeschwächten Riemannartigen Vermutung aus, dass die obere Grenze der Realteile der Nullstellen für alle in Frage kommenden Funktionen $L_p(s)$ eine Zahl $\alpha < 1$ unabhängig von p ist. Ich habe Herrn Billharz nun an die Ausarbeitung dieser Sache gesetzt.

Mit herzlichen Grüssen

I h r

H. Hasse