Briefwechsel Hasse – Deuring

Version von Sonntag, 16.03.2003

Letztmalig geändert am 4. Oktober 2013

Für PDFLaTeX/hyperref

und LaTeX2e/hyperref

Hasse an Deuring 28.01.35 – 22.01.72
Deuring an Hasse 30.7.33 – 18.01.72

(Ordner "Hasse–Deuring" vollständig)

Inhaltsverzeichnis

1 Letters Hasse–Deuring **10**

1.1 30.07.1933, Deuring to Hasse 11
D. schickt Ms. der Arbeit über Klassenzahl 1. Diese Arbeit wurde dann von H. im Zbl und in JFM referiert.

1.2 12.10.1933, Deuring to Hasse 12
Kommentare zu H.s Referat. Van der Waerden hat elementaren Beweis des Artinschen Hilfssatzes.

1.3 15.08.1934, Deuring to Hasse 13
D. bedankt sich, dass sich H. in Göttingen für ihn eingesetzt hat. D. schickt Ms. für Zetafunktion quadr. Formen für Crelles J.

1.4 19.09.1934, Hasse to Deuring 14
H. will D.'s Habilitationsschrift in Crelles Journal publizieren.

1.5 29.11.1934, Deuring to Hasse 15
D.s Ass.Stelle in Leipzig läuft am 1.5.1935 ab. Kann D. dann nach Göttingen? Frage zum Hauptidealsatz.

1.6 12.12.1934, Hasse to Deuring 17
Zur Kapitulation von Idealen. Zum Einheitenhauptgeschlecht. Arnold Scholz, OFG Schilling.

1.7 06.01.1935, Deuring to Hasse 18
D. wird Papiere zur Dr.habil.-Prüfung in Göttingen einreichen.

1.8 28.01.1935, Hasse to Deuring 19
Ore wird in Göttingen erwartet. H. wird D.s Habilitationsgesuch schnellstens weiterleiten.

1.9 20.03.1935, Deuring to Hasse 20
Habil. Kolloquium soll gleich nach Ostern stattfinden. Ungenauigkeiten in D.s Bericht über Algebren.

1.10 12.04.1935, Deuring to Hasse 21

D. ist beunruhigt und wünscht, noch vor Ostern mit H. zu sprechen. D.s Ass.Stelle in Leipzig läuft am 30.6. aus, aber van der Waerden wird Verlängerung beantragen. D. wird Enzyklopädie-Artikel schreiben.
1.11 15.04.1935, Hasse to Deuring 22
D.s Habil.Kolloquium ist für den 24.4. angesetzt. D. soll am 23.4. in Math. Ges. Göttingen einen Vortrag halten.
1.12 16.04.1935, Deuring to Hasse 23
D. wird über die Habilitationsschrift vortragen.
1.13 18.04.1935, Hasse to Deuring 24
D.s Habil.Kolloquium doch erst am 2.5. Aber Termin für Vortrag in Math. Ges. bleibt am 23.4. Weyl hat vorgestern telegraphiert, dass Emmy Noether gestorben ist.
1.14 12.06.1935, Deuring to Hasse 25
D. will jetzt Antrag auf Dozentur in Göttingen stellen. D. wird in einigen Tagen die Disposition des Enzyklopädieartikels schicken.
1.15 14.06.1935, Hasse to Deuring 26
Betr. Antrag auf Dozentur in Göttingen. Betr. Enzyklopädieartikel.
1.16 17.06.1935, Deuring to Hasse 27
Antwort auf H.s vorangegangenen Brief.
1.17 22.10.1935, Deuring to Hasse 28
D. schickt die Arbeit von Schilling zurück. Viel Kritik.
1.18 17.11.1935, Deuring to Hasse 31
D. hat Note von Chevalley referiert, in der die Klassenkörpertheorie von analytischen Methoden befreit wird. Vorbereitung auf Probevorlesung.
1.19 18.11.1935, Hasse to Deuring 32
Termin für Probevorlesung.
1.20 02.12.1935, Hasse to Deuring 33
Neuer Termin für Probevorlesung.
1.21 07.01.1936, Deuring to Hasse 34
D. schickt Seminaraufzeichnungen von E. Noether zurück. Nicht geeignet für Publ. D. schickt ein Ms. für Crelle.
1.22 09.01.1936, Hasse to Deuring 35
Dank für Sendung. H. wird übermorgen in Leipzig sein, um van der Waerden zu treffen.
1.23 09.05.1936, Deuring to Hasse 36

D. schickt Einleitung zur Arbeit über Korrespondenzen algebraischer FuKp.
1.24 11.05.1936, Hasse to Deuring 37
Dank für Einleitung. H. ist sicher, dass damit die Grundlage für R.V. gelegt ist. H. meint, er könne damit zusammen mit eigenen Überlegungen einen Beweis der R.V. geben. – H. fährt für einige Tage nach Kbg. zu einem Vortrag.
1.25 28.05.1936, Hasse to Deuring 38
Kommentare zu D.s Einleitung. H.s Arbeiten zum elliptischen Fall noch nicht alle erschienen. H. möchte D.s Arbeit, wenn sie aufgeschrieben ist, für Crelle haben.
1.26 29.05.1936, Deuring to Hasse 39
D. schickt Ms. Teil I. Aber ein abschliessender Paragraph fehlt noch. Genauere Untersuchg. d. Mult.Ringes soll in Teil II gegeben werden. Kommentare zum Ansatz von D. Normen sind positiv!
1.27 04.06.1936, Hasse to Deuring 40
Kommentare zu §1 der Arbeit. H. arbeitet zusammen mit H.L.Schmid.
1.28 09.06.1936, Deuring to Hasse 42
Dank und Antwort auf H.s Kommentare.
1.29 11.06.1936, Hasse to Deuring 44
Weitere Kommentare. Evtl. Möglichkeit einer erneuten Antragstellung für Dozentur in Göttingen. Aber: Erst dann, wenn von der Fachschaft kein Widerstand ausgeht. Teichmüller!
1.30 16.07.1936, Deuring to Hasse 46
Zur Transformation der Differentiale. Darstellung des Mult.ringes im Konst.körper. – Anfang August wieder in Leipzig.
1.31 10.08.1936, Deuring to Hasse 47
Deuring hat bei Severi nachgesehen und dort alles ziemlich explizit gefunden.
1.32 04.09.1936, Hasse to Deuring 48
H. wird mit Auto zur DMV-Tagung nach Salzbrunn fahren und auf dem Weg in Leipzig halten, um D. zur Mitfahrt abholen.
1.33 04.12.1936, Hasse to Deuring 49

H. hat mit H.L.Schmid die Arbeit von D. noch einmal genau durchgesehen. Sowohl nach Darstellung als auch nach Beweismethode ist Überarbeitung notwendig. Ankündigung der algebraisch-geometrischen Woche vom 6.-8.1.1937. Jung, van der Waerden, Geppert.

1.34 14.12.1936, Hasse to Deuring 51

Dank für Zusage. H. sendet Programm.

1.35 05.03.1937, Hasse to Deuring 52

Dank für D.s Brief. Knesers Beweis für die Invarianz des Residuums. Weitere Kommentare zu D.s Manuskript.

1.36 08.03.1937, Hasse to Deuring 54

D. erhält aus dem Nachlass von Emmy Noether die Œvres von Galois.

1.37 18.03.1937, Hasse to Deuring 55

H. hat sich noch einmal mit D.s Arbeit beschäftigt. Dabei ergaben sich formale und sachliche Verbesserungen. D. soll evtl. Änderungswünsche äußern.

1.38 21.03.1937, Deuring to Hasse 69

D. hat nur einen wesentlichen Änderungsvorschlag. D. kann den Ablieferungstermin für seinen Enzyklopädie-Artikel nicht einhalten. D. wird ab 1.4. in Jena sein.

1.39 01.04.1937, Hasse to Deuring 70

Zusammenhang von D.s Korrespondenzentheorie mit H.s Meromorphismen von jacobischen Funktionenkörpern.

1.40 19.06.1937, Deuring to Hasse 72

Korrespondenzentheorie im Hinblick auf Klassenkörperkonstruktion. D. bittet H. um nähere Schilderung seiner Meromorphismentheorie für abelsche Funktionenkörper. D. plant eine Note in den Göttinger Nachrichten über die Algebraisierung der komplexen Multiplikation. D. wird voraussichtlich zum Vortrag Severis nach Göttingen kommen.

1.41 21.06.1937, Hasse to Deuring 73

H. wird D. mündlich informieren über seine Meromorphismentheorie abelscher Funktionenkörper. D.s Note über Algebraisierung der komplexen Multiplikation hochwillkommen.

1.42 07.08.1937, Hasse to Deuring 74

Anfrage wegen Note zur Algebraisierung der komplexen Multiplikation.

1.43 17.08.1937, Deuring to Hasse 75

D. will auf der DMV-Tagung in Bad Kreuznach über komplexe Multiplikation vortragen.
1.44 28.09.1937, Deuring to Hasse 76
D. hat in Kreuznach vorgetragen. Will nun gleich ein ausführliches Konzept für Crelle einreichen.
1.45 05.10.1937, Hasse to Deuring 77
H. erwartet D.s Manuskript über komplexe Multiplikation in nicht allzu ferner Zukunft. Frage zur Deuringschen Vereinfachung des Beweises der Riem.Verm. im elliptischen Falle.
1.46 11.10.1937, Deuring to Hasse 78
Antwort auf H.s Frage.
1.47 10.05.1938, Hasse to Deuring 79
Anfrage nach dem Stand von D.s Enzyklopädie-Artikeln. Wie weit ist D. mit der Korrespondenzenarbeit für Crelle? H. will in seinem Seminar mit Siegel die Sätze von A.Weil und Siegel auf rein algebraische Art beweisen.
1.48 25.05.1938, Deuring to Hasse 80
D. hatte dauernd Scherereien (politischer Art) wegen der Dozentur, konnte daher in der letzten Zeit nichts rechtes arbeiten. D. wird Enzyklopädie-Artikel bald schicken. Der Aufbau ohne Benutzung der Klassenkörpertheorie steht noch nicht drin, aber D. schildert den Gedankengang.
1.49 02.11.1938, Deuring to Hasse 82
D. findet nicht mehr seinen Beweis des Residuensatzes. H. möchte bitte D.s Brief zurückschicken. Zur weiteren Ausarbeitung der komplexen Mult. ist D. noch nicht gekommen.
1.50 07.07.1939, Deuring to Hasse 83
D. schickt an H. das gewünschte Beispiel eines Funktionenkörpers vom Geschlecht 2 Mit Multiplikatoren, die Nullteiler sind.
1.51 10.08.1939, Deuring to Hasse 85
D. hat einen Fehler in seinem Korrespondenzen-Manuskript II entdeckt. D. meint, dass nun H.s Theorie der abelschen Funktionenkörper herangezogen werden müsse.
1.52 19.08.1939, Hasse to Deuring 86
H. sendet D.s Manuskript Korrespondenzen II mit Kommentaren und Verbesserungsvorschlägen zurück..
1.53 24.08.1939, Deuring to Hasse 96
D. legt überarbeitetes Manuskript vor.

1.54 29.08.1939, Hasse to Deuring 98
Dank für die schnelle Wiedereinsendung des Manuskripts. Es ist jetzt zum Druck eingesandt. Ein weiteres Erscheinen des Journals ist im Falle eines Krieges ungewiß.
1.55 16.02.1949, Deuring to Hasse 99
Aus Hamburg. D. lädt H. zu einem Vortrag nach Hamburg ein.
1.56 18.02.1949, Cl.Hasse to Deuring 100
Frau Hasse teilt mit, dass ihr Mann z.Zt. nicht in Göttingen ist, sondern in Berlin, das gegenwärtig unter der sowjetischen Blockade steht.
1.57 03.03.1949, Hasse to Deuring 101
Aus Berlin. Dank für Einladung nach Göttingen. H. schlägt dafür einen Termin im Sommer vor. H. stellt eine Reihe von Themen zur Auswahl. An Pfingsten wird H. nach Oberwolfach fahren. H. bittet D. weiterhin um Mitarbeit an der Enzyklopädie. H. dankt D. für die Rohrbach gegebene Zusage, an der Herausgabe von Crelle mitzuwirken. H. erwähnt seine beiden Zahlentheorie-Bücher, die in Kürze erscheinen sollen.
1.58 25.10.1949, Deuring to Hasse 105
Crelle-Angelegenheiten. Enzyklopädie.
1.59 04.05.1950, Deuring to Hasse 106
D. hat einen Ruf nach Göttingen angenommen. Für die Neubesetzung in Hamburg steht H. an erster Stelle.
1.60 06.01.1951, Hasse to Deuring 107
Aus Hamburg. Anfrage wg. Behrens.
1.61 29.01.1951, Deuring to Hasse 108
Aus Göttingen. D. kann in diesem Semester nicht nach Hamburg kommen. Enzyklopädie. Über Behrens. Mit dem Gitterpunktproblem ist D. nicht durchgekommen.
1.62 27.05.1953, Deuring to Hasse 110
Zu H.s Arbeiten über komplexe Multiplikation.
1.63 30.05.1953, Deuring to Hasse 112
Dank für Aufklärung. Kritik an Arbeiten H.s zur komplexen Multiplikation.
1.64 05.06.1953, Hasse to Deuring 114
D.s Kritik wurde schon von Artin bald nach Erscheinen geäußert. Verweis auf H.s Arbeit im Takagi-Festheft.
1.65 17.07.1953, Hasse to Deuring 115

H. hat jetzt D.s Arbeit über Multiplikatorenringe durchgesehen. Wunderschöne Resultate. H. sendet einige Notizen, die er sich am Rande der Arbeit gemacht hatte. Frage zur Erzeugung elliptischer Funktionenkörper.
1.66 23.07.1953, Deuring to Hasse 117
Die von H. erfragte Erzeugung elliptischer Funktionenkörper gibt es wahrscheinlich nicht. Das meint auch A. Weil. Korrekturen zu D.s Arbeit über Multiplikatorenringe.
1.67 04.08.1953, Deuring to Hasse 119
Planung der Vorträge auf der DMV-Tagung, über Zetafunktionen arithmetischer Funktionenkörper.
1.68 22.01.1954, Hasse to Deuring 120
Über Paul Wolf.
1.69 21.06.1955, Hasse to Deuring 121
Über die Affäre der Nicht-Einladung H.s zum Internationalen Mathematischen Kolloquium Tokio-Nikko 1955.
1.70 02.07.1955, Deuring to Hasse 122
Deuring ist bestürzt, nimmt zu der Angelegenheit Tokio-Nikko Stellung. Über Iyanaga. Über Enzyklopädie-Angelegenheiten.
1.71 08.07.1955, Hasse to Deuring 124
Dank für D.s Anteilnahme. In der Angelegenheit Enzyklopädie gibt es Probleme, die mit der deutsch-deutschen Teilung zusammenhängen, da der herausgebende Teubner-Verlag sich auch in Ost-West geteilt hat.
1.72 29.07.1955, Hasse to Deuring 126
Nochmal über Tokyo-Nikko. Chevalley?
1.73 16.09.1955, Deuring to Hasse 127
Aus Tokyo. Auf dem Kongress hat es höchst interessante Dinge zu hören gegeben, insbesondere über komplexe Multiplikation der abelschen Funktionen. Shimura und Taniyama. Grüße auch von Suetuna.
1.74 30.10.1956, Hasse to Deuring 128
H. bittet um Rückgabe handgeschriebener Manuskripte über komplexe Multiplikation. H. hatte diese 1953 an D. geschickt. Von D.s Enzyklopädie-Artikel über komplexe Multiplikation hatte H. kürzlich einen Korrekturbogen bekommen.
1.75 07.11.1956, Deuring to Hasse 129

D. schickt H.s Aufzeichnungen zurück. Kommentare zu H.s Arbeit über Zetafunktionen von Funktionenkörpern vom Fermatschen Typ. Zur birationalen Invarianz der Zetafunktion.
1.76 13.11.1956, Hasse to Deuring 131
Dank für die Rücksendung von H.s Aufzeichnungen. H. hat inzwischen die 2. und 3. Mitteilung von Deuring über Zetafunktionen gelesen. Wunderschöne Resultate.
1.77 17.04.1957, Deuring to Hasse 132
D. fragt als Enzyklopädie-Herausgeber nach dem Stand des Artikels über die Arithmetik der hyperkomplexen Zahlen, den H. übernommen hatte. Frage nach dem Artikel von Scholz für die Enzyklopädie. Weiteres über die Zetafunktionen eines elliptischen Funktionenkörpers mit singulärer Invariante.
1.78 08.05.1957, Hasse to Deuring 133
Antwort: Der Enzyklopädie-Artikel über die Arithmetik hyperkomplexe Systeme kann erst dann geplant werden, wenn der Artikel über die Algebra der hyp. Syst. vorliegt.
1.79 14.06.1957, Hasse to Deuring 134
Über den Besuch von Alexandroff.
1.80 10.07.1959, Hasse to Deuring 135
Dank für die Zusendung des Enzyklopädie-Artikels über komplexe Multiplikation. H.s Schüler Klaus Alber kann sich in seiner Dissertation darauf stützen.
1.81 16.05.1960, Hasse to Deuring 136
Bitte um Gutachten für Curt Meyer.
1.82 11.06.1960, Deuring to Hasse 137
D. sende Gutachten über Curt Meyer. D. erbittet Gutachten über Richert.
1.83 28.06.1960, Hasse to Deuring 138
Dank und Antwort.
1.84 07.03.1961, Deuring to Hasse 139
Anfrage zur Besetzung der Nachfolge Reidemeister.
1.85 15.03.1961, Hasse to Deuring 140
Zur Frage der Neubesetzung schließ sich H. der Stellungnahme von Artin voll und ganz an (Köcher). Wird D. zur Zahlentheorie-Tagung nach Oberwolfach kommen?
1.86 11.01.1972, Deuring to Hasse 141
Bitte um Gutachten über Maus.

1.87 13.01.1972, Hasse to Deuring 142
H. erbittet Schriftenverzeichnis von Maus.
1.88 18.01.1972, Deuring to Hasse 143
Antwort: Verzeichnis der Schriften von Maus.
1.89 22.01.1972, Hasse to Deuring 144
H. sendet Gutachten über Maus.

2 Miscellaneous **145**
2.1 13.10.1959, Klaus Alber to Deuring 146
Alber berichtet über den Inhalt seiner Hamburger Dissertation.

3 Name Index **149**

4 Subject Index **151**

Kapitel 1

Letters Hasse–Deuring

1.1 30.07.1933, Deuring to Hasse

LEIPZIG 30. 7. 1933

LIEBER HERR HASSE,

ich schicke Ihnen der Einfachheit halber einen Durchschlag der Note, die in der Math. Z. erscheinen soll, mit der Bitte um gelegentliche Rückgabe. Die Ergänzungen von Hecke kenne ich nicht, ich will aber mit ihm darüber korrespondieren. Ich erinnere mich, dass Frl. Noether davon sprach, Hecke hätte den Beweis „bis auf einen Faktor $\frac{1}{2}$". Wahrscheinlich handelt es sich dabei um Folgendes: in meiner Note wird für die Folge $-4d_1$, $-4d_2, \ldots$ der Diskriminanten mit der Klassenzahl 1 $\lim_{\nu\to\infty} \mathrm{e}^{id_\nu t} = c(t)$ gezeigt, falls $\zeta(\frac{1}{2}+it) = 0$. Also gilt auch $\lim_{\nu\to\infty} \mathrm{e}^{id_\nu t} = c(t)$, wenn t Linearkombination von Nullstellenordinaten ist. Nun sucht man beliebige t durch solche Linearkombinationen zu approximieren, um etwa gleichmässige Konvergenz von $\mathrm{e}^{id_\nu t}$ auf einer überall dichten t–Menge zu beweisen, was einen Widerspruch gäbe. Aber bei diesem Unternehmen wird man durch die Abhängigkeit des Fehlers $\mathcal{O}\big(\mathrm{e}^{\frac{d^{\frac{1}{2}}}{t}}\big)$ von t gestört. Stünde $\mathcal{O}\big(\mathrm{e}^{\frac{d^{1+\varepsilon}}{t}}\big)$ oder etwas Ähnliches, so würde es wohl gehen.

Mit den besten Grüssen

Ihr

M. DEURING

1.2 12.10.1933, Deuring to Hasse

LEIPZIG, 12 OKTOBER 1933.

LIEBER HERR HASSE,

Ihre Bemerkungen über zwei Vorzeichenfehler in meiner Arbeit sind richtig. Ich glaube mich auch erinnern zu können, Satz 9 (also Formel (2') Ihres Referates) bei der Korrektur verbessert zu haben. Satz 9 ist richtig, aber in der Einleitung falsch zitiert. Wie mir allerdings der Fehler in Satz 7 hat entgehen können, während ich Satz 9 verbessert habe, ist mir jetzt unerklärlich. Dass die zweite Formelzeile von unten auf Seite 414 verdruckt ist, ist Ihnen wohl auch aufgefallen.

Auf reell quadratische Körper habe ich meine Untersuchungen schon ausdehnen wollen. Es geht nicht ganz so glatt, aber es scheint, dass man für das Produkt von Klassenzahl und Regulator ähnliches wird zeigen können, wie für die Klassenzahl allein bei den imaginären quadratischen Körpern.

Es interessiert Sie übrigens sicher auch, dass van der Waerden für das Existenztheorem (0.3) Ihrer Arbeit über die Algebrenklassengruppe einen elementaren Beweis gegeben hat, als Verallgemeinerung des Spezialfalles $r = 1$, der in der Ausarbeitung Ihrer Vorlesung steht.

Mit den besten Grüssen

Ihr

M. DEURING

1.3 15.08.1934, Deuring to Hasse

Leipzig 15. 8. 1934.

Lieber Herr Hasse,

durch Fräulein Noether weiss ich, dass Sie sich in Göttingen für mich eingesetzt haben. Darf ich Ihnen meinen herzlichsten Dank dafür aussprechen ? Ich würde mich natürlich sehr freuen, wenn ich nach Göttingen käme. Meine Habilitation hatte ich seinerzeit bis nach der Amerikareise aufgeschoben; inzwischen kamen neue Bestimmungen, die Ihnen ja bekannt sind. Ich habe mich daher zum Staatsexamen gemeldet und hoffe, es bald erledigt zu haben. Mit dem vorgeschriebenen Lagerdienst ist es so, dass die Einberufungen von der Dozentenschaft ausgehen, einen Einfluss auf die Einberufungen hat aber anscheinend die örtliche Dozentenschaft nur in geringem Masse, wir müssen also einfach abwarten. Soweit die äusseren Bedingungen. Die Arbeit, die ich als Habilitationsschrift beabsichtige, kennen Sie ja, wie mir Frl. Noether mitgeteilt hat.

Diesem Brief lege ich ein Manuskript einer Arbeit bei, die ich Sie bitte, in das Crelle'sche Journal aufzunehmen. Die Sache ist schon über ein Jahr alt; ursprünglich dachte ich, in der gegebenen Richtung weiter zu arbeiten, es hat sich aber nichts ergeben. Aber im Zusammenhang mit der letzten Arbeit von Herrn Schmidt scheint es mir auch so interessant genug.

Mit den besten Grüssen

Ihr

Max Deuring

Annahme auf Formular zugesagt [1]
22. 8. 34

[1] Added by H. Hasse

1.4 19.09.1934, Hasse to Deuring

19. September 34

Lieber Herr Deuring !

Auf eine Bemerkung von Fräulein Noether hin, habe ich gestern mit dem Dekan über die Frage des Druckes Ihrer beabsichtigten Habilitationsarbeit gesprochen. Es besteht keinerlei Hinderungsgrund dafür, dass Sie diese Arbeit schon jetzt zum Druck geben. Sie können sie dann später gedruckt als Habilitationsarbeit einreichen. Ich würde es begrüssen, wenn Sie dieser Anregung bald Folge leisteten und möchte Sie in diesem Falle bitten, mir die Arbeit für Crelles Journal zu geben. Hoffentlich gelingt es Ihnen bald, die Vorbedingungen für Ihre Habilitation zu schaffen.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.5 29.11.1934, Deuring to Hasse

Leipzig,
29. November 1934.

Lieber Herr Hasse,

Kürzlich habe ich bei der Dozentenschaft noch einmal darauf gedrungen, daß man mich im Frühjahr zum Geländesportlager einberuft; es ist jetzt ziemlich sicher, daß es geschehen wird. Dann werde ich mich also im Sommer habilitieren können, wenn, wie ich annehme, die Einberufung zur Dozentenakademie dann schnell folgt. Meine Assistentenstelle hier läuft am 1. Mai 1935 ab. Besteht die Möglichkeit, daß ich im Sommer eine Stelle in Göttingen erhalten kann ? Ich will mich beizeiten um diese Angelegenheit kümmern.

Zweitens habe ich noch eine mathematische Frage an Sie, die den Hauptidealsatz betrifft. In ihrem Bericht über das Reziprozitätsgesetz wird (S. 173) als mögliche Vermutung hingestellt, daß in einem unverzweigten abelschen Körper K/k stets eine Untergruppe der Ordnung $(K:k)$ in der Klassengruppe des Grundkörpers k kapituliert. Ist diese Vermutung bewiesen, durch Beispiele widerlegt oder unentschieden ? Auf diese Frage bin ich gestoßen, wie ich den Beweis dafür, daß der Index der einem zyklischen Körper K/k zugeordneten Idealgruppe in k mindestens gleich $(K:k)$ ist, auf beliebiges galoissches K/k (zunächst einfach durch Uebertragung der Rechnung) verallgemeinern wollte. Bedeutet Δ die Gruppe der Zahlen von K, welche Ideale von k darstellen, α die Zahlen von k, E die Einheiten von K, so ist die Anzahl der kapitulierenden Idealklassen ja gleich $(\Delta : \alpha\mathsf{E})$ — im unverzweigten Fall. Dieser Index kann leicht umgewandelt werden in einen Ausdruck, der dem Herbrandschen Indexquotienten für den zyklischen Fall entspricht. Es gelang mir auch, zu zeigen, daß man sich für die Berechnung dieses Ausdruckes auf die Herbrand–Minkowskische Einheitenuntergruppe beschränken darf, aber ich konnte ihn dann noch nicht endgültig bestimmen, vermute aber, daß er im abelschen Fall gleich $(K:k)$, im galoisschen Fall gleich dem Index der Kommutatorgruppe der Galoisschen Gruppe von K/k ist. Ist die Vermutung richtig, so ist damit der Hauptidealsatz mit einer Methode bewiesen, die eine Verallgemeinerung der Hilbertschen Methode für den zyklischen Fall darstellt; darüber hinaus wäre der eingangs genannte Satz als richtig erkannt, wenn dieser aber falsch ist, so wäre das ein Fingerzeig für meine Frage.

Mit den besten Grüssen

Ihr Max Deuring

1.6 12.12.1934, Hasse to Deuring

12. Dezember 34

Lieber Herr Deuring !

Heute möchte ich zu dem mathematischen Teil Ihres Briefes vom 29. November Stellung nehmen. Dass im unverzweigt–abelschen K/k eine Kapitulation mindestens von der Ordnung $(K : k)$ stattfindet, ist bisher weder bewiesen noch widerlegt, höchstwahrscheinlich aber richtig, jedoch scheint es aussichtslos, diesen verschärften Hauptidealsatz, wie überhaupt den Hauptidealsatz bei Hilbert auf Hilbeets Wegen, d. h. ohne Zweistufigkeitsbetrachtungen zu beweisen. Schon für zyklische K/k vom Primzahlpotenzgrad ist Zahlberichtssatz 91 nur gültig, wenn man unter E Einheiten der Zwischenkörper und Wurzeln daraus versteht, und das hat zur Folge, dass keine *zyklische* Kapitulation der Ordnung $(K : k)$ stattzufinden braucht, sondern nur überhaupt eine von dieser Ordnung. All dieses entnehme ich einer Mitteilung von Arnold Scholz, der Ihnen demnächst ausführlicher darüber berichten wird. Im übrigen lege ich ein Blatt mit Aufzeichnungen meines Schülers Dr. Schilling bei, das sich mit der Frage der Berechnung des Index des Einheitenhauptgeschlechtes beschäftigt. Hoffentlich nützt Ihnen dies Material etwas.

Ihre für Crelle eingereichte Arbeit geht nächster Tage in Korrektur.

Mit herzlichen Grüssen

stets Ihr

H. Hasse

1.7 06.01.1935, Deuring to Hasse

Göttingen,
6. Januar 1935

Lieber Herr Hasse,

ich habe Herrn Professor Reich erst am Sonnabend sprechen können. Es gibt keine Schwierigkeiten für die Dr. Habil. Prüfung, Herr Prof. Reich war der Ansicht, dass ich die Prüfung noch in diesem Semester erledigen kann, ich will daher mein Gesuch noch in dieser Woche einreichen.

Mit den besten Grüssen verbleibe ich

Ihr

Max Deuring

1.8 28.01.1935, Hasse to Deuring

Göttingen,
den 28. Januar 1935.

Lieber Herr D e u r i n g ,

bitte entschuldigen Sie, dass ich versehentlich den wieder beigefügten Brief an Herrn Ore, der mir auf meinen Schreibtisch gelegt worden war, geöffnet und gelesen habe.

Herr Ore ist bis jetzt nicht hier. Seit seinem letzten Brief vom 26.September habe ich von ihm nichts wieder gehört. In diesem Brief schrieb er mir: "Ich werde im Frühjahr ein halbes Jahr Urlaub nehmen und reise im Januar 1935 nach Norwegen und werde dann nach Deutschland und vielleicht Zürich und Paris reisen. Wenn Sie in Göttingen sind, werde ich versuchen, da zu arbeiten. Ich habe nicht einmal das neue Institut gesehen."

Ihr Habilitationsgesuch liegt mir jetzt vor. Ich lasse es schnellstens weiter gehen.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.9 20.03.1935, Deuring to Hasse

Rieneck, 20. März 1935.

Lieber Herr Hasse,

ich möchte Ihnen gern davon Mitteilung machen, dass ich zur Zeit im Dozentenlager bin, dies wird mir später angerechnet, ich habe mich in Berlin besonders erkundigt. Auch dem Dekanat in Göttingen habe ich dies mitgeteilt, damit das Kolloquium zur Habilitation nicht zu früh angesetzt wird. Immerhin wäre es mir angenehm, wenn es dann gleich nach Ostern stattfindet; und wenn Sie darauf hinwirken könnten, wäre ich Ihnen sehr dankbar.

In meinem Berichte über „Algebren" sind einige Ungenauigkeiten, die wesentlichen sind die folgenden:

1. In dem § über einfache Algebren ist nicht ausdrücklich gesagt, dass „Teilalgebren" immer nur solche sind, deren Eins mit der der ganzen Algebra zusammenfällt; beim unbefangenen Lesen wird das stören.
2. In VI, § 8 ist Satz 2 nicht für die allgemeinste Maximalordnung bewiesen. Er kann aber umgekehrt leicht aus Satz 1 gewonnen werden.
3. In VII, § 5 ist der „elementare" Beweis von Satz 10 falsch. Jedoch habe ich mir einen richtigen rein algebraischen Beweis überlegt.
4. Im Literaturverzeichnis fehlt Deuring [4] (in IV, § 3 erwähnt), diese Arbeit ist noch nicht erschienen.

Hoffentlich finden Sie diese Fehler nicht zu störend.

Mit den besten Grüssen

Ihr sehr ergebener

Max Deuring

1.10 12.04.1935, Deuring to Hasse

Leipzig, 12. April 1935

Lieber Herr Hasse,

besten Dank für Ihren Brief. An sich würde ich gern mit Ihnen sprechen, wenn ich zum Kolloquium nach Göttingen komme, da dies aber immerhin 8 bis 14 Tage nach Ostern sein kann, und ich etwas beunruhigt bin, dachte ich daran, noch vor Ostern in Göttingen mit Ihnen zu sprechen.

Mit meiner Assistentenstelle hier ist es so, dass sie erst zu Semesterschluss, also am 30. Juni abläuft. Herr van der Waerden will Verlängerung auf jeden Fall beantragen, ob sie durchgeht, steht noch nicht fest.

Den Enzyklopädieartikel denke ich in etwa einem Jahre fertig zu haben. Disposition und nähere Angaben werde ich Ihnen in nächster Zeit mitteilen.

Mit den besten Grüssen

Ihr

Max Deuring

1.11 15.04.1935, Hasse to Deuring

15. April 1935.

Lieber Herr Deuring!

Herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief, ich habe noch einmal mit verschiedenen Stellen über Sie gesprochen und habe jetzt beim Dekan die Festsetzung des Termins für Ihr Kolloquium erreicht. Wenn nicht noch etwas dazwischen kommt, was der Dekan vorsichtshalber ausdrücklich offen liess, soll es bereits am 24. April nachmittags 5 Uhr sein. Danach halte ich es nicht für erforderlich, dass Sie noch vor Ostern hierher kommen, falls Sie nicht sowieso die Absicht hatten, die Ostertage hier bei ihrer Frau Mutter zu verbringen.

Es beruhigt mich, dass Ihre Assistentenstelle nun doch anders als Sie mir früher einmal sagten, bis zum 30. Juni läuft und sogar unter Umständen auch noch weiter verlängert werden kann.

Ich würde es sehr begrüssen, wenn Sie ganz unabhängig von Ihrem Kolloquium am Dienstag, den 23. April abends hier in der Mathematischen Gesellschaft einen Vortrag halten könnten. Wenn Sie das tun wollen, so bitte ich um umgehende Mitteilung und Angabe des Themas. Hier würde ich von mir aus aus bestimmten Gründen anregen, dass Sie kein abstrakt algebraisches Thema wählen. Für einen solchen Vortrag könnten wir Ihnen eine Vergütung von 50 Mk geben.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.12 16.04.1935, Deuring to Hasse

Leipzig, 16. April 1935

Lieber Herr Hasse,

meinen besten Dank für Ihren Brief und Ihre Einladung zum Vortrag. Ich würde gern über „Nullstellen von Zetafunktionen" vortragen, also über meine Habilitationsschrift, und hoffe, dass dies den genügenden Abstand von der abstrakten Algebra hat. Hoffentlich ist es recht, wenn ich erst am Dienstag 18^{07} in Göttingen ankomme, ich bin über Ostern in Berlin.

Mit den besten Grüssen

Ihr

Max Deuring

1.13 18.04.1935, Hasse to Deuring

18. April 1935.

Lieber Herr Deuring!

Nun hat der Dekan mir doch noch eine Aenderung in dem vorgesehenen Termin für Ihr Kolloquium mitgeteilt. Da der Rektor es so wünschte, soll es erst am Donnerstag, den 2. Mai um 5 Uhr nachmittags stattfinden. Da ich nun aber inzwischen Ihren Vortrag in der Mathematischen Gesellschaft angesetzt habe und die Einladungen bereits verschickt sind, möchte ich das nicht gern wieder rückgängig machen. Ich bitte Sie also, doch schon am 23. hier zu sein. Falls Sie darum eine besondere Reise haben, wird das Institut diese vergüten. Bitte bemessen Sie Ihren Aufenthalt hier nicht zu kurz, denn es wäre gut, wenn Sie bei dieser Gelegenheit sich schon einmal dem Rektor und vielleicht auch der Dozentenschaft vorstellten. Die Ankunftszeit 18^{07} oke. Der Vortrag beginnt um 20 Uhr c. t.

Von Weyl erhielt ich vorgestern die telegraphische Nachricht, dass Emmy Noether am vorigen Sonntag an einem plötzlichen Zusammenbruch nach einer erfolgreichen Tumor–Operation gestorben ist. Sie wurde am Mittwoch in Bryn Mawr eingeäschert.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.14 12.06.1935, Deuring to Hasse

LEIPZIG, 12. JUNI 1935.

LIEBER HERR HASSE,

kurz vor Pfingsten erhielt ich von der Fakultät in Göttingen die Mitteilung, daß das Ministerium meiner Habilitation zugestimmt hat. Daher will ich jetzt an das Ministerium den Antrag auf Zulassung zur Dozentur stellen. Eine Aufforderung, von der Sie mir Anfang Mai sprachen, ist nicht erfolgt, wenn ich davon absehe, daß das Rektorat den Nachweis der arischen Abstammung meiner als solche nicht existierenden Ehefrau verlangte.

In einigen Tagen werde ich Ihnen die Disposition des Enzyklopädieartikels schicken. Anfang Juli werde ich für einige Tage nach Göttingen kommen und hoffe, Sie dann besuchen zu können.

Mit den besten Grüssen

Ihr

MAX DEURING

1.15 14.06.1935, Hasse to Deuring

14. Juni 35

Lieber Herr Deuring!

Ich freue mich sehr, dass das Ministerium Ihnen ohne die befürchtete Verzögerung den Dr. habil. bestätigt hat. Ich werde nun auch von hier aus den Antrag stellen, Ihnen nach Absolvierung der Dozentenakademie hier eine Dozentur mit Lehrauftrag für analytische Zahltheorie zu geben. Bitte lassen Sie mich doch gleich wissen, wann Sie mit der Einberufung zur Dozentenakademie rechnen. Es freut mich auch zu erfahren, dass man *nicht* von befreundeter Seite an Sie herangetreten ist, um Sie von sich aus zu einem Verzicht auf Göttingen zu veranlassen. Die Disposition für den Enzyklopädieartikel schicken Sie bitte an Teubner, der alles sammelt und gleich Abschriften in nötiger Anzahl herstellt. Dann bitte ich um einen etwa 6 Schreibmaschinenzeilen langen Auszug für die Vorankündigung.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.16 17.06.1935, Deuring to Hasse

Leipzig, 17. 6. 1935

Lieber Herr Hasse,

besten Dank für Ihren Brief. Ich will Ihnen nur mitteilen, dass ich die Einberufung zur Dozentenakademie für einen der Kurse in diesem Sommer rechne, es finden in Kiel und Rittmarshausen je drei Kurse zu drei Wochen hintereinander statt. Meine Meldung habe ich schon Anfang April abgegeben.

Mit den besten Grüssen

Ihr

M. Deuring

1.17 22.10.1935, Deuring to Hasse

Leipzig 22. 10. 1935

Lieber Herr Hasse,

anliegend schicke ich Ihnen die Schillingsche Arbeit zurück mit einigen kleineren Bemerkungen: Auf Seite 4, im letzten Absatz von Abschnitt 1, muss noch gesagt werden, dass ein Element von k durch seinen Divisor bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist, was keineswegs selbstverständlich ist. Es wird in der zweiten der unter (5) zitierten Arbeiten von van der Waerden in der nötigen Allgemeinheit bewiesen. Vielleicht meint Herr Schilling dies in dem Satze: "Jedes Element α aus k besitzt...." und hat sich nur in der Formulierung vertan. Abschnitt 2 ist eine schöne Zusammenfassung der Sätze in meiner Arbeit, die Beweise auszuführen war natürlich nicht nötig.

Das Zerlegungsgesetz auf Seite 10 ist leider auf die angegebene Weise nicht begründbar. Denn der zitierte (falsche, aber korrigierbare) Beweis von Satz 10 auf Seite 122 in meinen "Algebren" ist nicht übertragbar. Ich halte es auch nicht für wahrscheinlich, dass es ein Zerlegungsgesetz in dieser einfachen Form überhaupt gibt, weil zu dem Zerlegungstypus eines Primdivisors die Struktur der Zerlegungsgruppe gehört, die im Zahlkörperfall, aber nicht hier, schon durch den Grad gegeben ist. Das ergibt sich ja daraus, dass *alle* Untergruppen der galoisschen Gruppe als Zerlegungsgruppen auftreten. Bei dieser Gelegenheit möchte ich Ihnen eine Bemerkung über die arithmetischen Beweise in der Klassenkörpertheorie mitteilen, die Sie sicher interessiert.

Der Satz: Zu vorgeschriebenen Invarianten $\left(\frac{A}{p}\right)$, die die drei Bedingungen

(1) $$\sum_p \left(\frac{A}{p}\right) \equiv 0 \pmod 1$$

(2) $$2\left(\frac{A}{p_\infty}\right) \equiv 0 \pmod 1$$

(3) $$\text{Nur für endlich viele } p \text{ ist } \left(\frac{A}{p}\right) \not\equiv 0 \pmod 1$$

erfüllen, gibt es stets eine Algebra über k
kann rein arithmetisch aus der Summenrelation (1) abgeleitet werden:

Nach Chevalley–Nehrkorn folgt die Klassenkörpertheorie aus (1) rein arithmetisch. Insbesondere: Bedeutet K/k einen zyklischen Körper n–ten Grades, $a\,(A)$ die Gruppe der zum Führer f von K/k teilerfremden Ideale von $k\ (K)$ und ν die primen Normenreste modulo f von K/k, so ist $a/\nu\, NA$ zyklisch von der Ordnung n und die Untergruppe $\nu\, NA$ von a ist durch die Relation $\left(\frac{K}{a}\right) = 1$ gekennzeichnet. Wird ein Ideal $a = \prod_{p \nmid f} p^{\varrho_p}$ durch die Exponenten ϱ_p bestimmt, so kann die Gruppe $\nu\, NA$, weil sie zyklisch vom Grade n unter a liegt, durch eine Relation

$$\text{(4)} \qquad \sum_p \varrho_p \varepsilon_p \equiv 0 \pmod{n} \quad \text{oder} \quad \sum_p \varrho_p \varepsilon_p / n \equiv 0 \pmod{1}$$

gekennzeichnet werden, in der ε_p gewisse ganze Zahlen sind. Bis auf ganzzahlige Faktoren ist (4) auch die *einzige* Relation für die Untergruppe $\nu\, NA$. Aus der Kennzeichnung von $\nu\, NA$ mittels des Artinsymbols ergibt sich, dass man für die ε_p die Exponenten ε_p in einer Darstellung $\left(\frac{K}{p}\right) = s^{\varepsilon_p}$ der Frobeniussubstitutionen durch einen erzeugenden Automorphismus S von K/k zu nehmen hat. Aus der Einzigkeit der Relation (4) folgt, dass es zu vorgeschriebenen Invarianten $\left(\frac{A}{p}\right)$, die ausser (1), (2) und (3) auch noch die Bedingungen

$$\text{(5)} \qquad \left(\frac{A}{p}\right) \equiv 0 \pmod{1} \quad \text{für} \quad p \mid f$$

$$\text{(6)} \qquad (K_p : k_p) \left(\frac{A}{p}\right) \equiv 0 \pmod{1}$$

erfüllen, eine Algebra $A = (\nu,\, K,\, S)$ gibt.

Sind jetzt beliebige Invarianten gemäss (1), (2), (3) vorgegeben, so bestimmen wir zunächst in k eine total negative Zahl α und eine Zahl β, die an der Stelle p_∞ positiv ist, falls $\left(\frac{A}{p_\infty}\right) \equiv 0 \pmod{1}$ ist, die aber an der Stelle p_∞ negativ sein soll, wenn $\left(\frac{A}{p_\infty}\right) \equiv ?? \pmod{1}$ gilt. Wir setzen $(\beta,\, \sqrt{\alpha},\, S) = B$ und bilden die neuen Invarianten

$$\left(\frac{C}{p}\right) \equiv \left(\frac{A}{p}\right)\left(\frac{B}{p}\right) \pmod{1}.$$

Mittels des van der Waerdenschen Existenztheorems bestimmen wir einen zyklischen Kreiskörper K/k, der den Bedingungen

$$(K_p : k_p)\left(\frac{C}{p}\right) \equiv 0 \pmod 1$$

genügt, und zu dessen Verzweigungsprimstellen q die Invarianten $\left(\frac{C}{q}\right) \equiv 0 \pmod 1$ gehören. Es gibt dann, wie wir gesehen haben, eine Algebra $C = (\nu, K, S)$; $\quad A = C \times B$ ist die gesuchte Algebra.

Ich bleibe mit den besten Grüßen

Ihr

M. Deuring

1.18 17.11.1935, Deuring to Hasse

Leipzig 17. 11. 1935

Lieber Herr Hasse,

Es freut mich, dass Sie meine Mitteilung über die Algebren interessiert hat. Gerade habe ich die Note von Chevalley in den Comptes Rendus für das Zentralblatt referiert, in der die Klassenkörpertheorie von den analytischen Methoden befreit. Jetzt ist also der ganze Komplex Klassenkörper– und Algebrentheorie "elementar" begründbar ! Vorläufig aber kaum in einer Form, die dem Anfänger das Eindringen erleichtert.

Die Vorbereitung auf meine Probevorlesung habe ich beendet, so dass ich wie eine geladene Kanone darauf warte abgefeuert zu werden. In der Mitteilung von der Fakultät vom 1. 11. war Raum für ein vorläufiges Datum der Vorlesung, der aber nicht ausgefüllt worden war.

Mit den besten Grüssen

Ihr

M. Deuring

1.19 18.11.1935, Hasse to Deuring

18. November 1935.

Lieber Herr Deuring!

Besten Dank für Ihren Brief. Ich habe daraufhin gleich mit unserem Dekan gesprochen. Durch einen plötzlichen Wechsel im Dekanat hat sich die Sache etwas verzögert. Der Dekan hat mir jetzt versprochen, die Probevorlesung Anfang Dezember und zwar an einem Mittwoch und darauffolgenden Sonnabend stattfinden zu lassen. Ich hoffe, dass der Zünder in Ihrer Kanone nicht beschädigt ist und sie noch so lange dicht hält.

Mit besten Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.20 02.12.1935, Hasse to Deuring

2. Dezember 1935.

Lieber Herr Deuring!

Ich habe heute nochmal mit dem Rektor telefoniert. Danach sieht es so aus, als ob man Ihre Antritts–Vorlesung — aus Zeitmangel des Rektors — auf 2 Stunden verkürzen und an *einem* Vormittag stattfinden lassen will. Wenn es allen Andern passt, wird wohl Mittwoch, der 11. Dezember gewählt werden, vormittags 9 – 11. Ich wollte Sie dies schon heute auf alle Fälle wissen lassen, damit Sie sich darauf einstellen. Sicher steht der Termin noch nicht, Sie erhalten noch offizielle Nachricht.

Für Ihr Manuskript recht herzlichen Dank. Ich habe es bereits nach Berlin geschickt. Ich freue mich sehr, Sie bald zu sehen und verschiedenes mit Ihnen besprechen zu können, vor allem mathematische Fragen. Ich habe ziemlich viel Neues gefunden.

Mit bestem Gruss

Ihr

H. Hasse

1.21 07.01.1936, Deuring to Hasse

Leipzig,
7. Januar 1936

Lieber Herr Hasse,

anliegend schicke ich Ihnen die Seminaraufzeichnungen von E. Noether zurück. Meiner Ansicht nach kommt nichts davon für die Publikation in Frage. Der Beweis des Diskriminantensatzes ist ja schon von ihr selbst in Crelle 157 veröffentlicht worden und der Beweis des Differentensatzes steht ja im Prinzip in Ihrer Arbeit über p–adische Schiefkörper und in hinreichender Allgemeinheit in meinen "Algebren".

Ich füge noch ein Manuskript bei, das ich Sie bitte in Crelle aufzunehmen. Die Bearbeitung des nachgelassenen Manuskriptes von E. Noether wird noch einige Zeit erfordern.

In meiner Angelegenheit habe ich nichts wieder gehört; auch keine Entscheidung von Berlin, die ja wohl in irgend einer Form gemacht werden muß.

Ich bleibe mit den besten Grüssen

Ihr

M. Deuring

1.22 09.01.1936, Hasse to Deuring

Göttingen,
den 9. Januar 1936.

Lieber Herr Deuring!

Besten Dank für Ihr Manuskript für Crelle, das ich gerne annehmen werde, ebenso für die Rücksendung der Noether–Papiere, die ich an F. Noether zurückgesandt habe.

Von Berlin habe ich noch nichts gehört, auch ich nehme an, dass irgendeine Aeusserung erfolgen wird.

Ich werde wahrscheinlich übermorgen in Lpzg. sein, um mit v. d. Waerden zu sprechen.[1]

Mit besten Grüssen

Ihr

H. Hasse

[1]Siehe den Brief von vdW. an Hasse vom 17.12.35. H. möchte mit vdW. über die Zukunft von Deuring sprechen.

1.23 09.05.1936, Deuring to Hasse

Leipzig O 27, 9. Mai 1936

Lieber Herr Hasse,

in den letzten Wochen habe ich versucht, Ihre Ergebnisse für elliptische Funktionenkörper auf Körper höheren Geschlechtes zu verallgemeinern. Das ist mir bis zur Aufstellung des Multiplikatorenringes und dem Beweis seiner Algebraizität gelungen. Da Sie vielleicht auf diesem Gebiet schon weiter sind, schicke ich Ihnen die Einleitung einer geplanten Arbeit. In ihr sind die algebraischen Ergebnisse nur angegeben. Die Beweise sind zwar vollständig durchgeführt, aber noch in einem monströsen Zustand.

Mit den besten Grüssen

Ihr

M. Deuring

1.24 11.05.1936, Hasse to Deuring

11. Mai 36

Lieber Herr Deuring,

herzlichen Dank für die Zusendung Ihrer Einleitung. Ich muß das sehr genau studieren, wozu ich heute und in den nächsten Tagen allerdings beim besten Willen nicht kommen werde, denn ich muß für einige Tage zu einem Vortrag nach Königsberg.

Jedenfalls bin ich sicher, daß Sie damit die Grundlage insbesondere für die Bewältigung der Riemannschen Vermutung in beliebigen Funktionenkörpern gelegt haben. Ich bin überzeugt, daß ich durch Verknüpfung der eigenen Ansätze, die ich selbst in den letzten Wochen überdacht habe, mit Ihren Resultaten einen Beweis der Riemannschen Vermutung geben kann. Ich will mir die Sache baldmöglichst genauer durchdenken, auch im Hinblick auf eine glattere Darstellung Ihrer Beweise.

Herzlichst

Ihr

H. Hasse

1.25 28.05.1936, Hasse to Deuring

28. 5. 36

LIEBER HERR DEURING,

ich bin nun zur etwas genaueren Durchsicht Ihrer Zusendung gekommen und finde das bestätigt, was mein erster flüchtiger Eindruck war. Sehr dankbar wäre ich Ihnen, wenn Sie mir die genaue Definition der Divisorenfunktion $\mathfrak{D}(\mathfrak{q})$ angeben könnten, am liebsten alle Möglichkeiten für diese Definition, sowohl die für den Beweis als auch die für das Verständnis zweckmäßigste. Inzwischen werden Sie aus meiner Arbeit No 2 in Crelles Journal gesehen haben, daß ich im elliptischen Falle jetzt ganz ähnlich bei der Begründung des Additionstheorems der Meromorphismen vorgegangen bin. Wenn ich recht sehe, fehlt in Ihrem Aufbau aus Gründen, die mit der Mehrvariabligkeit des Körpers der Abelschen Funktionen zusammenhängen, das Analogon zu der inhaltlichen Bedeutung der Meromorphismen als Operationen für die *Elemente* des Funktionenkörpers. Daher wird man für den Beweis desjenigen Theorems, das ich 'Normenadditionsformel' genannt habe (genaue Ausführung folgt in meiner Arbeit No 3 im übernächsten Crelle–Heft), bei höherem Geschlecht eine völlig neue Methode ausdenken müssen, wenn man sich nicht entschließt, den dornigen Weg zu gehen und die Meromorphismen durch Teilkörperabbildungen des zugehörigen Körpers der Abelschen Funktion zu definieren.

Haben Sie Ihre Arbeit über diese Dinge schon in endgültiger für den Druck bestimmter Gestalt vorliegen ? Und dürfte ich sie dann für Crelle haben ?

Mit herzlichen Grüßen

stets Ihr

H. HASSE

1.26 29.05.1936, Deuring to Hasse

Leipzig 29. 5. 1936

Lieber Herr Hasse,

als ich Ihren Brief erhielt, war ich schon entschlossen, Ihnen den ersten Teil meiner Arbeit als Teil I für Crelle zu schicken. Alles in einem wäre wohl zu lang. Dem beiliegenden Manuskript soll noch ein Paragraph folgen, der nur eine Zusammenfassung des Vorhergehenden bis zur Aufstellung des Multiplikatorenrings enthält. Die genauere Untersuchung dieses Ringes soll in Teil II gegeben werden.

Ich glaube, dass aus meinem Manuskript klar hervorgeht, warum man für $g = 1$ mit Meromorphismen auskommt: weil sich in KK' jede Divisorenklasse der Ordnung 0 in der Gestalt P/o mit konstantem o und P vom Grade 1 schreiben lässt. Schon von hier aus leuchtet es ein, dass man für höheres g auch die P höheren Grades heranziehen muss, als Abbildungen von K nicht auf Teilkörper von K, aber doch auf Teilkörper von Erweiterungen endlichen Grades von K. Die für die Riemannsche Vermutung wesentliche Eigenschaft der komplexen Multiplikatoren scheint mir darauf zurück zu gehen, dass die Normen als durch Gradzahlen definiert positiv sind. Das ist mir aber noch nicht ganz klar. Die für die Theorie der Teilungskörper Abelscher Funktionen wesentlichen Kongruenzen für Teilwerte erhält man natürlich nach Ihrem Vorbild für den elliptischen Fall ohne weiteres.

Mit den besten Grüssen

Ihr

M. Deuring

1.27 04.06.1936, Hasse to Deuring

4. 6. 36

Lieber Herr Deuring,

vielen herzlichen Dank für die Zusendung Ihres Manuskriptes. Wenn ich Sie recht verstanden habe, soll diesem Manuskript zunächst noch ein Paragraph folgen, der mit in den ersten Teil aufgenommen werden soll. Ich warte also mit dem Einsenden zum Druck, bis ich diesen restlichen Paragraphen in den Händen habe.

Zusammen mit Herrn H. L. Schmid habe ich mich an eine eingehende Lektüre Ihres Manuskriptes gemacht. Wir kommen sehr langsam vorwärts, weil wir alles ganz genau verstehen wollen. Bis jetzt haben wir nur die Einleitung und § 1 durchgearbeitet. Dazu möchte ich folgende Fragen stellen, dir mir auch zur Aufklärung eine gewisse Änderung des Textes notwendig zu machen scheinen.

Auf S. 2 oben, Zeile 3 haben Sie die wichtige Bedingung ausgelassen, daß die betreffenden Funktionen *im Großen eindeutig* sein sollen. Ich würde das ausdrücklich hinzufügen und nicht nur implizit in den nicht bei allen Mathematikern gleichen Funktionsbegriff auf einer Fläche hineinlegen, ganz besonders, da es nachher bei den Korrespondenzen auf den Wegfall dieser Bedingung ankommt.

Am Schluß desselben Absatzes würde ich es aus genau dem gleichen Grunde für zweckmäßig halten zu sagen, daß die betreffende n–deutige Funktion bei geschlossenen Wegen auf der Fläche lediglich eine Permutation ihrer n Zweige erfährt. Außerdem ist das Wort 'analytisch' genauer zu erläutern, nämlich dahin, daß die einzelnen Zweige Potenzreihen in einer festen Wurzel der Ortsuniformisierenden sind. Vielleicht ist es sogar noch besser einfach zu sagen, daß die Korrespondenz aus den n Wurzeln einer (nicht notwendig irreduziblen) algebraischen Gleichung mit Koeffizienten aus K besteht. Damit ist meiner Ansicht nach eine viel klarere Definition gegeben als die von Ihnen gewählte recht unbestimmte Definition. Dasselbe wiederholt sich dann auf S. 6, 1. Abs. Dort haben Sie zur Abwechslung statt analytisch geschrieben 'regulär oder algebraisch verzweigt'. Sie wissen doch selbst, wie mannigfach der Gebrauch der Worte 'regulär' und 'analytisch' ist, so daß es zum mindesten notwendig ist zu sagen, in welchem der landläufigen Sinne Sie die Worte meinen. Auch macht es einige Schwierigkeiten zu verstehen, was 'gemessen in den Ortsuniformisierenden von F und F' ' bedeutet. Was gemeint ist, scheint mir zu sein, daß eine n–blättrige Überlagerungsfläche von F konform auf F' abgebildet wird. Dies ist vielleicht die beste Ausdrucksweise.

Ich nehme an, daß das Wort 'reguläranalytisch' auf S. 7 Mitte im folgenden Sinn verstanden ist : unverzweigt polfrei.

Sehr gut hat mir Ihr auf S. 10 geführter Nachweis gefallen, daß man für Einzelpunkte der Fläche die Ausnahmeklassen durch Parallelverschiebung beseitigen kann. Ich bin gespannt auf das rein algebraische Äquivalent im späteren Teil.

Nächstens mehr.

Herzlichst Ihr

H. Hasse

1.28 09.06.1936, Deuring to Hasse

Leipzig 9. 6. 1936.

Lieber Herr Hasse,

herzlichen Dank für Ihre Bemerkungen zu meiner Arbeit. Vorerst: in der Tat soll Teil I noch einen § 4 erhalten, ich werde ihn sobald wie möglich schicken. Ihre Aussetzungen an den Formulierungen in § 1 gebe ich zu, vor allem deswegen, weil § 1 ja der Erleichterung des Verständnisses dienen soll. Am besten ist es wohl, eine Korrespondenz als konforme Abbildung einer Überlagerungsfläche von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{F}'$ zu definieren. Vergleichen Sie doch bitte die angeführte Arbeit von Hurwitz.

Ich will nun als Antwort auf Ihren Brief vom 5. 6. begründen, warum ich die Korrespondenzen *nicht* als Körperabbildungen aufgefasst habe. Körperabbildungen gehören zu *Prim*divisoren $\mathfrak{P}$ von $K'K$; die allgemeine Korrespondenz gehört aber zu einem zusammengesetzten Divisor, und zusammengesetzte Divisoren müssen betrachtet werden, weil sich die Klassen nullten Grades von KK' nicht wie im Falle $g' = 1$ durch Primdivisoren (ersten Grades) repräsentieren lassen. Zweitens bilden die Meromorphismen keinen Ring, weil die Nacheinanderausführung für $K^* \neq K$ nicht definiert ist (siehe § 3). Die Korrespondenzen als Homomorphismen der Divisorengruppe von K in die von K' bilden dagegen (falls $K' \cong K$) einen Ring, der einzige (im Grunde nicht schwierige) Punkt ist die multiplikative Abgeschlossenheit. Bemerken Sie bitte auch, dass keine „normierten" Korrespondenzen auftreten, die in Ihrer Arbeit doch einigen Kummer verursachen.

Bei der Entstehung der Arbeit war gerade diese Loslösung von den Körperabbildungen der entscheidende Schritt; nachdem ich dieses und die Unnötigkeit der Normierung erkannt hatte, habe ich die Definition der Korrespondenzen und die Sätze in § 2 erraten, um sie schliesslich mit „roher Gewalt" zu beweisen. Darum sind die Beweise auch so fürchterlich. Ich würde mich freuen, wenn Sie radikale Vereinfachungen finden.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

M. Deuring

1.29 11.06.1936, Hasse to Deuring

11. Juni 36

Lieber Herr Deuring,

besten Dank für Ihren freundlichen Brief. Ich sehe sehr wohl die Gründe und Schwierigkeiten, die Sie zu Ihrer Definition veranlaßt haben. Immerhin glaube ich, durch eine geeignete Ausdehnung des Begriffes der Körperabbildung, nämlich Zulassung auch hyperkomplexer Systeme, das Gewünschte zu erreichen. Selbstverständlich hat das nur Zweck, wenn sich dadurch wirklich ein mehr verständlicher Beweis für den schwierigen Satz 4 ergibt. Ermutigt werde ich zu dieser Hoffnung dadurch, daß im elliptischen Fall der Satz 4 eben auf Grund der Definition der Punktabbildung durch Nacheinanderausführung von Körperabbildungen ganz trivial wird.

Wenn ich nur mehr Zeit hätte, um mich uneingeschränkt mit allen diesen Dingen zu beschäftigen. Ich hoffe, daß Herr Schmid, mit dem ich bisher Ihre Arbeit zusammen durchstudiert habe, sich bald so weit eingearbeitet hat, daß er nach Anleitung von mir weiterbohren kann. Er hat jedenfalls das größte Interesse daran.

Ich werde dann die Formulierungen im kontinuierlichen Teil entsprechend klarer machen. Auch darf ich mir wohl die Freiheit nehmen,

1) unzählige Interpunktionszeichen zu setzen, die Sie ganz ausgelassen haben, und

2) diese oder jene kleinere stilistische oder sachliche Änderung vorzunehmen. Beim Lesen sind mir schon eine ganze Reihe solcher Dinge aufgefallen. Ich werde Ihnen dann das so präparierte Manuskript vor der Drucklegung noch einmal vorlegen.

Gestern habe ich mit Herrn Ministerialrat Mentzel einmal über die Frage Ihrer Zukunft gesprochen. Er hat mir bestätigt, daß prinzipiell die Möglichkeit besteht, daß Sie nach geraumer Zeit noch einmal Gelegenheit haben, sich um eine Dozentur zu bewerben. Das muß dann auf Antrag des hiesigen Rektors geschehen. Er selbst sagte, daß er es auf alle Fälle für zweckmäßig hielte, noch etwa ein Jahr zu warten. Von mir aus möchte ich hinzufügen, daß es sich wohl kaum lohnen wird, einen erneuten Antrag dieser Art von hier aus zu stellen, solange der gegenwärtige Rektor noch im Amt ist. Es ist immerhin anzunehmen, daß dies nach einem Jahr nicht mehr der Fall ist. Dann können wir ja die Situation noch einmal prüfen. Es wäre insbesondere wünschenswert, daß dann von vornherein sicher steht, daß von der hiesigen Fachschaft kein Widerstand mehr ausgeht. Solange aber Herr Teichmüller noch hier ist, kann ich dafür keine Garantie übernehmen. Ich wollte Ihnen jedenfalls die Lage, wie ich sie sehe, und wie sie sich aus der Auskunft Herrn Mentzels ergibt, ganz offen schildern.

Mit herzlichen Grüßen

stets Ihr

H. Hasse

1.30 16.07.1936, Deuring to Hasse

Göttingen, 16. Juli 1936

Lieber Herr Hasse,

Ich habe mir die Frage der Transformation der Differentiale überlegt und bin zu der folgenden Definition gekommen: Für eine prime Korrespondenz P bilde man die Spur Sp_{K/K_0} des Differentialvektors erster Gattung $\mathrm{d}u_o$ von K und drücke sie durch den Differentialvektor erster Gattung $\mathrm{d}u$ von K aus: $\mathrm{Sp}_{K/K_0}\mathrm{d}u_0 = C_P \mathrm{d}u$. Die C_P bilden die gesuchte Darstellung des Multiplikatorenrings im Konstantenkörper. Ich habe gefunden, daß mir diese C_P auch über eine prinzipielle Schwierigkeit bei der arithmetischen Untersuchung des Invariantenkörpers im "vollständig singulären" Fall hinweghilft (Konstruktionsproblem). Die Schwierigkeit bei der obigen Definition der C_P liegt natürlich darin, zu zeigen, daß aus $P_i^{n_i}$?? $Q_j^{m_j}$ $C_{P_i^{n_i}}$?? $C_{Q_j^{m_j}}$ folgt.

Ab Anfang August bin ich wieder in Leipzig und hoffe Ihnen dann bald das verbesserte Manuskript vorlegen zu können.

Mit den besten Grüßen

Ihr

M. Deuring

1.31 10.08.1936, Deuring to Hasse

Leipzig 10. 8. 1936

Lieber Herr Hasse,

ich habe heute Ihre beiden Briefe erhalten. Ich habe sofort bei Severi nachgesehen : Weil (und damit Lefschetz) hat natürlich ganz recht, alles steht ziemlich explizit bei Severi, allerdings mit vollständig verschiedenen Beweisen. Eine Publikation meiner Beweise scheint mir aber doch nicht überflüssig, weil sie zeigen, dass man auch vom arithmetischen Standpunkt an die Fragestellungen und ihre Lösungen kommt (abgesehen davon, dass die alten Beweise daraufhin untersucht werden müssten, ob sie im allgemeinen Fall gehen, was aber wohl der Fall sein wird. Ich muss mich erst genauer einarbeiten).

In Salzbrunn würde ich gern vortragen, ich zögere noch etwas, weil es für mich eine grosse finanzielle Belastung wird, Salzbrunn liegt so im Fernen Osten. Ich hoffe aber, dass es sich machen lässt.

Mit den besten Grüssen

Ihr

Max Deuring

1.32 04.09.1936, Hasse to Deuring

4. 9. 36

LIEBER HERR DEURING,

zur Fahrt nach Salzbrunn werde ich hier (mit W. Franz und H. L. Schmid) am Sonnabend den 12. 9. morgens starten. Wir werden zwischen 1 und 2 in Leipzig eintreffen und dort wahrscheinlich eine Mittagspause einlegen. Bitte lassen Sie mich doch wissen, ob wir Sie schon dazu abholen sollen oder erst hinterher.

Auch wäre ich dankbar, wenn Sie in Anbetracht der 4 Mitreisenden einen nicht allzu großen Koffer verwenden würden.

Ich hoffe am Sonnabend noch bis Dresden oder etwas weiter zu kommen.

Mit besten Grüßen

Ihr

H. HASSE

1.33 04.12.1936, Hasse to Deuring

4. 12. 36

LIEBER HERR DEURING,

zunächst möchte ich Ihnen sagen, daß wir, d. h. Schmid und ich in den letzten Wochen Ihre Arbeit über Korrespondenzen erneut ganz eingehend durchgesehen haben. Sie dürfen nicht böse sein, wenn wir noch immer den Eindruck haben, daß die Darstellung sowohl der Form nach als auch der Methode in einzelnen Beweisen nach noch verbesserungs– und abrundungsbedürftig ist. Um nur einen von mehreren Punkten zu nennen: beim Beweis des Restsatzes (andere Art der Charakterisierung von Korrespondenzen) ist es absolut unnötig, die konstanten Primdivisoren nachträglich mit einem besonderen Schlußverfahren zu behandeln. Der Beweis von nicht konstanten Primdivisoren überträgt sich völlig auch auf konstante.

Ein anderer Punkt: der Beweis des Satzes, daß aus einer Kongruenz in einem Oberkörper auf eine Kongruenz nach der Norm in einem Unterkörper geschlossen werden kann, von endlich vielen Ausnahmen abgesehen, schien uns in der ersten Fassung, wo also die Theorie der Zerlegungsgruppe benutzt wurde, viel durchsichtiger als jetzt.

Herr Schmid hat sich nun der dankbaren Aufgabe unterzogen, das ganze Manuskript noch einmal durchzuarbeiten und dabei alle die Einzelpunkte, die sich uns beim Lesen ergeben haben, entsprechend zu berücksichtigen. Er wird also ein ziemlich weitgehend verändertes Manuskript herstellen, das wir Ihnen dann zur Begutachtung vorlegen werden. Ich hoffe, Sie werden beim Vergleich dieser neuen Fassung mit Ihrer alten sich der Einsicht nicht verschließen können, daß es im Interesse des Verständnisses Ihrer sehr wichtigen und schönen Arbeit gut ist, wenn wir sie in dieser Neufassung drucken.

Eben fällt mir noch eine andere Sache ein, die Ihnen offenbar entgangen ist: Die Tatsache, daß die konstanten Primdivisoren auch hinsichtlich der Teilbarkeit (genaue Exponenten) stets durch die ihnen zugeordneten Divisoren des Unterkörpers ersetzt werden dürfen — für Kongruenzrelationen nach Ihnen ist das trivial — , folgt erst aus dem Beweis des Satzes über Funktionalprimdivisoren. Es ist also methodisch unrichtig, diese Behauptung gleich zu Beginn bei Einführung der konstanten Primdivisoren auszusprechen, so als ob sie ganz selbstverständlich wäre, und sie dann nachher bei der andern Auffassung noch einmal ausführlich zu beweisen.

Daß die Transformationen und die Korrespondenzen einen Ring bilden, ist nicht richtig, jedenfalls dann nicht, wenn man das beiderseitige Distributivgesetz verlangt. In diesem scharfen Sinne bilden nur die Multiplikationen einen Ring, die andern verhalten sich bei der Multiplikation wie lineare Funktionen mit konstantem Glied bei Ineinanderschachtelung. Überhaupt haben Sie wohl versäumt ausdrücklich zu zeigen, daß bei der Multiplikation der Korrespondenzen das einseitige Distributivgesetz gilt, und daß bei der Multiplikation der Multiplikationen auch das Distributivgesetz nach der andern Seite gilt. Da dies sehr wichtig ist, darf es nicht einfach übergangen werden.

Nun komme ich noch mit etwas ganz anderem. Wir wollen hier vom 6. bis 8. I. 37 eine algebraisch–geometrische 'Woche' abhalten, zu der bisher die Herren Jung und van der Waerden ihre Mitwirkung zugesagt haben. Ich wollte außerdem noch Herrn Geppert und Sie bitten, uns bei dieser Gelegenheit Vorträge zu halten. Van der Waerden wird voraussichtlich zwei Stunden über Multiplizität und vielleicht noch zwei weitere Stunden über Moduln algebraischer Körper reden, Jung 4 Stunden über Stellen, Primteiler, Stellentransformation und Divisorenklassen bei algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher. Von Geppert erwarte ich noch Antwort, und Sie möchte ich bitten, daß Sie uns bei dieser Gelegenheit über Ihre Theorie der Korrespondenzen vortragen mit besonderer Berücksichtigung dessen, was Sie noch nicht in Ihr Manuskript aufgenommen haben. Sie können dafür drei Stunden bekommen. Wir wollen in diesen Tagen die Vorlesungen der Interessierten ausfallen lassen und jeden Vormittag und Nachmittag zwei Stunden zusammenkommen. Reisekosten werden natürlich ersetzt. Für Unterkunft brauchen wir wohl in Ihrem Fall nicht zu sorgen, da Sie ja hier Ihr Elternhaus haben, wir werden aber für die Vorträge noch ein Honorar bieten können. Ich möchte Sie bitten, daß Sie doch Ihre Mitwirkung zusagen. In diesem Fall bitte ich um baldigste Mitteilung der Titel, die Sie für Ihre Vorträge im Programm aufgenommen wissen wollen.

Mit herzlichen Grüßen

Ihr

H. Hasse

1.34 14.12.1936, Hasse to Deuring

14. 12. 36

LIEBER HERR DEURING,

Besten Dank für Ihre freundliche Zusage. Beiliegend das eben als Entwurf zusammengestellte Programm. Dass ich Sie an den Schluss gesetzt habe, werden Sie verstehen. Denn Ihre Dinge sind entschieden am höchsten, weil abstraktesten.

In der Ringfrage muss ein Missverständnis trivialer Art vorliegen, über das wir uns dann am besten mündlich unterhalten, ebenso wie überhaupt über die ganze Sache Ihrer Arbeit.

Einstweilen herzliche Grüsse

Ihr

H. HASSE

Ich bitte dann noch um Mitteilung Ihrer Ankunftszeit, damit wir für einen würdigen Empfang am Bahnhof sorgen können.

1.35 05.03.1937, Hasse to Deuring

5. 3. 37

Lieber Herr Deuring,

vielen Dank für Ihren Brief vom 15. 2., den ich erst heute in Ruhe habe lesen können.[1] Ich entsinne mich, daß ich damals, als ich mich mit den Differenzialen beschäftigte, schon auf den von Ihnen jetzt im einzelnen ausgeführten Beweis aufmerksam geworden war, der ja wohl im wesentlichen schon im Hensel–Landsberg steht, oder jedenfalls seinem Gedankeninhalt nach für jeden Kenner dieses Buches auf der Hand liegt, daß ich ihn aber nicht genommen habe, weil er die Spurformel für die Residuen, die für diese Anwendung die Hauptsache war, nicht mit lieferte.

Übrigens hat mir Kneser im Jahr 1935 auch eine erhebliche Vereinfachung für meinen Beweis der Invarianz des Residuums mitgeteilt, den ich Ihnen nachstehend kurz skizzieren will. Er vermeidet fast alle Rechnung und auch die vorübergehende Körpererweiterung durch die Nullstelle α auf S. 57 meiner Arbeit.

Um zu beweisen, daß in (4) $\overline{c}_{-1} = c_{-1}$ ist, nehme ich an, die Reihe (2) beginne mit $c_{-k}t^{-k}$. (Für $k \leq 0$ ist nichts zu beweisen). Man stellt leicht fest, daß $\overline{c}_{-1}$ nur von $e_1, \ldots, e_k$ abhängen kann. Es genügt danach zu beweisen, daß man bei gegebenen $e_1 (\neq 0), \ldots, e_k$ die Reihe (3) immer so fortsetzen kann, daß das Residuum sich nicht ändert. Eine Substitution (3) mit gegebenen Koeffizienten $e_1, \ldots, e_k$ läßt sich aber durch eine Folge von Substitutionen $t_1 = e_1 u$, $t_{r+1} = t_r + f_r t_p^{p+1} + \cdots \quad (r = 1, \ldots, k-1; \quad t = t_k)$ erzeugen. Bei der ersten ändert sich das Residuum offenbar nicht; die übrigen setze ich in der Gestalt

$$t = u/(1 + \mathrm{e}u^r)$$

[1]Dieser Brief von Deuring ist nicht vorhanden. Hasse hat ihn später an Deuring zurückgeschickt, weil dieser darum gebeten hatte. Siehe Brief vom 2.11.1938.

an. Dann ist (vgl. S. 56, Z. 7 v. u.)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^{\nu+1}}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} &= \frac{(1+\mathrm{e}u^r)^{\nu+1}}{u^{\nu+1}}\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}u^r} - \frac{r\mathrm{e}u^r}{(1+\mathrm{e}u^r)^2}\right) \\
&= u^{-\nu-1}\big((1+\mathrm{e}u^r)^{\nu} - r\mathrm{e}u^r(1+\mathrm{e}u^r)^{\nu-1}\big)\,.
\end{aligned}$$

Entwickelt man (bei $\nu \geq 1$) nach dem Binomialsatz, so kommt u^{-1} nur vor, wenn ν ein Vielfaches rs von r ist, und zwar mit dem Koeffizienten

$$\binom{rs}{s}\mathrm{e}^s - r\mathrm{e}^s\binom{rs-1}{s-1} = 0\,.$$

Augenblicklich bin ich mit der Durchsicht des von H. L. Schmid angefertigten Manuskriptes Ihrer Arbeit befaßt. Ich selbst habe mich noch einmal mit dem Beweis des jetzigen Hilfssatzes (3) beschäftigt, der die unangenehmsten Beiträge zu den Ausnahme–Primdivisoren liefert. Das ist der Hilfssatz, durch den der Übergang zu der Kongruenz nach der Norm eines Primdivisors als kleinstem Multiplum im Unterkörper begründet wird. Ich habe hier noch eine kleine Vereinfachung erzielt. Wie Ihnen Herr Schmid schon schrieb, werde ich Ihre Arbeit in Bd. 177, Heft 2 herausbringen. Heft 1 steht unmittelbar vor dem Erscheinen.

Mit herzlichem Gruß

Ihr

H. Hasse

1.36 08.03.1937, Hasse to Deuring

8. 3. 37

LIEBER HERR DEURING,

Fräulein Noether hat eine Bestimmung hinterlassen, daß einigen ihrer früheren mathematischen Freunde Andenken aus ihrer Bibliothek überlassen werden. Diese Bücher sind an mich gelangt, und gleichzeitig habe ich von F. Noether die Anweisung für die Verteilung erhalten. Danach bekommen Sie: Galois, Oeuvres, was ich Ihnen gleichzeitig zugehen lasse.

Mit besten Grüßen

Ihr

H. HASSE

1.37 18.03.1937, Hasse to Deuring

18. 3. 37

Lieber Herr Deuring,

Ich habe mich in der letzten Woche noch einmal ganz eingehend mit Ihrer schönen Korrespondenzarbeit beschäftigt, nämlich die von Herrn Schmid hergestellte Neufassung vorgenommen und noch einmal gründlich überarbeitet. Dabei haben sich noch mancherlei formale und auch sachliche Verbesserungen ergeben, und so habe ich der Übersichtlichkeit wegen schliesslich ein völlig neues Druckmanuskript hergestellt, das Ihnen Schmid nächster Tage im Durchschlag zugehen lassen will. Das Original habe ich der Eile wegen gleich eingesandt. Schmid meinte, dass Sie wohl sicher mit der nunmehr erreichten endgültigen Fassung einverstanden seien. Immerhin möchte ich Ihnen aber doch Gelegenheit geben, sich dazu noch von sich aus zu äussern. Da es noch ein paar Tage dauern wird, bis die Druckerei mit dem Satz beginnt, könnten dann etwaige Wünsche von Ihnen gerade noch berücksichtigt werden. Es ist nämlich im höchsten Grade unerwünscht, wenn bei der Korrektur noch grössere Änderungen gemacht werden, denn das kostet unverhältnismässig viel Geld.

Ich will Ihnen nun nachstehend im Einzelnen berichten, was ich noch geändert habe, und welche Gründe mich dazu bestimmt haben.

Zunächst das Skelett des Ganzen, die Korrespondenzsätze. Die zerfallen in zwei Gruppen, von denen die eine die Abhängigkeit einer Korrespondenz $a \longrightarrow D(a)$ vom Divisor a betrifft, und die andere die Abhängigkeit vom Divisor D.

Die erste Gruppe besteht ausser Trivialitäten wesentlich aus dem Homomorphiesatz: Aus $a \sim 1$ folgt $D(a) \sim 1$. Man hat dann auf Grund der Korrespondenzdefinition und dieses Satzes vier homomorphe Abbildungen, nämlich

$$\left.\begin{array}{l}\text{Divisorengruppe von } K\\ \text{Divisorengruppe nullten Grades von } K\\ \text{Klassengruppe von } K\\ \text{Klassengruppe nullten Grades von } K\end{array}\right\}\quad \text{in die von } \mathsf{K}.$$

In der zweiten Gruppe hat man vier Sätze nebst ihren formalen und verschärften Umkehrungen, die diesen vier Homomorphismen entsprechen, nämlich aussagen, dass diese vier Homomorphismen umkehrbar eindeutig zugeordnet sind

dem Divisor D

der Restklasse von D nach der Gruppe der konstanten Divisoren

der gewöhnlichen Klasse von D

der Restklasse von D nach der Gruppe der Klassen aus konstanten Divisoren

Die letztere Restklasse von D habe ich die *gröbere Klasse* von D genannt.

Ich habe nun diese Struktur sowohl im algebraischen Teil überall möglichst herausgearbeitet, als auch für die analytischen Betrachtungen in Einleitung und Schluss–§ zugrundegelegt. So bekommt das Ganze ein übersichtliches festes Skelett, das man überall wiedererkennt.

§ 1. Vorbereitende Ausführungen. Hier habe ich, Ihrem Wunsche gemäss, die separable Erzeugbarkeit weggelassen und auch nichts über den Konstantenkörper vorausgesetzt. Soviel ich sehe, braucht man sie nämlich wirklich nicht, wenn man die fraglichen Tatsachen dementsprechend formuliert. Es handelt sich zunächst um den Satz, dass die arithmetischen (bewertungstheoretischen) Primdivisoren $\wp$, die nicht im Nenner von ξ aufgehen, umkehrbar eindeutig den Primidealen $\wp_\xi$ des Integritätsbereichs K_ξ der ξ–ganzen Elemente entsprechen. Das gilt doch wohl sicherlich allgemein. Und auch der für die spätere Anwendung wesentliche Hilfssatz 1, dass diese Primideale $\wp_\xi$, und damit die nicht im Nenner von ξ aufgehenden $\wp$ umkehrbar eindeutig den nicht–konjugierten Realisierungen eines Multiplikationsschemas entsprechen, gilt dann ohne weiteres allgemein. Der springende Punkt für den Beweis dieser Tatsachen ist, dass eine $k[\xi]$–Basis η_i von K_ξ gleichzeitig auch $k(\xi)_{\wp_0}$–Basis von $\mathsf{K}_\wp$ ist, wo die angehängten Indizes den Übergang zu den $\wp$–ganzen Elementen bedeuten. Man pflegt das zwar gewöhnlich durch die Minimaleigenschaft der Basisdiskriminante zu beweisen, jedoch gibt es in der arithmetischen Theorie, soviel ich sehe, auch einen Beweis dieser Tatsache, der gar nicht von der Basisdiskriminante Gebrauch macht und daher auch für inseparables $\mathsf{K}/k(\xi)$ gültig ist.

Das einzige, was man (wie ich glaube) opfern muss, ist die Tatsache, dass bei einer algebraischen Realisierung $(a; b_i)$ des Multiplikationsschemas der $(\xi; \eta_i)$, bei der also

$$(\xi; \eta_i) \longrightarrow (a; b_i), \quad \text{und} \quad k^* = k(a; b_i)$$

beim Restklassenhomomorphismus mod. $\wp$ gilt, der Primdivisor $\wp$ umkehrbar eindeutig einem Primteiler $\wp^*$ von $\wp$ in der Konstantenerweiterung $\mathsf{K}^* = \mathsf{K}k^*$ so entspricht, dass der Restklassenhomomorphismus als

$$(\xi; \eta_i) \equiv (a; b_i) \text{ mod. } \wp^*$$

geschrieben werden kann. Doch wird dies ja nirgends gebraucht.

Hilfssatz 3 (betr. den Übergang zur Norm im Modul einer Kongruenz) habe ich — im wesentlichen nach Ihrer ursprünglichen Beweismethode — unter folgenden Voraussetzungen bewiesen: Sei K^*/K_1 separabel, w_i eine in K_2 gelegene Basis für K^*/K_1, $D_1 = |\,\mathrm{S}_1(w_i w_j)\,|$ ihre Diskriminante, d_1 ihr Zählerdivisor, und n_2 der Hauptnennerdivisor der w_i. Dann sollen p_1 und p_2 in den Behauptungen des Satzes prim zu d_1 und $\mathrm{N}_1(n_2)$ sein. Dabei bezeichnen S_1, N_1 Spur und Norm für K^*/K_1.

Das Wesentliche ist dabei folgender Schluss: Ist

$$p_1 = \mathrm{N}_1(p^*), \quad p_2 = \mathrm{N}_2(p^*)$$

$$p_1 \text{ kein Teiler von } d_1, \quad p_2 \text{ kein Teiler von } n_2$$

so ist

$$p^* = (p_1, p_2).$$

Denn es stellt sich heraus, dass die p^**–ganzen Elemente*

$$z = \sum_i a_i w_i \qquad (a_i \text{ in } K_1)$$

dann p_1–ganze Koeffizienten a_i haben, während die w_i nach Vor. p_2–ganz sind. Also sind die z *von selbst* (p_1, p_2)*–ganz*, d. h. es ist (p_1, p_2) höchstens eine Potenz von p^*. Da aber zudem die aus der Basisdarstellung gebildeten Reste mod. (p_1, p_2) in k liegen, ist diese Potenz notwendig die erste.

Ich habe dann noch den Begriff des einem Divisor ∂ von K zugeordneten K_ξ–Ideals ∂_ξ eingeführt und bemerkt, dass diese Zuordnung für die zum

Nenner von ξ primen ∂ umkehrbar eindeutig und multiplikativ ist. Dies ist unmittelbar vor dem Hilfssatz 4 eingefügt, wo die Hauptdivisoreigenschaft von ∂ mit der Hauptidealeigenschaft von ∂_ξ verknüpft wird, für den Fall, dass im Nenner von ξ nur ein einziger Primdivisor $\wp_\infty$ aufgeht.

§ 2. Korrespondenzen. Hier habe ich die Sätze 1 und 2 über die Beschreibung der konstanten und nicht–konstanten Primdivisoren neu formuliert, und zwar so, dass ich das Zuordnungsprinzip (von P zu $\wp$ bzw. zu dem Isomorphismus von K) mit in die Formulierung aufgenommen habe.

Im Falle des Satzes 1 (konstante Primdivisoren) ist dabei der Restklassenkörper K^* von P die Konstantenerweiterung $K^* = Kk^*$ durch den Restklassenkörper k^* von K. Hier kann man nun (weil über k zunächst nichts vorausgesetzt ist) — siehe die obigen Ausführungen zu Hilfssatz 1 — im allgemeinen *nicht*

$$\mathrm{Grad}\, P \;=\; [K^* : K] \;=\; [k^* : k] \;=\; \mathrm{Grad}\, \wp$$

behaupten, sondern nur mit $\leq$ in der Mitte. Nur wenn entweder K/k separabel erzeugbar oder k^*/k separabel ist, geht das. Ich habe das im Satz angemerkt. Für das Folgende ist es ja nicht wichtig, weil bald k als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt wird. In Satz 2 ist — wenn man auf die Beschreibung des Restklassenhomomorphismus von K auf K^* durch eine Kongruenz mod. P^* statt der blossen Angabe durch $\longrightarrow$ verzichtet — keinerlei derartige Beschränkung zu machen.

Den Beweis beider Sätze habe ich in eins verarbeitet, und dabei wesentlich auf den vorangestellten Hilfssatz 1 (über die Charakterisierung der Primdivisoren durch algebraische Realisierungen des Mult. Schemas) verwiesen.

Satz 3 über die Funktionalprimdivisoren: Bezeichnung zunächst $\tilde{p}$, für den p zugeordneten Funkt. Primdiv. von K. *Nach* Satz 3 $\tilde{p}$ mit p identifiziert. Ausserdem Verabredung: $f(\xi), g(\xi), \ldots$ sollen stillschweigend stets die durch Restbildung mod. p in den Koeffizienten von $F(\xi), G(\xi), \ldots$ entstehenden Polynome bezeichnen.

Sodann habe ich mich Ihrer ersten Fassung der Arbeit insofern wieder angenähert, als ich an dieser Stelle, also vor der Aufstellung der Korrespondenzdefinition und Formulierung der Korrespondenzsätze, gleich noch die für das Folgende wichtigen Tatsachen über Funktionalprimdivisoren in Form einiger Hilfssätze eingefügt habe. Es schien mir vorteilhaft, dafür zwei neue Begriffe einzuführen, die sich auf den Übergang zu den p–Resten in einem K_ξ–Ideal A_ξ beziehen.

A_i eine $K[\xi]$–Basis von A_ξ,

$$A_i = \sum_j \frac{G_{ij}(\xi)}{G(\xi)}\,\eta_j \qquad \text{ihre Darstellung bei einer Erzeugung}$$

(dabei oBdA $G(\xi)$ p–primitiv normiert)

Die Basis A_i heisst *p–regulär*, wenn dann die $G_{ij}(\xi)$ p–ganz sind und $|G_{ij}(\xi)|$ sowie $G(\xi)$ zu p prime höchste Koeffizienten haben. A_ξ heisst *fremd zu p*, wenn es eine p–reguläre Basis A_i hat.

Beides ist für fast alle p der Fall, wenn ξ und A_ξ gegeben. Von der Wahl der Basis η_i unabhängig, worauf es aber nicht ankommt.

Für eine p-reguläre Basis sind die *p–ganzen* Elemente aus A_ξ genau durch die Elemente mit *p–ganzen* Koeffizienten in der Basisdarstellung gegeben.

Daraus folgt ohne weiteres, dass die p–Reste der p–ganzen Elemente ein K_ξ–Ideal bilden. Es wird das *p–Restideal* von A_ξ genannt und mit $A_\xi \,|\, p$ bezeichnet.

Hilfssatz 5. Die p–Reste a_i der A_i bilden eine Basis von $A_\xi \,|\, p$, wenn A_i p–regulär ist.

Hilfssatz 6. $\mathrm{Grad}\, A \,|\, p = \mathrm{Grad}\, A$, wenn A_ξ fremd zu p ist.

Hilfssatz 7. Sind A_ξ, B_ξ, $A_\xi B_\xi$ fremd zu p, so ist

$$A_\xi B_\xi \,|\, p = A_\xi \,|\, p \cdot B_\xi \,|\, p\,.$$

Hilfssatz 8. Ist A_i p–reguläre Normalbasis, so ist auch die p–Restbasis α_i Normalbasis.

Bei der Korrespondenzdefinition habe ich die
Gradregel: $\mathrm{Grad}\, D(a) = \mathrm{Grad}\, D \cdot \mathrm{Grad}\, a$
als besondere Feststellung eingefügt und mich wiederholt darauf bezogen.

Die Korrespondenzsätze sind nach dem obigen Schema eingeteilt. Bei den Umkehrsätzen habe ich Ihre ursprünglichen negierten Formulierungen wiederhergestellt:

Satz $\overline{5}$. Aus $D \neq 1$ folgt $D(p) \neq 1$ für fast alle p.

Satz $\overline{6}$. Aus $D \neq D_0$ folgt $D(\frac{p}{p_\infty}) \neq 1$ für fast alle p.

Satz $\overline{7}$. Aus $D \not\sim 1$ folgt $D(p) \not\sim 1$ für fast alle p.

Satz $\overline{8}$. Aus $D \not\sim D_0$ folgt $D(\frac{p}{p_\infty}) \not\sim 1$ für fast alle p.

D_0 (konstanter Divisor) und p_∞ (fester Primdivisor) sind vorher festgesetzt, ebenso a_0 (Divisor nullten Grades) für die nicht–überstrichenen Sätze. Vor der Formulierung dieser Umkehrsätze wird kurz besprochen, inwiefern sie in dieser Form Verschärfungen der durch blosse formale Umkehrung entstehenden Sätze sind.

Der *Restidealsatz* wird jetzt sofort für zusammengesetztes D formuliert als

Satz 9. Es sei ξ ein D–ganzes, über k transzendentes Element von K. Für fast alle Primdivisoren p ist das p–Restideal von D_ξ gerade

$$D_\xi \,|\, p \;=\; D(p)_\xi \,.$$

Dann erst folgt Angabe der ev. auszunehmenden p, und zwar explizit nur für den Fall $D = P$, nämlich alle p, die *nicht* den drei folgenden Bed. genügen:

1.) p prim zum Nenner des Bildes x von ξ bei P; also x p–ganz.

2.) Hilfssatz 3 auf p mit $K_1 = K$, $K_2 = K_0^*$ anwendbar; also aus

$$z_0 \equiv 0 \text{ mod. } p \quad (z_0 \text{ in } K_0^*)$$

folgt

$$z_0 \equiv 0 \text{ mod. } \mathrm{N}(p)$$

3.) P_ξ ist fremd zu p; also $\operatorname{Grad} P_\xi \,|\, p = \operatorname{Grad} P_\xi$.

Für zusammengesetztes D hätte man 1.), 2.), 3.) für jeden Primfaktor P von D zu fordern, ausserdem noch zu 3.) analoge Bedingungen für einen rekursiven Aufbau von D aus den $P^{\pm 1}$.

Die folgenden Schmidschen Ausführungen über den Vergleich mit meiner Meromorphismentheorie habe ich im wesentlichen gelassen, nur ein wenig besser angeordnet. Ich habe da die Behauptung ausgesprochen, dass ein ganzer Divisor g–ten Grades G von K/K im allgemeinen weder zu einem Primdivisor $\mathfrak{P}$ ersten Grades noch zu einem Primdivisor $\mathfrak{P}$ beliebigen Grades im gröberen Sinne äquivalent ist. Ich weiss nicht, ob Ihnen eine solch allgemeingehaltene negative Behauptung recht ist. Sie scheint mir richtig, obwohl ich sie nicht beweisen kann. Immerhin hatte ich das Bedürfnis, die von Schmid eingefügte Behauptung, dass man für höheres Geschlecht weder mit Meromorphismen (Primkorrespondenzen vom ersten Grade) noch mit Primkorrespondenzen beliebigen Grades durchkommt, irgendwie näher zu begründen.

§ 3. Beweis der Korrespondenzsätze. Zerfällt jetzt in folgende Teile:

1. Bew. d. Homomorphiesatzes (sehr kurz)

2. Bew. d. Restidealsatzes. Wesentlich unverändert gegenüber der Schmidschen Fassung. Nur dass jetzt durch die vorangestellten Hilfssätze über die p–Restideale die Teile b.) (Schluss von $\leq$ auf $=$) und c.) (zus. ges. D) sehr kurz werden. c.) besteht einfach in folgendem:

Für $D = \prod P^r$ ist einerseits def. gem.

$$D(p) = \prod P(p)^r,$$

also

$$D(p)_\xi = \prod P(p)_\xi^r$$

Andrerseits nach Hilfssatz 7 für fast alle p

$$D_\xi \,|\, p = \prod (P_\xi \,|\, p)^r.$$

Das ergibt die Behauptung nach b.).

3. Beweis der Sätze 5, 6, 7, 8.

Satz 5, 6 trivial. Satz 7 (Additionstheorem) wesentlich unverändert. Satz 8 einfache Folge daraus, wesentlich unverändert, bis auf die Bezeichnung.

4. Beweis der Umkehrsätze $\overline{5}$, $\overline{6}$, $\overline{7}$, $\overline{8}$.

Satz $\overline{5}$. Hier habe ich die in ihrem Beweis vorkommende Relation

$$FF' + GG' = 1$$

herausgebracht. Diese Charakterisierung des Gebrochenseins ist nämlich unnötig scharf. Man kommt gedanklich einfacher so aus: Sei A_i wie oben (S. 6.) angesetzt. Dann ist das Gebrochensein von A_ξ gleichbedeutend damit, dass die

Übergangsdeterminante

$$\frac{|\,G_{ij}(\xi)\,|}{G(\xi)^n} \qquad \text{gebrochen in } \xi$$

ist, dass also die Division mit Rest

$$|\,G_{ij}(\xi)\,| \,=\, G(\xi)^n Q(\xi) + R(\xi)$$

nicht aufgeht. Dies zieht sich nun für fast alle p auf das p–Restideal durch. Man muss nur voraussetzen: Die Basis A_i ist p–regulär, $Q(\xi)$ ist p–ganz, $R(\xi)$ ist p–primitiv.

Satz $\overline{\mathbf{6}}$. Bis auf die Bezeichnung unverändert.

Satz $\overline{\mathbf{7}}$. Hier habe ich die einzelnen Schritte im Beweis etwas umgestellt. Zuerst habe ich die Reduktion der Behauptung auf den Nachweis vorgenommen:

Ist $A_\xi \not\sim K_\xi$, so ist auch $A_\xi\,|\,p \not\sim K_\xi$ für fast alle p. (Dabei A_ξ ein ganzes K_ξ–Ideal). Dann: Hierzu rechnerisches Kriterium für $A_\xi \sim K_\xi$ (Resultanten). Ausgangspunkt: Existenz in A_ξ eines A mit $\operatorname{Grad} \mathrm{N}_\xi(A) = r = \operatorname{Grad} A_\xi$, oder formal besser: eines $A \neq 0$ mit $\mathrm{N}(A) \leq r$ in A_ξ. Dann Herleitung der A aus unbestimmtem U. Dabei nur beschränkte Grade der Koeffizienten $U_i(\xi)$ gebraucht, denn es gilt der nachher zu beweisende

Hilfssatz 9. Haben für ein $A \neq 0$ aus dem ganzen K_ξ–Ideal A_ξ die Koeffizienten $F_i(\xi)$ bei der Darstellung durch eine Normalbasis die Grade m_i, so gilt

$$\operatorname{Grad} \mathrm{N}_\xi(A) \geq n \operatorname{Max} m_i - (n-1)\,. \tag{1}$$

Wählt man also M so gross, dass

$$nM - (n-1) \,\geq\, r\,, \tag{2}$$

so gilt für jedes A aus A_ξ mit

$$r \,\geq\, \mathrm{N}_\xi(A) \tag{3}$$

durch einfaches Hintereinanderschreiben der drei Gleichungen (1), (2), (3)

$$M \,\geq\, \operatorname{Max} m_i\,,$$

d. h. man kommt mit diesem M als oberer Schranke für die Grade der $U_i(\xi)$ aus.

Mir schien es besser, diese Schlusskette so anzuordnen, dass man die immerhin begrifflich nicht so ganz einfache Behauptung durch einfaches Hintereinanderlesen der Ungleichungen ablesen kann. Das weitere habe ich nur im Ausdruck etwas verändert.

Die von Ihnen in Hilfssatz 9 angegebene schlechtere Schranke mit $2(n-1)(2n-1)$ statt einfach $(n-1)$ beruht auf einem Versehen Ihrerseits. Denn es ist doch einfach

$$\operatorname{Exp} A = \left[\frac{v(A)}{n}\right]$$

(grösstes Ganze), wo $v(A)$ die Ordnungszahl von A in P_∞ ist. Hieraus folgt aber einfach

$$\operatorname{Exp} AB \leq \operatorname{Exp} A + \operatorname{Exp} B + \underline{\underline{1}}$$

und nicht $n-1$, sodass sich

$$\operatorname{Exp} \mathrm{N}_\xi(A) \leq n \operatorname{Exp} A + (n-1)$$

ergibt.

Satz $\overline{8}$. Bew. folgt genau wie für Satz $\overline{6}$, indem man $\not\sim$ statt $\neq$ liest.

Hier habe ich dann ihre Anmerkung über die weitergehende Gültigkeit der Schlüsse in den Beweisen der Umkehrsätze für beliebige *Konstantenkörper mit Primdivisoren*, z. B. algebraische Zahlkörper als Schlussbemerkung im Text angebracht.

§ 4. Zusammensetzung von Korrespondenzen.

Bezeichnungen: K_1, K_2, K_3, D_{12}, D_{23}, D_{13}.
Im Beweis spezialisiert auf

$$D_{12} = P \quad D_{23} = Q$$

Zunächst (nach Abtrennung der konstanten Fälle) allgemein

$$Q(P(a)) = \mathrm{N}_{K_2\,K_3\,K_3}(\mathrm{N}_{K_1\,K_2\,K_2}(a)). \tag{1}$$

Dann gedanklich einfacherer Fall $\operatorname{Grad} Q = 1$ vorweggenommen wie bisher.

Im allgemeinen Fall: Zur Komposition der beiden Erweiterungen $K_1K_2^\pi$ und $K_2^\pi K_3^{\kappa\pi}$ von K_2^π betrachten wir die *erstere* als hyperkomplexes System und die *letztere* als Grundkörpererweiterung davon, und werfen die auftretenden Isomorphismen, die den direkten Summanden $K^{(i)}$ entsprechen, auf

K_1 (statt wie bei Ihnen auf K_3). Das ist nämlich in den Formeln deshalb einfacher, weil K_1 nur *einmal* in den Normindizes vorkommt, K_3 dagegen *zweimal* (links und rechts vom Strich); bei meiner Auffassung bleibt also mehr fest. Das hyperkomplexe System ist halbeinfach, wenn auch nur eine der beiden Erweiterungen separabel ist. Sind sie beide inseparabel, so nehmen wir, anders als Sie, den grössten gemeinsamen rein–inseparablen Teilkörper $(K_2^\pi)^{q^{-1}}$ als Grundkörper. Die Norm von $K_1 K_2^\pi$ nach K_2^π bzw. diesem grösseren Teilkörper $(K_2^\pi)^{q^{-1}}$ spaltet sich der direkten Zerlegung entsprechend auf. Im Inseparabilitätsfalle tritt dann einfach noch der Exponent q an die Norm heran; so erhält man die Aufspaltung

$$\mathrm{N}_{K_1 K_2^\pi / K_2^\pi}(a) \;=\; \prod_i \mathrm{N}_{K^{(i)}/K_2^\pi K_3^{\kappa\pi}}(a^{\varrho_i})^q. \tag{2}$$

Dabei ist $K^{(i)}$ ein Körper vom Typus $K_1 K_2^\pi$, enthält also einen zu K_1 isomorphen Teilkörper $K_1^{\varrho_i}$ und definiert einen Primdivisor $R_i^{\varrho_i}$ von $K_1^{\varrho_i}$ von $K_1^{\varrho_i} K_3 / K_1^{\varrho_i}$, und damit auch einen solchen R_i von $K_1 K_3 / K_1$, derart, dass

$$R_i^{\varrho_i}(a^{\varrho_i}) \;=\; R_i(a)$$

gilt.

Jetzt ergibt sich der Beweis in derselben Weise wie bei Ihnen durch Eintragen von (2) in (1) und Reduktion der Normen von $K^{(i)}$ auf den kleinsten möglichen Körper, den Restklassenkörper mod. $R_i^{\varrho_i}$. Es resultiert

$$D_{13} \;=\; \prod_i R_i^{e_i q},$$

wo die e_i die Grade der $K^{(i)}$ über den genauen Restklassenkörpern sind.

Ich hoffe, mit diesen Veränderungen den ursprünglich wirklich abscheulich zu lesenden Beweis etwas geniessbarer gemacht zu haben.

§ 5. Zusammenfassung, Transformatoren und Multiplikatoren.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \textbf{Transformator} & = & \text{Homomorphismus der vollen Klassengruppe von } K \\ \textbf{Multiplikator} & = & \text{————- Klassengruppe nullt. Gr.————} \end{array}\right\}$$

bei einer Korrespondenz, und zwar entweder *von K in* K oder speziell *von K in sich.* Addition und im letzteren Falle auch Multiplikation der Transformatoren und Multiplikatoren nach allgemein–gruppentheoretischem Schema des Rechnens mit Homomorphismen erklärt. Liefert

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Transformatorenmodul}\\ \text{Multiplikatorenmodul}\end{array}\right\} \qquad \text{von } K \text{ in}$$

und

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Transformatorenring}\\ \text{Multiplikatorenring}\end{array}\right\} \qquad \text{von } K \text{ in sich.}$$

Das Hauptresultat ist:

$$\text{Der } \left\{\begin{array}{c}\text{Transformatorenmodul}\\ \text{Multiplikatorenmodul}\end{array}\right\} \qquad \text{von } K \text{ in } \mathsf{K} \text{ ist isomorph zur}$$

$$\text{Gruppe der } \left\{\begin{array}{c}\text{gewöhnlichen}\\ \text{gröberen}\end{array}\right\} \qquad \text{Divisorenklassen von } K/K\,.$$

§ 6. Korrespondenzen und Integrale erster Gattung im klassischen Fall.

Klassischer Begriff einer Korrespondenz $\Delta(p)$ durch konforme Abbildung einer Überlagerungsfläche. Nachweis, dass dieser Begriff sich dem algebraischen Korrespondenzbegriff unterordnet: Zu $Delta$ existiert ein ganzer Divisor D ohne konstante Primfaktoren derart, dass $\Delta(p) = D(p)$. Dabei rückwärts Δ nicht eindeutig; kann aber eindeutig gemacht werden, indem man den konform–äquivalenten Überlagerungsflächen eine leicht ersichtliche Minimalbedingung auferlegt, die darauf hinausläuft, dass die einzelnen zusammenhängenden Teile jeweils minimal sind (keine Exponenten e_i). Die Exponenten der Primzerlegung von D kommen dann lediglich durch mehrfaches Setzen der zusammenhängenden Teile zustande, was einem zerfallenden hyperkomplexen System anstatt einem überflüssigen algebraischen Erweiterungskörper des genauen Restklassenkörpers entspricht.

Die Beschränkung auf ganze D ohne konstante Primfaktoren kann auch in der analytischen Definition durch leichte formale Erweiterungen beseitigt werden.

Im folgenden wird in Gedanken wieder der algebraische Korrespondenzbegriff an die Spitze gestellt, und das Vorstehende als eine Methode angesehen, die Wirkung einer Korrespondenz im klassischen Fall analytisch zu beschreiben. Der entwickelte Sachverhalt liefert dann sozusagen analytische Beweise für die Sätze 5, $\overline{5}$, 6, $\overline{6}$, die es mit der Wirkung der Korrespondenzen auf die *Divisorengruppe* und die *Divisorengruppe nullten Grades* von K zu tun haben.

Die folgenden Ausführungen dienen dann dazu, auch die Sätze 4 (Homomorphiesatz) und 7, $\overline{7}$, 8, $\overline{8}$ im klassischen Fall analytisch zu erfassen, also die Sätze, die es mit der Wirkung der Korrespondenzen auf die *Klassengruppe* und die *Klassengruppe nullten Grades* zu tun haben.

Bezeichnungsänderung: $\mathrm{d}\underline{w}$, $\underline{u}$ (fette Typen) für das bisherige $\mathrm{d}w'$, $\mathrm{d}u'$. Einführung der linearen Transformation

$$\underline{u}(D(p)) \equiv \mathsf{M}u(p) + t \text{ mod. } \mathsf{A} \tag{1}$$

nebst der Bedingung

$$\mathsf{M}A = \mathsf{A}G\,, \tag{2}$$

die als *Multiplikation von A in* A bezeichnet wird. Im Falle $K = \mathsf{K}$: *Multiplikation von A in sich* ("Komplexe Multiplikation") Das Eigenschaftswort "komplex" trifft doch auf *beide* Fälle zu. Daher empfiehlt es sich nicht, es zur Unterscheidung des einen vom andern Fall zu benutzen; immerhin habe ich die von Ihnen gemeinte Anspielung auf die klassische Bedeutung des Terminus "Komplexe Multiplikation" beibehalten und diesen bei dem zweiten Fall in Klammern beigesetzt.

Nachweis des Homomorphiesatzes aus dem Abelschen Theorem, auf Grund der Folgerungen aus (1):

$$\underline{u}(D(a)) \equiv \mathsf{M}u(a) + tf(a) \text{ mod. } \mathsf{A} \tag{3}$$

speziell

$$\underline{u}(D(a_0)) \equiv \mathsf{M}u(a_0) \text{ mod. } \mathsf{A} \tag{3_0}$$

für a_0 vom Grade Null. Dann Nachweis von zu den Sätzen 7, $\overline{7}$, 8, $\overline{8}$ analogen Tatsachen:

Der durch eine Korrespondenz gelieferte Homomorphismus der $\left\{\begin{array}{c}\textit{vollen Klassengruppe}\\ \textit{Klassengr. nullt. Gr.}\end{array}\right\}$ *von K in die von* K *und die durch die Korrespondenz gelieferte* $\left\{\begin{array}{c}\textit{lineare Transformation } (\mathsf{M}, t)\\ \textit{Multiplikation } \mathsf{M}\end{array}\right\}$ *bestimmen sich gegenseitig eindeutig.*

Hier habe ich im Beweis, da die formale Erweiterung auf gebrochene D vorher schon erwähnt war, gleich solche Formulierungen genommen, bei denen nur *ein* D anstelle zweier D, E vorkommt. Es wird dann zum Beweis nach Erledigung des analytischen Schlusses (Abel und Jacobi) einfach noch gesagt, dass daraus die Behauptung folgt, weil der Multiplikation und Division der D die Addition und Subtraktion der (M, t) entspricht.

So ergibt sich:

Der Transformatorenmodul von K in K ist isomorph zum Modul der linearen Transformationen (M, t).

Der Multiplikatorenmodul von K in sich ist isomorph zum Modul der Multiplikationen M von A in A.

Um schliesslich auch die Zusammensetzung der Korrespondenzen im Falle $K = \mathsf{K}$ einzubeziehen, erweitere man die Substitution (3) der Funktion $u(a)$ bei $a \longrightarrow D(a)$ durch die Substitution der Funktion $f(a)$ bei $a \longrightarrow D(a)$, und erhält:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{rcc} \underline{u}(D(a)) & \equiv & \mathsf{M}u(a) + tf(a) \text{ mod. } \mathsf{A} \\ f(D(a)) & = & mf(a) \end{array} \right\}$$

Daraus sieht man, dass der Zusammensetzung der Korrespondenzen die Multiplikation der aufgefüllten Matrizen $\begin{pmatrix} \mathsf{M} & t \\ 0 & m \end{pmatrix}$ entspricht. Und das ergibt:

Der Transformatorenring von K in sich ist isomorph zum Ring der linearen Transformationen $\begin{pmatrix} \mathsf{M} & t \\ 0 & m \end{pmatrix}$.

Der Multiplikatorenring von K in sich ist isomorph zum Ring der Multiplikationen M von A in sich.

Die letzte Tatsache ist als die wichtigste Erkenntnis anzusehen. Jetzt weiter, wie im ursprünglichen Ms.

Ich muss um Entschuldigung bitten, dass ich diese Sache, die Sie mir schon einmal vergeblich klar zu machen versuchten, erst jetzt richtig verstanden habe. Der Transformatoren*ring* ist also damit gerettet. Und ich sah nicht ein, weswegen man ihn auslassen sollte, weil dadurch eine Lücke in dem formalen Skelett der Arbeit entstehen würde.

In der Einleitung habe ich die hier in extenso entwickelte analytische Theorie der Korrespondenzen noch etwas knapper, als es im bisherigen Ms. der Fall war, skizziert und auf die ausführliche Darstellung im Schluss–§ verwiesen.

Schliesslich habe ich in dem zum Schluss angefügten strengen Beweis des Hurwitzschen Satzes einiges geändert. Zunächst habe ich die durch das Jacobische Theorem gelieferte eindeutige Punktfunktion $\Delta(p)$, nicht $D(p)$ genannt, um an die Ausführungen zu Beginn dieses § anzuknüpfen. Ferner habe ich diejenige Stelle im Beweis genau angegeben, wo von der Voraussetzung Gebrauch gemacht wird, dass die Matrix M eine Multiplikation (2) von A in A ist. Dies ist nämlich, soviel ich sehe, massgeblich an der Stelle verwandt, wo von der Teilmannigfaltigkeit M_1 die Rede ist, die von den Punkten $\mathsf{M}u(p)+t$ mod. A aus R durchlaufen wird, wenn p die Fläche F durchläuft. Sie sagen es zwar nicht ausdrücklich, aber es ist selbstverständlich wesentlich, dass M_1 eine *analytische* eindimensionale Teilmannigfaltigkeit von R ist. Und gerade diese Analytizität wird durch (2) garantiert.

Schliesslich habe ich die genauere Beschreibung dessen, was unter Analytizität der Punktfunktion $\Delta(p)$ zu verstehen ist, nach manchem eigenen Ringen mit diesem Begriff so gefasst: $\Delta(p) = \wp_1 \cdots \wp_\gamma$ ist in der Umgebung jedes Punktes p_0 mit $\Delta(p_0) = \wp_{01} \cdots \wp_{0\gamma}$ dadurch gegeben, dass die symmetrischen Funktionselemente einer Ortsuniformisierenden zu den $\wp_{0i}$ regulär–analytische Funktionselemente einer Ortsuniformisierenden zu p_0 sind. Denn dann folgt weiter — dies steht im neuen Text —, dass $\Delta(p)$ eine Überlagerungsfläche F_γ von F eindeutig analytisch auf Φ und somit umkehrbar eindeutig konform auf eine Überlagerungsfläche Φ_μ von Φ abbildet, was nach den Ausführungen zu Beginn dieses § den Beweis vollendet.

Den Nachweis der Analytizität von $\Delta(p)$ habe ich so gelassen, wie sie ihn hatten, bis auf einige kleine Bezeichnungs– und sprachliche Änderungen.

Damit wäre ich am Schluss dieses Briefes angelangt, der länger geworden ist, als ich dachte, weil ich doch lieber der Eile halber gleich alles so schreiben wollte, dass Sie es ohne Vorliegen des Ms. verstehen können. Denn es kann doch noch einige Tage dauern, bis Schmid mit dem Durchschlag soweit fertig ist, dass er ihn Ihnen schicken kann, und für den Druck ist jeder Tage kostbar. Ich bitte Sie also, sich nach Möglichkeit *umgehend* mit der Sache zu befassen und ev. Wünsche vorzutragen.

Die Fussnote am Titel habe ich noch offen gelassen, für den Fall, dass Sie in irgendeiner Form noch auf Schmids und meine Mitwirkung bei der Herstellung der endgültigen Fassung des Ms. hinweisen wollen. Das können Sie bei der Korrektur ausfüllen, sie geht auch an Schmid und F. K. Schmidt, auf dessen Wunsch.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.38 21.03.1937, Deuring to Hasse

Dr. M. Deuring
Wasserturmstr. 58
Leipzig O 27

ab 1. 4. 1937 : Math. Inst.,
Abbeanum, *Jena*

Lieber Herr Hasse,

für Ihren Brief besten Dank. Ich glaube nicht, dass es die Mühe lohnen würde, die ganz nebensächlichen Aenderungswünsche, die ich vielleicht vorbringen könnte, jetzt noch zu berücksichtigen. Nur eines könnte vielleicht noch geändert werden : Bei dem Vergleich mit Ihrer Meromorphismentheorie bemerken Sie, dass ein ganzer Divisor g–ten Grades im allgemeinen nicht zu einem Primdivisor (beliebigen Grades) grob äquivalent ist. Ich bin nicht sicher, ob das überhaupt richtig ist. Es hängt vielleicht vom Konstantenkörper ab. Wenn der Konstantenkörper nicht absolut algebraisch ist, kann man, wie ich glaube, in jeder gröberen Klasse einen Primdivisor angeben. Auf jeden Fall ist das ein Punkt, bei dem man sich leicht vor den Geometern blamieren kann.

Ich benutze die Gelegenheit, Ihnen noch etwas mitzuteilen : Am 1. 4. sollte ich eigentlich mein Manuskript für die Enzyklopädie fertig haben, ich sehe aber, dass ich nicht fertig werde (es kommt jetzt auch noch die Uebersiedlung nach Jena dazwischen). Ich werde es dann aber bald zu Ende bringen können. Druckfertig kann das Manuskript allerdings erst nach Angleichung an die Artikel von Brauer und Magnus sein, der vielen Verweisungen wegen.

Mit den besten Grüssen

Ihr

M. Deuring

1.39 01.04.1937, Hasse to Deuring

1. 4. 37

Lieber Herr Deuring,

vielen Dank für Ihre freundliche Antwort.

Wegen der Enzyklopädie brauchen Sie sich um ein paar Monate keine übertriebenen Sorgen zu machen.

Was nun die fraglichen Stellen in Ihrer Arbeit angeht, so ist es doch trivial, daß ein ganzer Divisor g–ten Grades für $g > 1$ fast immer nicht zu einem Primdivisor 1. Grades äquivalent ist, denn es gibt doch da nur endlich viele Automorphismen und sonst keine Meromorphismen. Anders liegt die Sache allerdings für Primdivisoren beliebigen Grades, da können Sie recht haben. Es genügt aber wohl, wenn im Manuskript an der betreffenden Stelle gesagt wird, daß man nicht ohne weiteres *zeigen* kann, daß usf...... so daß die Verwendung von zusammengesetzten Divisoren formal gerechtfertigt erscheint. Bitte machen Sie diese oder irgend eine andere Ihnen richtig scheinende Änderung an der betreffenden Stelle.

Im übrigen ist gerade diese Stelle für mich der Anlaß gewesen, eine Ehrenrettung meiner Meromorphismentheorie zu unternehmen. Es ist mir in der Tat gelungen, alles das, was in Ihrer Korrespondenzen–Theorie noch nicht ein Analogon vom elliptischen Fall her hat, nachzuliefern, also vor allen Dingen die Korrespondenzen als Ausfluß von Meromorphismen darzustellen. Damit wird der für den Beweis der Riemannschen Vermutung wichtige Punkt nachgeholt: Es wird die Anwendung eines Multiplikators auf Körperelemente statt nur Divisoren möglich. Selbstverständlich handelt es sich dabei nicht um Elemente eines Funktionenkörpers einer Variablen, sondern um Elemente des zugehörigen Körpers der Abelschen Funktionen (Jakobische Mannigfaltigkeit) und zwar auch nicht um Einzelelemente, sondern um g–gliedrige Systeme von algebraisch unabhängigen Elementen der Jakobischen Mannigfaltigkeit. die Multiplikationen von K in sich entsprechen umkehrbar eindeutig den normierten Meromorphismen der Jakobischen Mannigfaltigkeit, man hat außerdem die Theorie die Translations– und Spiegelungsautomorphismen dieser Mannigfaltigkeit in ihrer Beziehung zur Divisorenklassenmultiplikation im Körper K. Als Norm eines Multiplikators bietet sich der

Körperrelativgrad bei dem Meromorphismus der Jakobischen Mannigfaltigkeit dar, und die Normenadditionsformel muß sich aus dem algebraischen Äquivalent des Nullstellen– und Polvergleichs eines geeigneten Systems von g algebraisch unabhängigen Elementen dieser Mannigfaltigkeit ergeben. Das Letztere bedarf noch der genaueren Ausführung, bietet aber wohl keine prinzipiellen Schwierigkeiten mehr, man hat ja das entsprechende Theorem bei den Thetafunktionen.

Mit herzlichen Grüßen und besten Wünschen für Ihre neue Tätigkeit in Jena,

stets Ihr

H. Hasse

1.40 19.06.1937, Deuring to Hasse

Jena, 19. Juni 1937.

Lieber Herr Hasse,

in der letzten Zeit habe ich mich wieder mit der Korrespondenzentheorie befasst, vor allem im Hinblick auf die Klassenkörperkonstruktion. Ich bin dabei auch auf die Darstellung der Korrespondenzen durch Meromorphismen des Körpers der Abelschen Funktionen gestossen. Für die Theorie der Teilerreste singulärer Abelscher Funktionen ist das ja von vornherein klar — da eben die Teilerreste Abelscher Funktionen zu untersuchen sind. Ich habe aber bemerkt, dass man den Körper der Abelschen Funktionen auch schon für den Beweis der Algebraizität der singulären Moduln braucht. Es wäre mir nun lieb, wenn ich, um unnötige Arbeit zu vermeiden, eine Schilderung Ihrer Meromorphismentheorie hätte, die etwas eingehender ist als in Ihrem Brief vom 1. 4. 1937; nach diesem Brief scheint mir Ihr Ansatz mit meinem nicht ganz übereinzustimmen.

Weiter möchte ich Sie fragen, ob es möglich ist, dass ich eine Note in den Göttinger Nachrichten erscheinen lasse über die Algebraisierung der komplexen Multiplikation, denn die Ausarbeitung des allgemeinen Falles wird noch Zeit in Anspruch nehmen. Da ich voraussichtlich zu dem Vortrag Severis nach Göttingen komme, könnte ich beides mit Ihnen besprechen.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

Max Deuring

1.41 21.06.1937, Hasse to Deuring

21. 6. 37

Lieber Herr Deuring,

besten Dank für Ihren Brief. Ich habe im Augenblick wirklich keine Zeit, Ihnen eine ausführliche Zusammenstellung meiner Überlegungen über den abstrakten Körper der Abelschen Funktionen zusammenzuschreiben. Vielleicht findet sich aber nächsten Montag, wenn Sie zu Severis Vortrag hierher kommen, eine Gelegenheit, daß ich Ihnen mündlich meine Gedankengänge ausführlich schildern kann.

Selbstverständlich ist eine Note über die Algebraisierung der komplexen Multiplikation hochwillkommen. Vielleicht bringen Sie sie gleich mit.

Herzlichst Ihr

H. Hasse

1.42 07.08.1937, Hasse to Deuring

Göttingen, 7. 8. 37

Lieber Herr Deuring,

Vor vier Wochen stellten Sie mir eine Note über die abstrakte Begründung der komplexen Multiplikation für die Göttinger Nachrichten in Aussicht. Bisher habe ich diese nicht erhalten. Darf ich wohl in der nächsten Zeit damit rechnen?

Heil Hitler,

Ihr

H. Hasse

1.43 17.08.1937, Deuring to Hasse

JENA, ABBEANUM, DEN

POSTCARD 17. 8. 1937

LIEBER HERR HASSE,

entschuldigen Sie bitte, dass ich nichts über die Arbeit über komplexe Multiplikation hören liess. Der Grund ist, dass ich inzwischen auf neue Dinge gestossen bin, über die ich mir klar werden will. Da ich für Kreuznach einen Vortrag über den gleichen Gegenstand angemeldet habe, so muss ich bis dahin einen Abschluss gefunden haben, dann kann ich Ihnen also auch die versprochene Note schicken.

Heil Hitler!

Ihr

M. DEURING

1.44 28.09.1937, Deuring to Hasse

Jena, 28. 9. 1937

Hindenburgstr. 13

Lieber Herr Hasse,

Sie werden sich gewiss gewundert haben, dass ich Ihnen das versprochene Manuskript über die komplexe Multiplikation noch nicht geschickt habe. Das hat einen einfachen Grund: Wie ich das Manuskript ungefähr fertig hatte, gelang es mir, die fehlenden Beweise für das Reziprozitätsgesetz im absoluten und im Strahlklassenkörper mit den gleichen Hilfsmitteln zu erbringen. Ausserdem bin ich dabei auf einen geradezu verblüffenden Beweis des Hauptidealsatzes gekommen. Ueber beides habe ich dann in Bad Kreuznach schon vorgetragen. Da nun der ganze Aufbau der Theorie abgeschlossen ist, so scheint es mir das richtigste, wenn ich gleich ein ausführliches Manuskript für Crelle einreiche. Dies fertigzustellen wird allerdings nicht so rasch möglich sein, weil ich im Oktober in der Dozentenakademie bin und anschliessend mit der Probevorlesung zu tun haben werde. Ich glaube aber, dass es so auch in Ihrem Sinne ist.

Mit den besten Grüssen

Ihr

M. Deuring

1.45 05.10.1937, Hasse to Deuring

5. 10. 37

Lieber Herr Deuring,

besten Dank für Ihren Brief. Ich freue mich sehr, daß Sie weiter so schöne Dinge gefunden haben. Ich sehe dann also der Einreichung eines ausführlichen Manuskriptes in Crelles Journal in nicht zu ferner Zukunft entgegen.

Zu Ihrem Beweis der Riemannschen Vermutung in Funktionenkörpern würde es mich interessieren, wie Sie beweisen, daß der auf formale Weise definierte Konjugiertheitsbegriff die Eigenschaft $\overline{\alpha+\beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$ hat, daß also die Konjugiertenbildung ein involutorischer Antiautomorphismus des Meromorphismenrings ist. Vielleicht finden Sie trotz Dozentenakademie für eine kurze Nachricht darüber Zeit.

Mit besten Grüßen und Wünschen

Ihr

H. Hasse

1.46 11.10.1937, Deuring to Hasse

TÄNNICH,
POST REMDA–THÜRINGEN,

11. 10. 1937

LIEBER HERR HASSE,

ich glaube, dass ich Ihre Frage auch von hier aus ausreichend beantworten kann: Man definiert die Konjugiertenbildung zunächst für Korrespondenzen. Für die primen Korrespondenzen $\mathfrak{P}$ durch umgekehrtes Durchlaufen des „Daches". Für allgemeine Korrespondenzen $\mathfrak{d} = \prod \mathfrak{P}_i^{e_i}$ durch $\overline{\mathfrak{d}} = \prod \overline{\mathfrak{P}}_i^{e_i}$. Zum Übergang auf die Multiplikatoren ist zu zeigen: Wenn $\mathfrak{d} \sim$ const. ist, so ist auch $\overline{\mathfrak{d}} \sim$ const. Man sieht nun ohne Schwierigkeit: Wenn der Divisor $\mathfrak{d}$ bis auf einen konstanten Faktor durch Z dargestellt wird, so stellt das gleiche Element den Divisor $\overline{\mathfrak{d}}$ bis auf einen konstanten Faktor dar — jetzt K als Konstantenkörper!

Mit den besten Grüssen

Ihr

M. DEURING

1.47 10.05.1938, Hasse to Deuring

10. Mai 1938.

Lieber Herr Deuring,

Darf ich Sie heute bitten, mir über den Stand der Arbeiten an Ihren Enzyklopädie–Artikeln zu berichten. Es wäre sehr zu wünschen, wenn wir das Manuskript in kürzester Zeit bekommen könnten. Es sind schon fast alle Artikel über abstrakte Algebra abgeliefert.
Auch würde es mich interessieren zu erfahren, wieweit Sie mit der Niederschrift Ihrer für Crelle vorgesehenen Fortsetzung zu der Korrespondenzarbeit sind. Ich habe leider bisher von Ihren schönen Resultaten noch gar keine bestimmten Vorstellungen, da ich Ihre Vorträge in Kreuznach nicht gehört habe. Was mir Dritte davon erzählten, genügt mir nicht, um mir ein Bild davon zu machen.
Wir sind in meinem Seminar damit beschäftigt, die Sätze von A. Weil und Siegel über die Lösungszahlen diophantischer Gleichungen auf rein algebraischer und arithmetischer Methode zu beweisen. Auch dafür leistet die Korrespondenztheorie gute Dienste.
Schade, dass ich Sie bei Ihrem Hiersein in den Osterferien nicht persönlich sprach.

Mit freundlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.48 25.05.1938, Deuring to Hasse

Jena, Abbeanum,
den 25. 5. 1938

Lieber Herr Hasse,

ich kann kaum eine Entschuldigung dafür angeben, dass ich den Enzyklopädieartikel noch nicht abgeliefert habe, wenn ich davon nicht reden will, dass ich wegen der dauernden Scherereien um die Dozentur in der letzten Zeit nichts rechtes habe arbeiten können. Da aber diese Angelegenheit jetzt wohl erledigt ist, geht es wieder besser, und ich hoffe, im Juli das Manuskript fertigstellen zu können. Im Semester habe ich ja mit Vorlesungen und Seminaren vieles zu tun.

Ich habe auch die komplexe Multiplikation noch nicht ausgearbeitet, schicke Ihnen aber anliegend einen Anfang, aus dem Sie das wesentliche sehen können. Der Aufbau ohne Benutzung der allgemeinen Klassenkörpertheorie steht allerdings noch nicht darin, es wird Ihnen aber sicher genügen, wenn ich Ihnen im folgenden den Gedankengang kurz schildere:

Man erklärt auch zu jedem Ideal a des Multiplikatorenrings M einen Körper K^a, nämlich das Kompositum aller K^α, α aus a. Ohne weiteres ist zu sehen, dass jedes $\mu \in M$ auch Multiplikator von K^a ist. Man zeigt leicht $(K : K^a) = \mathrm{N}a$. Ist M maximal (nur der Einfachheit halber), so hat K^a auch den Multiplikatorenring M, und zwar liegt $j(k)$ in $\Omega(j)$, weil man ja den Konstantenkörper k von vornherein gleich $\Omega(j)$ nehmen kann, wie in meinem Manuskript. Ist p Primideal, k_p seine Klasse, so lehrt Reduktion von K/K^p die Kongruenz

$$j(k_p) \equiv j^{\mathrm{N}p} \bmod. p$$

und allgemeiner, wenn man K^a/K^{ap} modulo p reduziert

$$j(kk_p) \equiv j(k)^{\mathrm{N}p} \bmod. p\,.$$

Daraus folgt wie üblich, dass die $j(k)$ über Ω konjugierte Zahlen sind, und dass $\Omega(j)/\Omega$ galoissch ist. Wird der Klasse k der durch $j(k_0) \longrightarrow j(k_0k)$ gegebene Automorphismus $\sigma_{\mathfrak{P}}$ von $\Omega(j)/\Omega$ zugeordnet, so ist das ein Isomorphismus der Klassengruppe auf die Galoisgruppe von $\Omega(j)/\Omega$. Die obige

Kongruenz lehrt das Reziprozitätsgesetz. Zunächst zwar nicht für alle p. Aber da die Kongruenz kraft ihrer Herleitung nicht nur für j, sondern für jedes Element von $\Omega(j)$ gilt, so folgt auch das Reziprozitätsgesetz sofort für alle Primideale. Auch die Unverzweigtheit von $\Omega(j)/\Omega$ folgt so! Jetzt kann man auch einen Meromorphismus von K angeben, der K auf K^a abbildet, wobei man allerdings auch den Konstantenkörper $k = \Omega(j)$ mit transformieren muss, nämlich mit seinem Automorphismus σ_{K_a}, dieser — nicht eindeutig bestimmte — Meromorphismus von K/Ω heisse etwa σ_a. Ist $\mathrm{d}x/y$ das ganze Differential von K, so gilt für sein Bild $\mathrm{d}(x^{\sigma_{\mathfrak{A}}})/y^{\sigma_{\mathfrak{A}}}$ eine Relation $\mathrm{d}(x^{\sigma_{\mathfrak{A}}})/y^{\sigma_{\mathfrak{A}}} = c\,\mathrm{d}x/y$ mit c aus $\Omega(j)$, dem Konstantenkörper. Man sieht leicht, dass das Hauptideal (c) im Ring der ganzen Zahlen von $\Omega(j)$ gleich dem Bild von a bei der durch $\mathrm{d}(x^{\mu})/y^{\mu} = c_\mu \mathrm{d}x/y$ gelieferten Abbildung von M in Ω ist — Hauptidealsatz!

Nimmt man wie in meinem Manuskript einen passenden Erweiterungskörper von $\Omega(j)$ als Konstantenkörper, so kann man ganz ähnlich die volle Theorie des Strahlklassenkörpers begründen, ohne die unangenehmen Ausnahmefälle in der üblichen Theorie, die ja dadurch bedingt sind, dass man sich an bestimmte Zahlen halten muss, während hier von vornherein die vollen Körper herangezogen werden.

Mit den besten Grüssen

Ihr

M. Deuring

1.49 02.11.1938, Deuring to Hasse

Jena, Abbeanum,
den 2. 11. 1938

Lieber Herr Hasse,

am 15. 2. 1937 hatte ich Ihnen brieflich einen Beweis des Residuensatzes mitgeteilt, der mit der Reduktion auf Elementardifferentiale arbeitet. Jetzt versuche ich vergeblich, ihn zu rekonstruieren, obwohl er ja wohl ganz einfach war; ich kann auch einen Durchschlag des Briefes nicht finden. Wenn Sie jenen Brief noch haben, so wäre ich Ihnen sehr dankbar, wenn Sie mir seinen Inhalt kurz mitteilen könnten.

Zur weiteren Ausarbeitung der komplexen Multiplikation und der komplexen Multiplikation der Abelschen Funktionen, von der wohl F. K. Schmidt in Baden–Baden gesprochen hat, bin ich noch nicht gekommen.

Mit bestem Gruss

Ihr

M. Deuring

1.50 07.07.1939, Deuring to Hasse

Jena, Abbeanum,
den 7. 7. 1939

Lieber Herr Hasse,

Hier ist das gewünschte Beispiel eines Funktionenkörpers mit Multiplikatoren, die Nullteiler sind:

k der Körper der komplexen Zahlen. α, β, γ_1, γ_2 seien drei verschiedene Zahlen. Durch

$$y_1^2 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma_1)\,; \qquad y_2^2 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma_2)$$

werden zwei elliptische Körper definiert. Ihr Kompositum $k(x, y_1, y_2) = K$ ist vom Grad 4 über $k(x)$ und hat, wie leicht nachzurechnen, das Geschlecht 2. Folglich ist

$$\mathrm{d}u_1 = \frac{\mathrm{d}x}{y_1}\,, \qquad \mathrm{d}u_2 = \frac{\mathrm{d}x}{y_2}$$

eine Basis der ganzen Differentiale. Bei den Automorphismen $\sigma_1 : x \longrightarrow x\,,\ \begin{cases} y_1 \longrightarrow -y_1 \\ y_2 \longrightarrow y_2 \end{cases}$; $\sigma_2 : x \longrightarrow x\,,\ \begin{cases} y_2 \longrightarrow -y_2 \\ y_1 \longrightarrow y_1 \end{cases}$ transformieren sie sich so

$$\begin{array}{lcllcl} (\mathrm{d}u_1)^{\sigma_1} & = & -(\mathrm{d}u_1)\,, & (\mathrm{d}u_2)^{\sigma_1} & = & \mathrm{d}u_2 \\ (\mathrm{d}u_1)^{\sigma_2} & = & \mathrm{d}u_1\,, & (\mathrm{d}u_2)^{\sigma_2} & = & \mathrm{d}u_2 \end{array}$$

σ_1 und σ_2 geben daher zwei Multiplikatoren σ_1, σ_2, bei denen sich $(\mathrm{d}u_1, \mathrm{d}u_2)$ nach den Matrizen $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ transformieren. Die Multiplikatoren $(1+\sigma_1), (1+\sigma_2)$ werden mithin durch die Matrizen $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dargestellt, und weil bei Charakteristik 0 die von den ganzen Differentialen gegebene Darstellung des Multiplikatorenrings treu ist, so wird $(1+\sigma_1)(1+\sigma_2) = 0$, aber $1+\sigma_1 \neq 0\,, \quad 1+\sigma_2 \neq 0\,.$

Mit den besten Grüssen

Ihr

1.51 10.08.1939, Deuring to Hasse

Jena, Abbeanum,
den 10. 8. 1939

Lieber Herr Hasse,

ich habe in meinem "unfairen" Beweis noch einen Fehler entdeckt. Er lässt sich wohl herausbringen, aber dadurch wird er so umständlich, dass ich ihn lieber weglassen will. Man muss da nämlich mit nicht maximalen Ordnungen ganzer algebraischer Funktionen rechnen und das ist nicht schön. Auch den Satz, dass im Falle der Charakteristik 0 die von den ganzen Differentialen erzeugte Darstellung des Multiplikatorenringes treu ist, kann wohl vorläufig ohne Zurückgreifen auf die Funktionentheorie bewiesen werden, weshalb ich ihn weglasse.[1] Er ist ja auch für die Zwecke der Riemannschen Vermutung nicht nötig. Meiner Ansicht nach müssen beide Sätze aus der Theorie der Abelschen Funktionen bewiesen werden, und da haben Sie jetzt das Wort. Was allein mittels der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen gemacht werden kann, scheint gemacht zu sein. Ich hoffe, dass Sie auch mit dem Rest der Arbeit einverstanden sind.

Mit bestem Gruss

Ihr

M. Deuring

[1]Deuring meint offenbar, dass der Satz *nicht* ohne Zurückgreifen auf die Funktionentheorie bewiesen werden kann.

1.52 19.08.1939, Hasse to Deuring

19. 8. 1939

Lieber Herr Deuring,

Beiliegend sende ich Ihnen :

1. Ihr Ms. Korrespondenzen II,
2. Bemerkungen dazu,
3. Eine von für meinen eigenen Bedarf angefertigte Ausarbeitung des Beweises des Abelschen Theorems.

Ich sende Ihnen 1. noch einmal zu, weil ich nach 2. den Eindruck habe, dass doch noch eine gründliche Überarbeitung mit zum Teil Neuschrift wünschenswert ist. Es steht Ihnen dabei frei, nach Belieben von der Mühe Gebrauch zu machen, die ich in 3. gesteckt habe.

Ausser den ausführlich zur Sprache gebrachten Punkten habe ich in Ihrem Ms. noch eine Reihe kleinerer stilistischer Korrekturen angebracht. Ich habe mich dabei sehr im Zaume gehalten, weil Sie mir gesagt hatten, dass Sie einen knappen Stil lieben. An manchen Stellen konnte ich aber doch nicht an mich halten. Hoffentlich halten Sie mich nicht für allzu pedantisch. Wenn Sie eine Neuschrift unternehmen, so möchte ich vorschlagen, den Antiautomorphismus *vor* dem Multiplikationssatz der Differentialmatrizen zu behandeln, weil dann der Leser schon besser in den Mechanismus der Zusammensetzung der Korrespondenzen hereingekommen ist. Ausserdem ist dies nötig, wenn Sie meinen Wunsch erfüllen und die Einordnung der Definition von $M(P)$ für inseparable P geben wollen; man kann ja nicht wissen, ob das nicht für die Vermutung R einmal gebraucht wird.

Bitte lassen Sie mich doch kurz wissen, was Sie zu meinen Bemerkungen denken. Ich lasse mich gerne belehren, wenn ich Ihnen mit meiner Kritik Unrecht getan habe. Mir liegt doch aber vor allem daran, dass Ihre Arbeit wirklich gut lesbar ist und gern gelesen wird.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

Bemerkungen zum Ms. Deuring.

Zu S. 3–4. Den Beweis von Hilfssatz 1 so breit auszuführen, scheint mir nicht im Einklang mit der wirklich oft übertriebenen Knappheit der Darstellung bei den späteren Hauptgegenständen. Hilfssatz 1 ist doch wohl jedem, der sich mit diesen Dingen beschäftigt, geläufig. Meinem Geschmack würde es entsprechen, Hilfssatz 1 mit Hilfssatz 2,3 in einen einzigen Hilfssatz zu vereinigen, so wie ich es in meinem beiliegenden für meine eigenen Zwecke bestimmten Ms. getan habe. Die anschliessende Bemerkung für endliche Konstantenkörper brauchen Sie in Wahrheit gar nicht, sie könnte also ohne Schaden ganz wegbleiben. Doch finde ich sie ganz interessant. In meinem Ms. habe ich sie als Hilfssatz 2 aufgenommen und später noch angewandt, entsprechend der Tatsache, dass ich später k nur als vollkommen, nicht als algebraisch–abgeschlossen vorausgesetzt habe.

Zu S. 5. Ihre Bemerkung betr. die Umkehrung von Hilfssatz 4, dass die angegebene hinreichende Bedingung für die Umkehrbarkeit auch notwendig ist, stimmt nicht. Es dürfte kompliziert sein, eine gleichzeitig notwendige und hinreichende Bedingung zu formulieren. Jedenfalls ist schon die folgende Bedingung hinreichend, die schwächer als Ihre ist: Jeder Primdivisor p_0 von K_0 enthält mindestens einen Primdivisor p von K, dessen Verzweigungsordnung e nicht durch p teilbar ist. Denn dann kann der zusätzliche Faktor $d = \prod_{p_0} \prod_{p|p_0} p^{\overline{e}-1}$ keinen Nennerprimdivisor $p_0 = \prod_{p|p_0} p^e$ vollständig wegheben, weil ja $\overline{e} = e$ für $p \nmid e$ gilt.

Zu S. 5–7. Ich würde Hilfssatz 5,6 in einen einzigen Hilfssatz vereinigen, so wie in meinem beiliegenden Ms. Mit Hinblick auf ev. späteres Zurückgreifen auf Ihre Arbeit würde ich ferner bei der *Definition* der Differentialspur noch nicht voraussetzen, dass $K|K_0$ separabel ist, und bemerken, dass im inseparablen Falle diese Definition den Wert 0 für die Differentialspur liefert. Siehe meine nachher folgenden Ergänzungsvorschlag zur Definition der Differentialmatrizen.

Zu S. 8 Als zweiten Satz von § 2 habe ich deutlichkeitshalber hinzugefügt: Insbesondere sei der Konstantenkörper k fortan algebraisch–abgeschlossen. Aus dem weiteren habe ich indirekt entnommen, dass Sie in der Tat diese Voraussetzungen gemacht wissen wollen. In Ihrem Teil I war sie an einer nicht sehr in die Augen fallenden Stelle mitten im Text eingeführt.

Da Sie in Teil I (ich glaube, durch meinen Eingriff) die ganzen Differentiale von K mit $\mathrm{d}\underline{u}$ (fett) statt mit $\mathrm{d}u'$ bezeichnet hatten, müssten Sie das besser auch hier in Teil II tun.

Zu S. 10. Der Text gefiel mir hier deshalb nicht, weil Sie für jeden der völlig analogen Schritte eine grammatisch andere Konstruktion gewählt hatten, so dass man gar nicht sah, dass ein systematisches Verfahren vorlag. Weshalb wählen Sie, wo Sie doch sonst so auf Knappheit in der Ausdrucksweise aus sind, ausgerechnet hier umständliche Worte statt knapper Formeln. Siehe mein beiliegendes Ms.

In der Bezeichnung gefällt mir nicht, dass die konstanten Primdivisoren durch dieselbe Typenart bezeichnet werden wie die nicht–konstanten. Ich plädiere für eine besondere Typenart (etwa geschwungene lateinische Typen á la Weierstrass–p und partielles Differential–d), damit sich die unwesentlichen konstanten Divisoren von den wesentlichen nicht–notwendig–konstanten auch schon durch das äussere Bild unterscheiden. Im übrigen gewinnen diese ganzen Schlüsse an Prägnanz, wenn man wie in meinem beiliegenden Ms. statt Ihrer allgemein gelassenen F Potenzen eines festen Primdivisors ersten Grades von K verwendet. Auf jeden Fall habe ich einmal den unnötigen Index 0 an Ihrem letzten (endgültigen) F weggestrichen.

Zu S. 11. Die im Text vorgesehene Fussnote 7) war nicht aufgeschrieben. Ich weiss nicht, was Sie da noch sagen wollten, nachdem Sie bereits in der Klammerbemerkung im Text, an die die Fussnote 7) sich anschliessen sollte, Ihre Vorstellung von diesem Beweis angedeutet hatten. Ich finde aber *diesen* Beweisgang nicht sehr schön. Um aus der anderweitig festgestellten Invarianz des Geschlechts auf die Invarianz der Dimensionen zu schliessen, kommt man mit dem von Ihnen angeführten Prinzip der Invarianz der linearen Unabhängigkeit nur bei den Klassen grossen Grades aus, für die Klassen kleinen Grades muss man noch eine Sonderbetrachtung anstellen. Es scheint mir viel naturgemässer, die Beweisordnung zu nehmen, die ich in meinem eingetragenen Entwurf für die Fussnote z) skizziert habe. Ich lasse mich aber in diesem Punkte gerne von Ihnen belehren, denn ich wünsche mir schon immer ine möglichst wenig umständliche Theorie beliebiger Konstantenerweiterungen (für Funktionenkörper, die durch eine absolut–irreduzible Grundgleichung über einem beliebigen Körper erzeugt sind).

Dass Sie die Koeffizienten aus K mit c bezeichnen, gefällt mir nicht recht. Sie sind zwar 'konstant', aber sie werden doch differenziert, und jedem Analytiker wird es gegen den Strich gehen, $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}$ zu lesen. Und wenn Sie schon die separierenden Elemente von K und K, nach denen differenziert werden soll, mit x und ξ bezeichnen, weshalb dann nicht aus Gleichberechtigungsgründen X statt A?

Auch würde ich die Zeichen d und ∂ gerade umgekehrt verwenden, damit die Differentiation in K, die doch vorher das Zeichen d hatte, auch jetzt von rechtswegen das Zeichen d behält. Es passt ja auch viel schöner, wenn die lateinischen Buchstaben (K–Elemente) das d und die griechischen Buchstaben (K–Elemente) das Zeichen ∂ bekommen. Natürlich wäre dies Zeichen ∂ schon auf S. 8 bei der Einführung der Differentiale von K zu verwenden.

Zu S. 12 Im Beweis von Hilfssatz 7 ist der übergang zur algebraisch–abgeschlossenen Hülle und die Anwendung des Residuensatzes überflüssig. F ist doch ein Primdivisor *ersten Grades* von $K(a)|K$, spaltet sich also nicht weiter auf. Und es genügt die Bemerkung, dass die Differentiale eines rationalen Funktionenkörpers den Grad -2 haben und somit nicht nur einen Primdivisor ersten Grades im Nenner haben können, wenn sie $\neq 0$ sind.

Zu S. 13. Ich ziehe hier die P–adische Zerlegung der Spur vor und würde mich ohne nähere Ausführung auf den aus der P–adischen Begründung bekannten Tatbestand stützen, dass für unverzweigte P–adische Erweiterungen ein Repräsentantensystem einer Basis mod. P gleichzeitig eine P–Ganzheitsbasis ist, woraus dann die gebrauchte Spurrestgleichung folgt.

Zu S. 15. Hier ist eine der Stellen, aus der ich indirekt geschlossen habe, dass Sie k als algebraisch–abgeschlossen vorausgesetzt wissen wollen; in Z. 5 (ursprünglich 3).

Zu S. 8–15. Ich fand es höchst traurig, dass man bei der Definition der Differentialmatrizen die inseparablen Primfaktoren ausschliessen muss, um den Beweis des Abelschen Theorems führen zu können. Ich habe mich lange bemüht, den Beweis so zu gestalten, dass A auch inseparable Primfaktoren enthalten darf, für die dann die explizite Definition $M(P) = 0$ voranzustellen wäre, wie es ja durch formale Übertragung der Definitionsformel folgt. Es würde auf Grund Ihrer Reduktion genügen, den Fall zu beherrschen, dass A lauter verschiedene Primfaktoren hat, darunter höchstens einen inseparablen. Aber ich kam dann mit den Rechnungen auf S. 14–15 nicht durch. In meinem Ms. habe ich versucht, jedenfalls zu zeigen, dass die aus der Klasseninvarianz gewonnene Definition von $M(P)$ für inseparable

P den Wert $M(P) = 0$ liefert. Dies ist mir für den Fall der Multiplikation von $K|k$ in sich auch gelungen, unter Ausnutzung des Antiautomorphismus. Siehe mein beiliegendes Ms. am Schluss.

Zu S. 16. Es stört etwas, dass Sie in Satz 2 einen Multiplikator von K_1 in K_2 mit α_{21} bezeichnen, während gleich darauf im Beweis der ihm zugrundeliegende Divisor mit D_{12} bezeichnet wird. Was ist der Grund dafür. Soll er dem Leser absichtlich vorenthalten werden ?

Ich würde übrigens die Differentialmatrizen mit M bezeichnen, da doch M Zeichen für den Multiplikatorenring ist. Oder legen Sie Wert darauf, dass Sie eine griechische Type haben, entsprechend Ihrer Gewohnheit, die Konstanten griechisch zu bezeichnen ?

Zu S. 18. Hier habe ich durchweg das 'konstant' präzisiert, weil ich fand, dass man zunächst gar nicht weiss, ob wirklich der bisherige auf K bezügliche Konstanzbegriff hier weiter gelten soll. Liegt Ihnen an der Wiederherstellung Ihrer ursprünglichen grammatisch glatteren Ausdrucksweise, so würde ich wünschen, dass zu Beginn generell gesagt wird, dass 'konstant' nach wie vor in dem Sinne 'konstanter Divisor von $K\mathsf{K}|K$' verstanden sein soll.

Zu S. 19–20. Dieser Beweis ist nach meiner Ansicht viel zu knapp dargestellt. Es ist mir unmöglich, *Ihren Gedankengang* wirklich bis ins einzelne zu verstehen, obwohl mir natürlich der Beweis selbst auf *meine Art* völlig klar ist. Die Unklarheit liegt an dreierlei:

a.) Sie geben dem Leser keine Auskunft, ob $\mu\nu$ die Zusammensetzung $P(Q(a))$ oder $Q(P(a))$ bedeuten soll; überdies hatten Sie im Text offenbar die eine dieser Reihenfolgen zugrundegelegt, in der Figur 2 aber die andere.

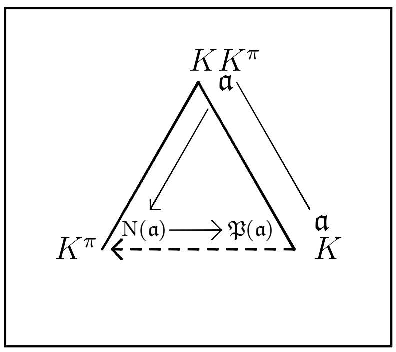
b.) Ich verstehe durchaus nicht, was $\varphi^{-1}\pi^{-1}\varphi$ bedeuten soll. Die Anwendung dieses Isomorphismus soll nach Ihrer Angabe auf den Körper K erfolgen. Das geht auch im ersten Schritt gut, denn der erste Faktor bildet ja K nur auf K ab. Nun sind wir in K angelangt. Der zweite Schritt verlangt dann, dass durch π^{-1} abgebildet werden soll. *Das geht aber nicht;* denn π^{-1} ist ein Isomorphismus, *der von* K^{π} *ausgeht und bei* K *landet.* Was Sie meinen, ist mir zwar ungefähr klar, aber ich finde es für den Leser unerträglich hart, dass Sie ihm diese sehr unpräzis formulierte Schlussweise zumuten.

c.) Sie tun dem armen Leser gegenüber so, als wenn die Multiplikatoren allein durch solche Isomorphismen gegeben seien, während doch diese nur den äusseren Rahmen liefern, in den sich dann die Bildungsregel der Korrespondenzen mit den drei Schritten (Verlagerung, Normbildung, isomorphe Rückabbildung) einbaut. Gerade an dem Fehlen jedes expliziten Ausdrucks für die eigentliche *Multiplikation* (Korrespondenz) liegt die Schwierigkeit für das Verständnis Ihres Gedankengangs.

Ich halte für diesen Beweis folgende Bezeichnungsweise für nützlich, die dann auch für Weiteres in Ihrer Arbeit (siehe nachfolgende Bemerkungen) sehr dienlich ist: Jedem nicht–konstanten Primdivisor P von [...] entspricht im Falle $\mathsf{K} \cong K$ ein Isomorphismus von K auf einen von K algebraisch–abhängigen Körper, und umgekehrt (Meromorphismus höheren Grades in meinem Sinne). Wir bezeichnen fortan *diesen* Isomorphismus mit π (er entspricht dem bisherigen $\varphi^{-1}\pi$) und die Korrespondenz von $K|k$ *zu sich* mit $P(a)$ (sie entspricht dem bisherigen $P(a)\varphi$). Die explizite Formel für eine nicht–konstante Primkorrespondenz von $K|k$ zu sich lautet demgemäss:

$$P(a) \,=\, \mathrm{N}_{K\,K^\pi|K^\pi}(a)\,.$$

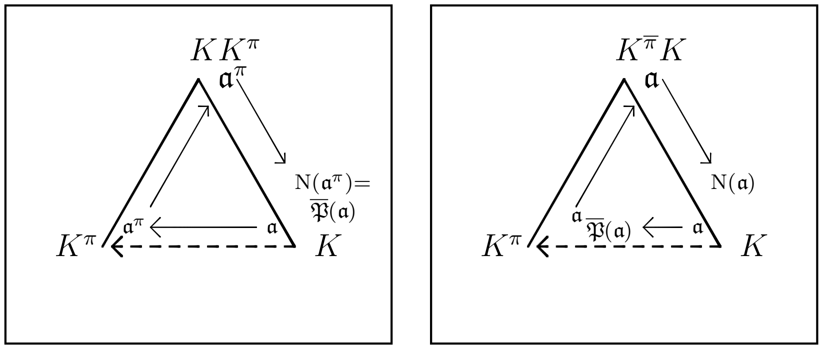
Schematisch:



Sei nun $\overline{P}$ (ich habe auf meiner Maschine keinen Stern) der gespiegelte Primdivisor zu P. Der zugehörige Meromorphismus entsteht, indem man in obigem Schema die Rollen von K und K^π auswechselt, was ja der Auswechslung der Rollen von K und K in dem ursprünglichen Schema — Teil I Ihrer Arbeit — entspricht. Das ergibt folgende Bildungsregel für die zugehörige Primkorrespondenz:

$$\overline{P}(a) \,=\, \mathrm{N}_{K\,K^\pi|K}(a^\pi) \,=\, \mathrm{N}_{K^{\overline{\pi}}K|K^{\overline{\pi}}}(a)^{\overline{\pi}^{-1}}.$$

Schematisch:

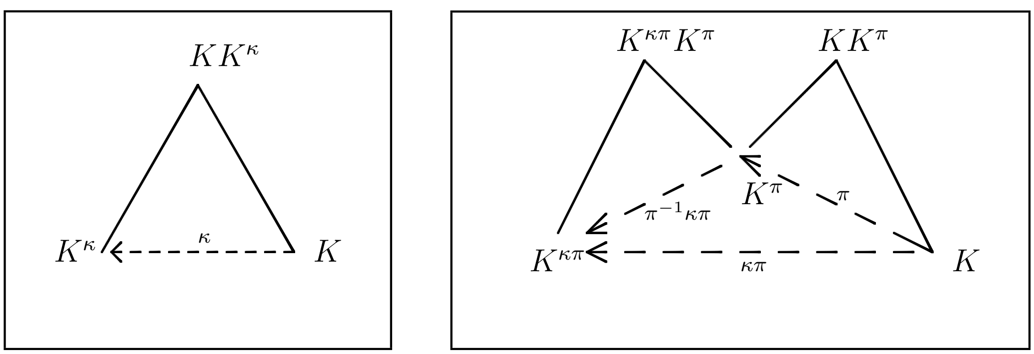


Es wird also das Dreieck jetzt in umgekehrter Richtung durchlaufen, wobei Normbildung in Verlagerung, Verlagerung in Normbildung, und Isomorphe Rückabbildung in Isomorphe Vorabbildung übergeht.

Für die Zusammensetzung zweier nicht–konstanter Primkorrespondenzen P und Q mit den Meromorphismen π und κ hat man die Regel:

$$\begin{aligned} Q(P(a)) &= \mathrm{N}_{K\,K^\kappa|K^\kappa}(\mathrm{N}_{K\,K^\pi|K^\pi}(a)^{\pi^{-1}})^{\kappa^{-1}} \\ &= \mathrm{N}_{K^\pi K^{\kappa\pi}|K^{\kappa\pi}}(\mathrm{N}_{K\,K^\pi|K^\pi}(a))^{(\kappa\pi)^{-1}}. \end{aligned}$$

Schematisch:



Die zweite Form entsteht, indem man in dem κ zugrundeliegenden Dreieckschema den Ausgangskörper K durch π isomorph auf K^π abbildet; dadurch wird $K^{\kappa\pi}$ definiert:

> $K^{\kappa\pi}$ hängt mit K^π durch dieselben algebraischen Relationen zusammen, wie K^κ mit K.

Mittels dieses Formalismus ist es nun leicht, Ihren Gedankengang zum Beweis der Antiautomorphieeigenschaft in verständlicher und präziser Form auszusprechen. Störend macht sich allerdings dabei leider jetzt bemerkbar, dass in Teil I die Symmetrie des hyperkomplexen Systems in seinen beiden Komponenten nicht zum Ausdruck kam, sondern unsymmetrisch gearbeitet wurde; daran bin soviel ich weiss *ich* Schuld. Ich bitte also um Verzeihung für diese unschöne Störung der Harmonie. In meiner Seminarausarbeitung, wo ich den Antiautomorphismus schon behandelt habe, habe ich diesen Irrtum bereits eingesehen und eine Darstellung der Korrespondenzenzusammensetzung gegeben, aus der die Antiautomorphieeigenschaft ohne weiteres in die Augen springt

Zu S. 21. Hier haben Sie systematisch übersehen, dass im Sinne Ihrer Korrespondenzdefinition $D(o)$ ein Divisor von K ist, und dass man demgemäss neben o noch den isomorph zugeordneten Divisor von K einführen muss. Selbst wenn Sie $D(o)$ jetzt als Divisor von K verstanden wissen wollen — dann hätte das aber doch zum mindestens irgendwo gesagt sein müssen — kommen Sie um diese Sache nicht herum; denn D kann nicht plötzlich als Divisor von $K\mathsf{K}|\mathsf{K}$ aufgefasst werden.

Zu S. 22 Insbesondere ist die Gleichung $\mathrm{N}_{K|K^\mu}(o) = o$ falsch. Sie lautet richtig:

$$\mathrm{N}_{K|K^\mu}(o) = o^\mu \qquad (\text{oder } = \mu o\text{, im nachher erklärten Sinne}).$$

Die jetzt gegebene Bemerkung über die Auffassung der Multiplikatoren als *Links*operatoren hätte schon vor den Beweis von Satz 3 gehört, im Zusammenhang mit der Festlegung der Bedeutung des Multiplikatorenprodukts.

Zu S. 23. Hier tritt endlich — ganz unscheinbar im Text — die Formel $P_\mu(x) = \mathrm{N}_{K|K^\mu}(x)^{\mu^{-1}}$ auf, die ich oben vor oder im Beweis von Satz 3 vermisste. Man kann es keinem Leser übelnehmen, wenn er an dieser Stelle (und auch schon vorher S. 22 oben) stockt und versucht, sich an Hand der in Teil I gegebenen Anleitungen zu überzeugen, dass diese Formel wirklich stimmt. Sie dürfen nicht vergessen, dass in Teil I die Korrespondenzen von $K|k$ zu sich formelmässig überhaupt kaum behandelt sind. Man findet dort einzig die ganz kurze Anleitung auf S. 185 oben. Im übrigen schliesse ich aus dieser Stelle, dass Sie in der Tat die Bezeichnung $D(a)$ jetzt — stillschweigend! — so verstanden wissen wollen, dass $D(a)$ ein Divisor von K statt von K ist.

Zu S. 23–24. Ich weiss, dass Ihnen die Anwendung der Differentialdeterminanten nicht sehr angenehm ist. Auch ich finde sie nicht so schön, dass man sie nicht vermeiden sollte, wo es geht. Hier geht das tatsächlich, wenn man von dem Fall Char. $k = 2$ absieht. Wegen der Nullteilerfreiheit ist nämlich die Char. von M entweder 0 oder eine Primzahl. Wäre sie eine Primzahl, so wären alle natürlichen Multiplikatoren entweder Null oder Einheiten (Bemerkung von Witt!); es genügt also, einen einzigen natürlichen Multiplikator aufzuweisen, der weder Null noch Einheit ist. Für Char. $k \neq 2$ leistet dies der Multiplikator 2. Es genügt zu zeigen, dass einerseits nicht identisch $p^2 \sim o^2$ gilt, andererseits ein $p \neq 0$ dieser Art existiert. Die p dieser Art sind die Differentialteiler des (durch o eindeutig bestimmten) Körpers $K|k(x)$, wo x nicht–konstantes Multiplum von o^{-2} ist. Dieser Körper ist aus Geschlechtsgründen separabel und hat eine Differente vom Grad 4. Für Char. $\neq 2$ enthält diese ein $p \neq 0$. In meinem Seminar habe ich den Ausnahmefall dadurch umgangen, dass ich den Grad des zur Zweimultiplikation gehörigen Primdivisors P_ℓ in bezug auf K als Konstantenkörper explizit ausrechnete. Doch ist das nicht sehr erfreulich. Vielleicht fällt Ihnen noch eine kleine Ergänzung zu dem an sich sehr schönen Wittschen Gedanken ein, so dass die Differentialdeterminante vermieden wird. Wenn nicht, schadet es aber in meinen Augen nicht viel.

Zu S. 24. Die Richtigkeit der im Text gegebenen Bildungsregel für $P(\overline{P}(a))$ wird dem Leser erst dann einsichtig werden, wenn Sie die obigen expliziten Formeln für $P(a)$ und $\overline{P}(a)$ vorher gebracht haben. Dann können sie einfach einsetzen, also rechnen, anstatt mit Worten heranzugehen.

Zu S. 25. Es ist unschön, dass vorher der n–Mult. Körper allgemein mit K^n bezeichnet wird, und nachher der p–Mult. Körper mit $K^{(p)}$, noch dazu ohne jedes erklärende Wort für den Leser. *Ich* weiss den Grund, aber der arme Leser ?

Der Schritt von § 2 zur Beziehung $(\mathrm{d}u)^\mu = \mu'\mathrm{d}u$ ohne jedes erklärende Wort ist wirklich ganz unverantwortlich knapp. Zum mindestens muss doch gesagt werden, dass bei der Betrachtung der Multiplikatoren von $K|k$ *in sich* die beiden Differentialbasen von K und K durch den Isomorphismus φ zu verkoppeln sind. Noch schönder fände ich es, wenn Sie am Schluss von § 2 kurz auf den Fall der Multiplikation von $K|k$ in sich eingingen und — entsprechend zu den von mir in § 3 gewünschten expliziten Formeln — auch hier die explizite Formel:

$$\mathrm{N}(P)\mathrm{d}u = \mathrm{S}_{K\,K^\pi|K}\big((\mathrm{d}u)^\pi\big)$$

angäben. Dann hätten Sie auch gleich Gelegenheit, auf die von mir oben berührte Frage der Gültigkeit dieser Formel für inseparable P einzugehen.

Zu S. 26. Als ich neulich mein Ms. zusammen mit Geppert las, stellte ich fest, dass er meine Bezeichnung p–Potenznenner an der entsprechenden Stelle grundsätzlich missverstand und demgemäss falsch ins Italienische übersetzte. Er verstand nämlich als unverbildeter Deutscher: Nenner, die p–te Potenzen sind. Aus diesem Grunde habe ich die Korrektur im Text angebracht.

Zu S. 27. Die Hinzufügung von ´und $= 2$' ist wohl eher eine Hilfe als eine Erschwerung für den Leser. Noch lieber würde ich die nachträglich eingefügte Wendung sehen, die explizit auf den Ausnahmefall bezug nimmt, wie er vorher erwähnt war.

1.53 24.08.1939, Deuring to Hasse

JENA, ABBEANUM,
DEN 24. 8. 1939

LIEBER HERR HASSE,

anliegend schicke ich Ihnen mein Manuskript in einer etwas überarbeiteten Form zurück. # 1. habe ich Ihrem Vorschlag entsprechend zusammengerafft. Hilfssatz 1 wird wirklich nur für unendliches k gebraucht; die Multiplikatorentheorie bei beliebigem vollkommenem Konstantenkörper ist ja sehr leicht aus der für algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper zu gewinnen. Den Zusatz für endliches k habe ich stehen gelassen, weil er ganz hübsch ist. Dass ich die Differentialspur nur im separabeln Fall eingeführt habe, hat seinen guten Grund. Ihre Behauptung, dass $\mathsf{M}(P) = 0$ sei, wenn P inseparabel ist, ist nämlich falsch. Zwar gilt $\mathsf{M}(P^*) = 0$, aber daraus folgt keineswegs $\mathsf{M}(P) = 0$, wie Sie schon am Beispiel der elliptischen Körper sehen können. Die Matrizendarstellung ist bei dem Antiautomorphismus nicht invariant. Die Differentialspur ist also sozusagen im inseparabeln Fall nicht immer Null. Dass $\mathsf{M}(P^*) = 0$ ist, habe ich angefügt, weil es ja wichtig ist. Ich hatte es ganz vergessen. Die Bezeichnung der Differentiale habe ich Ihrem Vorschlag entsprechend umgeändert. Die Fussnote über die Invarianz von Geschlecht und Klassendimension bei Konstantenerweiterung habe ich so abgefasst wie Sie vorschlugen. Eine vernünftige Theorie der Konstantenerweiterung ist auch mein Schmerzenskind. Uebrigens ist mir $\mathrm{d}c/\mathrm{d}x$ angenehmer als $\mathrm{d}X/\mathrm{d}x$.

Der Uebergang von K zu seiner algebraisch abgeschlossenen Hülle beim Beweis von Hilfssatz 4 (früher 7) ist eine Verbeugung vor der höheren Logik. Denn der Hilfssatz 3, auf dem der Beweis beruht, ist, wie die ganze Differentialtheorie, nur für vollkommenen Konstantenkörper formuliert und bewiesen worden. Ich habe das jetzt ausdrücklich gesagt.

Ich habe mit der Zerlegung des Restklassenrings und nicht mit der Zerlegung der p–adischen Erweiterung gearbeitet, weil ja nur der Restklassenring gebraucht wird.

Mit dem Antiautomorphismus habe ich mich tatsächlich geirrt, ich habe es verbessert. Und ausserdem die nötigen Bemerkungen über die Bildung von $P(a)$ eingefügt.

Ich bin übrigens gar nicht für ein zu starkes Arbeiten mit Formeln. Sie fallen mir beim Lesen und Schreiben viel schwerer als Text. Auch sollte bei manchen Dingen, z. B. bei der Zusammensetzung der Korrespondenzen und bei dem Antiautomorphismus, nicht alle Einzelheiten darstellen, weil dadurch der einfache Kern der Sache verschleiert werden kann.

Ihre Einwände gegen den letzten # waren z. T. nur gegen Schreibfehler gerichtet. Ich habe der Deutlichkeit halber die Eins des Multiplikatorenringes mit ε und dementsprechend die natürlichen Multiplikatoren mit $n\varepsilon$ bezeichnet, damit wird die leidige Unterscheidung zwischen K^p und $K^{p\varepsilon}$ besser.

Ihre Antipathie gegen "in bezug auf" ist, wenn ich recht unterrichtet bin, nur eine böswillige Erfindung schreibfauler Kanzlisten. Der Begriff, der mit i. b. a. gemeint ist, hat ja nichts mit Kissenbezügen oder Geldbezügen (auch ein schreckliches Wort) zu tun, sondern mit Beziehungen.

Ich hoffe, dass jetzt das Manuskript Ihren Beifall findet!

Mit den besten Grüssen

Ihr

M. Deuring

1.54 29.08.1939, Hasse to Deuring

29. 8. 1939

Lieber Herr Deuring,

Herzlichen Dank für die so schnelle Wiedereinsendung Ihres Ms. Auch für den Hinweis auf meinen Fehler betr. die inseparablen Primdivisoren besten Dank. Ich habe jetzt das Ms. zum Druck eingesandt. Nur noch eine kleine Änderung habe ich eingefügt, auf die ich ja schon in meinen vorigen langen Bemerkungen zu sprechen kam, nämlich bei der Einführung der normierten Meromorphismen. Dort muss nämlich zwischen dem Bezugsprimdivisor o von $K|k$ und seinem isomorphen Bild o^{β} in dem Hilfskörper $K^{\beta}|k$ unterschieden werden (mangels eines Zeichens für phi schreibe ich hier β). Die Normierungsrelation lautet richtig geschrieben:

$$P \sim \frac{Do^{\beta}}{D(o)^{\beta}} .$$

Ferner musste vor der Betrachtung der quadratischen Gleichung für die Multiplikatoren jetzt noch gezeigt werden, dass hier wieder $\beta = 1$ gerechnet wird.

´In Beziehung auf' klingt für mein Gefühl schrecklich pedantisch, wenn es vielleicht auch sprachlich richtiger ist. Ich finde aber, wenn man überhaupt anfängt über manche Redeweise vom sprachlichen Standpunkt aus nachzudenken, dann kann man kein Ende mit solchen Sprachreinigungen finden. Wenn Ihnen 'in bezug auf' wirklich so unsympathisch ist, entfernen Sie es bei der Korrektur bitte wieder zugunsten Ihrer Redeweise.

Ob ein weiteres Erscheinen des Journals im Falle eines Krieges gesichert ist, kann ich natürlich nicht sagen. Vorläufig lasse ich aber alles weiter seinen alten Gang gehen. Hoffen wir das Beste!

Mit herzlichem Gruss und Heil Hitler,

Ihr

H. Hasse

1.55 16.02.1949, Deuring to Hasse

HAMBURG[1],
16. 2. 1949

LIEBER HERR HASSE,

für Ihre Separatenzusendung meinen besten Dank. Zu meiner Überraschung sehe ich, dass Sie zur Zeit in Göttingen sind. Ich möchte Ihnen daher in aller Eile einen Vorschlag machen : Wären Sie bereit, uns in der nächsten Woche einige Vorträge über Ihre neuesten Arbeiten zu halten ? Wir haben für das laufende Etatjahr noch einige Mittel zur Verfügung, die wir gerne nutzbringend verwenden möchten. Bitte entschuldigen Sie die formlose Eile, aber wir möchten natürlich Sie gerne noch vor Semesterende hier haben. Donnerstag, Freitag und Sonnabend, vielleicht auch noch Montag 28. 2. wären passend.

Mit den besten Grüssen

Ihr

MAX DEURING

[1]Deuring hatte inzwischen einen Ruf nach Hamburg angenommen.

1.56 18.02.1949, Cl.Hasse to Deuring

Gttg. 18. II.

Lieber Herr Deuring, als ich eben Ihren Brief aufmachte, polterten nur die beiliegenden Lebensmittelkarten entgegen. Gewiss haben Sie in der Eile den falschen Umschlag genommen.

Leider muss ich Sie enttäuschen — mein Mann ist nicht hier bei uns. Die Separata habe ich von hier aus verschickt, da es nicht möglich war, die dicken Pakete nach B. zu befördern. Mein Mann besteht mit allerlei Blockade–Belastungen sein Berliner Semester. Zwar ist dieses am 28. Februar beendet, aber vor April wird er nicht in den Westen kommen. Ihren Brief schicke ich natürlich an meinen Mann weiter.

Beste Grüsse Ihre

Clärle Hasse

1.57 03.03.1949, Hasse to Deuring

3. März 1949

Lieber Herr Deuring,

Haben Sie besten Dank für Ihre freundlichen Zeilen, die meine Frau Ihnen ja schon vorläufig beantwortet hat.

Es ist sehr freundlich von Ihnen, mich zu einem Vortrag dort einzuladen. Diesmal ging es nun leider nicht. So etwas muss ja bei den gegenwärtigen Verhältnissen leider von langer Hand vorbereitet sein. Da auch Blaschke schon seit einem Jahr in jedem Brief bittet, ich möchte doch einmal zum Vortrag nach Hamburg kommen, darf ich mir erlauben, Ihnen folgenden Vorschlag zu machen.

Wir sehen dafür einen geeigneten Termin im Sommer vor. Für mich wäre es am günstigsten, wenn es an einem Sonnabend oder Montag ginge. Es wäre dann erforderlich, dass Sie mir eine formelle Einladung des Instituts, womöglich mit einer Befürwortung des dortigen englischen Universitätsoffiziers schickten, damit ich hier bei der englischen MilReg. einen Flug hin und zurück genehmigt bekomme. Anders kann ich es rein zeitlich nicht machen. Denn ich muss schon wegen einer Pfingstreise nach Oberwolfach in Angelegenheiten Enzyklopädie mehrere Vorlesungsstunden ausfallen lassen, und dann noch zweimal meinen von oben auferlegten Verpflichtungen nachkommen und die Universitäten Jena und Rostock mit zahlentheoretischen Vorträgen "betreuen".

Hinsichtlich der Enzyklopädie darf ich mir bei dieser Gelegenheit gleich die Anfrage erlauben, ob wir (d. h. Sperner und ich) nach wie vor auf einen Artikel von Ihnen rechnen dürfen. Sie waren damals für die Darstellungstheorie vorgesehen; ein Vertrag ist wohl allerdings mit Ihnen noch nicht geschlossen worden. Nun wollen Sperner u. ich Pfingsten eine völlige Neuplanung der noch zu schreibenden Artikel des Algebra–Zahlentheoriebandes vornehmen. Da wüsste ich sehr gerne, ob Sie uns Ihre Mitarbeit weiter schenken wollen und welches Thema Ihnen am liebsten wäre. Es sind u. a. noch zu besetzen:

Lineare Algebra
Allgemeiner Körpertheorie

Algebra der hyperkomplexen Zahlen
Allgemeine Darstellungstheorie
Invarianten endlicher Gruppen lin. Transf.
Bewertungstheorie
Arithmetik der hyperkomplexen Zahlen
Klassenkörper der komplexen Multiplikation
Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionenkörper
Diophantische Approximationen und Diophantische Gleichungen
Diophantische Kongruenzen.

Wir wären Ihnen sehr dankbar, wenn Sie nicht nur einen Artikel übernähmen, und versprechen Ihnen, dass wir Ihnen die dazu nötige Arbeitszeit gewähren werden, ohne in unliebsamer Weise zu drängen.

Sehr bedanken wollte ich mich auch schon lange für Ihre freundliche an Rohrbach gegebene Zusage, bei der Herausgabe von "Crelle" mitzuwirken. Sie machen mir damit eine grosse Freude. Es wäre schön, wenn Sie nicht nur selbst bald einmal eine Arbeit schickten, sondern auch in Ihrem Bekannten– und ev. –Schülerkreis gute Arbeiten zu erhalten bestrebt wären. Wir können recht schnell drucken. Die Sache ist bereits angelaufen. Der Druck erfolgt in der Zbl. Druckerei in Köthen in bewährter Güte und Schnelligkeit.[1]

Ich hörte, dass Sie Rohrbach zunächst missverstanden und geglaubt haben, dass Sie an meiner statt die Herausgabe übernehmen sollten, und dass Sie das abgelehnt haben. Für diese in der heutigen Zeit seltene und darum umso höher zu bewertende Geste danke ich Ihnen ganz besonders.

Nun wollte ich Ihnen noch sagen, über was ich in Hamburg vortragen könnte. Ich habe zwei Themen, und glaube bei beiden, dass sie dort Interesse finden würden.

1. Invariante Kennzeichnung galoisscher Körper. — Davon erzählte ich Ihnen bereits einmal auf der Strasse in Göttingen. Ich habe die Arbeit jetzt abgeschlossen, und sie soll im ersten neuen Crelleband erscheinen. Ich erhoffe mir von ihr eine Belebung der Klassenkörpertheorie, zunächst im Kleinen, dann aber auch im Grossen.

2. Klassenzahlformeln in arithmetischer Gestalt für Körper, deren Normalkörper über einem (reell– oder imaginär–)quadratischen Zahlkörper

[1] Beginnend mit dem Band 187 (1950) erscheint der Name von Deuring auf dem Titelblatt des Crelleschen Journals.

abelsch ist. Es sind das Verallgemeinerungen der Kummerschen Formeln auf singuläre Werte von Modul– und elliptischen Funktionen statt der die Kreiseinheiten bildenden singulären Werte der Exponentialfunktion. Hier scheint mir besonders bemerkenswert, dass auch der reell–quadratische Fall erfasst wird. Die Funktionen, die hier auftreten, sind erstaunlicherweise nicht neu, sondern wieder die Funktionen des imaginären Falles, jetzt aber wird die hyperkomplexe Ebene des reellen quadr. Körpers (Koordinaten die beiden Konjugierten) formal zu einer gewöhnlichen komplexen Ebene gemacht und dann (logarithmisch) über einen Fundamentalbereich der reellen Einheitengruppe integriert:

$$\begin{array}{rcccl} \omega_1(x) & = & \omega_1 x & + & i\omega_1 x \\ \omega_2(x) & = & \omega_2 \dot{x} & + & i\omega_2' x^{-1} \end{array} \quad \Bigg| \quad \binom{\omega_1}{\omega_2} \quad \text{reell–quadr. [...]}$$

$$\log D^{\varepsilon}(\omega_1,\,\omega_2) = \int_{x=1}^{\varepsilon} \log \Big[\Omega\,\Delta_{12}\big(\omega_1(x),\,\omega_2(x)\big)\,\overline{\Delta_{12}\big(\omega_1(x),\,\omega_2(x)\big)}\Big]\,\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

wo Δ_{12} die 12–te Wurzel der Weierstr. Diskr. und Ω der konjugierte Inhalt der Fundamentalmasche (zur Normierung auf Dimension 0). Entsprechend auch für die Strahlklasseninvarianten. $D_1^{\varepsilon}(\omega_1,\,\omega_2)$ ist dann der „singuläre Modul". Mit scheint das besonders deshalb interessant, weil doch die in der Klassenzahlformel auftretenden Funktionen einen Anhalt dafür geben, welche Funktionen man zur Klassenkörperkonstruktion brauchen wird. Einen Überblick über das in den Klassenzahlformeln der genannten Körper auftretende Funktionenmaterial gebe ich in einer Arbeit, die in den Annali di Matematica (Festbände) erscheinen wird. Die Klassenzahlformeln selbst wird mein Schüler C. Meyer in seiner Dissertation bringen, die sich nun endlich ihrer Vollendung nähert. Schwierigkeiten macht noch der Fall der Charaktere, in deren Führer nur *eine* der beiden reellen unendlichen Primstellen aufgeht. Dafür ist die Kroneckersche Grenzformel sehr kompliziert, und Meyer meint, hier wird ein neuer Funktionentypus auftreten. Ich glaube das aber nicht. Denn es wäre absurd, dass die anderen Fälle mit dem elliptischen Funktionen auskommen sollten, und dieser Fall etwa Integrale über Besselfunktionen erfordern sollte.

Mein grosses Buch über Zahlentheorie (Grundlagen der Bewertungstheorie, Divisorentheorie und algebraischen Zahlentheorie) steht vor dem Erscheinen. Ich lese eben die letzte Revision. Dann folgt noch in der gelben Sammlung ein Buch “Vorlesungen über Zahlentheorie” mehr elementarer Art, das zu 3/4 geschrieben ist. Auch das muss in diesen Ferien im Ms. fertig werden, wenn das Göttinger Residuum meiner Familie weiter leben soll.

Nochmals herzlichen Dank für alles und beste Grüsse

Ihr

H. Hasse

1.58 25.10.1949, Deuring to Hasse

Göttingen, 25. 10. 1949

Lieber Herr Hasse,

besten Dank für Ihren Brief. Die Angelegenheit Suetuna ist ja damit aufs beste erledigt, dass er selbst die notwendigen Ergänzungen machen will; das bisherige Manuskript ist sicher brauchbar.

Die Enzyklopädiehefte würde ich sehr gerne nehmen, einmal weil sie sehr nützlich sind und zweitens, weil ich, was Bücher angeht, an einem Vollständigkeitskomplex leide, d. h. ich habe nicht gerne unvollständige Sammelwerke und dergleichen. Teilen Sie mir doch bitte noch mit, wohin ich Ihnen die Kaufsumme überweisen soll. [1]

Mit den besten Grüssen

Ihr

M. Deuring

---

[1] Remark by Hasse on the left margin: "beantw. 29. 10. 1949"

1.59 04.05.1950, Deuring to Hasse

Hamburg, 4. Mai 1950

Lieber Herr Hasse,

es wird Ihnen sicher bekannt sein, dass ich einen Ruf nach Göttingen (als Nachfolger von Herglotz) angenommen habe und dass ich im Wintersemester nach Göttingen gehen werde. Für die Neubesetzung hier haben wir vor kurzem unsere Vorschläge gemacht, mit Ihnen an erster Stelle. Wir brauchen aber für die Behörde noch Ihren Entnazifizierungsbescheid. Darf ich Sie bitten, mir eine beglaubigte Abschrift davon zu schicken ?

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

M. Deuring

1.60 06.01.1951, Hasse to Deuring

Professor Dr. H. Hasse
Ahrensburg b. Hamburg
Hamburgerstr. 43

6. Januar 1951

Lieber Herr Deuring,

Sie würden mir einen grossen Gefallen tun, wenn Sie mir einmal ganz offen schrieben, wie Sie über die wissenschaftliche Befähigung von Dr. E. A. Behrens denken. Wir stehen vor der Frage, ob wir ihn weiter in seiner hiesigen Assistentenstelle belassen sollen.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.61 29.01.1951, Deuring to Hasse

Göttingen, 29. 01. 1951
Reinhäuser Landstr. 70

Lieber Herr Hasse,

leider ist es mir nicht möglich, in diesem Semester nach Hamburg zu kommen. Ich will versuchen, Herrn Schmid zu überreden, wenn er nach Hamburg kommt, auch uns in Göttingen zu besuchen.

Ihren Wunsch, einen festen „wirklichen" Termin für die Fertigstellung der Enzyklopädie Artikel auszumachen, finde ich begreiflich. Ich möchte zunächst für den Artikel über komplexe Multiplikation dem „Papier"-Termin (1.1.1952) ein halbes Jahr höchstens addieren. Für den zweiten Artikel möchte ich mich erst festlegen, wenn ich eine genauere Übersicht habe, die ich in den Ferien gewinnen will.

Die Stellung des Artikels über fastperiodische Funktionen unter der analytischen Zahlentheorie scheint mir doch ziemlich unglücklich. Denn obwohl die Theorie der Zetafunktion der Anlass zur Theorie der fastperiodischen Funktionen war, ist der Zusammenhang doch sehr lose, während die heutige Theorie — insbesondere der von Herrn Maak darzustellende Teil — mit Recht als ein Teil der allgemeinen Darstellungstheorie angesehen werden muss. Vielleicht ist es möglich, den Artikel in einen „Nachtrag" aufzunehmen — solche Nachträge gibt es ja auch in der alten Enzyklopädie. Sie sind ja auch ganz natürlich, denn erfreulicherweise entwickelt sich die Mathematik immer weiter, so dass im Laufe eines Unternehmens wie der Enzyklopädie neue Gebiete auftauchen können, die zu Beginn der Planung noch nicht vorhanden waren.

Herr Behrens bildet ein schwieriges Problem, über das mich auszulassen ich zögere. Ich habe mit seiner wissenschaftlichen Arbeit nicht Kontakt finden können, mein Eindruck ist, dass er ein eigenes fruchtbares Arbeitsgebiet nicht gefunden hat. Ob er es noch finden wird, scheint mir fraglich. Dennoch sollte man ihm noch eine Chance geben.

Von Herrn Petersson hörte ich beiläufig, dass Ihnen die 1000. DM für Vortragszwecke mit der Begründung abgelehnt wurden, sie seien von mir nicht ausgenutzt worden. Das ist die glatte Unwahrheit : in den beiden Geschäftsjahren 48/49 und 49/50 sind sie voll verbraucht worden, und 50/51 zur Hälfte — das schien mir korrekt zu sein, weil ich genau die Hälfte des Geschäftsjahres in Hamburg war. Das musste die Hochschulabteilung doch wissen oder hätte es feststellen können!

Mit dem Gitterpunktproblem bin ich leider nicht durchgekommen, es ist unglaublich tückisch. Immerhin glaube ich, mit meinen Ansätzen etwas Brauchbares herauszubekommen.

Mit den besten Grüssen

Ihr

M. Deuring

1.62 27.05.1953, Deuring to Hasse

GÖTTINGEN, 27. 5. 1953
REINHÄUSER LANDSTR. 70

LIEBER HERR HASSE,

[1]bei der Arbeit an meinem Enzyklopädie–Artikel über komplexe Multiplikation ist mir in Ihrer Arbeit „Neue Begründung ..."II, S. 83 etwas aufgefallen, was mir nicht richtig zu sein scheint, nämlich der Satz : , ,Da die Multiplikation mit einer Einheit durch eine Modulsubstitution ersetzt werden könnte, können hierbei keine zwei der Zahlen assoziiert sein."Sei nämlich etwa $\lambda_\mu = \lambda_\nu \varepsilon$, ε Einheit, so ist

$$M'_\nu \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\lambda_\nu = S_\nu M \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}, \qquad M'_\mu \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\lambda_\nu\varepsilon = S_\mu M \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}.$$

Es wird

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\varepsilon = Q\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}, \quad Q \text{ unimodular,}$$

also

$$M\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = S_\nu^{-1} M'_\nu \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\lambda_\nu,$$

daher

$$S_\nu^{-1} M'_\nu = S_\mu^{-1} M'_\mu Q,$$

was zunächst keinen Widerspruch einschliesst.

Man kann ja *nicht* $M'_\mu \binom{\alpha_1}{\alpha_2}\varepsilon = Q' M'_\mu \binom{\alpha_1}{\alpha_2}$ mit unimodularem Q' behaupten, da $M'_\mu \binom{\alpha_1}{\alpha_2}$ keine Idealbasis zu sein braucht.

Die in Rede stehende Behauptung (im wesentlichen $g_M(\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega\big(j(k)\big)$) folgt aber einfach so : Die Gleichung — S. 82 —

$$G\big(t, j(k)\big) = \prod_{\nu=1}^{z} \big(t - g_{M'_\nu}(\alpha_1, \alpha_2)\big)$$

drückt aus, dass eine zu $g_M(\alpha_1, \alpha_2)$ über $\Omega\big(j(k)\big)$ konjugierte Zahl ein $g_{M'_\nu}(\alpha_1, \alpha_2) = \lambda_\nu^e g_M(\alpha_1, \alpha_2)$ ist. Sei σ der Automorphismus des von g_M

[1] Remark by Hasse on the first page : "beantw. 29. 5. 53"

(α_1, α_2) über $\Omega\big(j(k)\big)$ erzeugten Normalkörpers, der $g_M(\alpha_1, \alpha_2)$ in $\lambda_\nu^e g_M$ (α_1, α_2) überführt, $\sigma^N = 1$. Dann ist $\lambda_\nu^{eN} = 1$, d. h. λ_ν ist eine Einheitswurzel in Ω, also $\lambda_\nu^e = 1$, $g_M(\alpha_1, \alpha_2)^\sigma = g_M(\alpha_1, \alpha_2)$, $\sigma = 1$, w. z. b. w.

Für die Überlegungen in Ihrer Arbeit „Zum Hauptidealsatz der komplexen Multiplikation" Monatshefte 38 gilt das Entsprechende.

Bei dieser Gelegenheit noch eine andere Frage: In Ihrer Arbeit „Das Zerlegungsgesetz für die Teiler des Moduls ...", Monatshefte 38, steht am Schluss im Zusatz bei der Korrektur: „Jedoch kann man wie *bei späterer Gelegenheit* gezeigt werden soll ..."

Wo steht das?

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

Max Deuring

1.63 30.05.1953, Deuring to Hasse

Göttingen, 30. 5. 1953
Reinhäuser Landstr. 70

Lieber Herr Hasse,

besten Dank für Ihre Aufklärung. Entschuldigen Sie, dass ich meinen Irrtum nicht selbst bemerkt hatte, ich interessierte mich im Augenblick nur für die Schlussweise, nicht für das Ergebnis. Ich brauche sie für meine Ausarbeitung, dafür genügt dann auch die Abkürzung, die ich angegeben habe (dass in Ihrer Arbeit schärfer bewiesen werden muss, dass $g_M\binom{\alpha_1}{\alpha_2}$ vom Typus $\Omega\big(j(k)\big)$ ist, war mir durchaus klar, deswegen schrieb ich auch: „es ist im *wesentlichen* zu zeigen ..." ; das „wesentlich" war im Unterbewusstsein für meine Anwendungen der Schlussweise gemeint).

Ihre rot unterstrichene Frage habe ich eigentlich schon mit ja beantwortet: ich habe gerade einen meiner Schüler, Herrn Hesse, an diese Aufgaben gesetzt, deswegen bin ich Ihnen auch sehr dankbar, dass Sie mir Ihre Aufzeichnungen noch einmal zuschicken, ich habe sie, wenigstens teilweise, schon einmal gehabt. Ich bin auch nur auf all dieses zurückgekommen, weil ich den Enzyklopädieartikel schreibe, auch wegen meiner Vorlesung in Nancy.

[1] Ich möchte aber noch eine zweite Frage stellen, die Ihre Arbeit „Zum Hauptidealsatz der komplexen Multiplikation" betrifft. Auf S. 316 unten

---

[1] Remark by Hasse on the margin left to this paragraph:
"*bekannt!*
(Kritik von Artin!)
S. 316 genügt Normierung

$$M \equiv \left\{ \begin{array}{cc} E & \text{mod. } 4 \\ \pm E & \text{mod. } 4 \end{array} \right\},$$

weil $\chi_3(-E) = 1$.
S. 322 Schlussbem.: jedoch
irreparabel. Siehe
dazu auch meine
Bem. im Takagi-Festheft
(Journ. Math. Soc. Japan $\underline{\mathbf{3}}$)
S. 50"

werden Repräsentanten $M_\nu = \begin{pmatrix} a_\nu & b_\nu \\ 0 & d_\nu \end{pmatrix}$ der Transformationsklassen m–ten Grades aufgestellt mit $M_\nu \equiv E$ mod. m (wegen $m \equiv 1$ mod. 12). Wie ist das möglich? Sei zunächst

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$$

ein in der üblichen Weise normierter Repräsentant, also $a'd' = m\,,\quad a' > 0\,,\quad (a',\,b',\,d') = 1\,,\quad 0 \le b' < d'$. Dann wird eine unimodulare Matrix M mit

$$\mathsf{M} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \equiv E \text{ mod. } 12$$

gesucht. Das erfordert aber

$$\mathsf{M} = \begin{pmatrix} \pm 1 & n \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

also $a = \pm a',\quad d = \pm d'$, sodass $a \equiv d \equiv 1$ mod. 12 im allgemeinen nicht erfüllt werden kann, z. B. nicht für

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 17 \end{pmatrix}$$

mit der Determinante $85 \equiv 1$ mod. 12. Wohl kann $b \equiv 0\ (12)$ erreicht werden. Die Dreiecksform der Repräsentanten ist aber auf S. 321 für die q–Entwicklungen der $\psi_{\mathsf{M}_\nu}(\omega_1,\,\omega_2)$ wesentlich und die Kongruenz $\mathsf{M}_\nu \equiv E\ (12)$ für die Transformationseigenschaften der $\psi_{\mathsf{M}_\nu}(\omega_1,\,\omega_2)$ S. 319–320.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

M. Deuring

1.64 05.06.1953, Hasse to Deuring

Professor Dr. H. Hasse
Ahrensburg i. H.
Hamburgerstr. 43

5. Juni 1953

Lieber Herr Deuring,

besten Dank für Ihren Brief. Ihre Kritik an meiner Arbeit zum Hauptidealsatz wurde bereits bald nach Erscheinen von Artin ausgesprochen. Auf S. 316 genügt natürlich die Normierung $M = E \bmod 4$, $M = \pm E \bmod 3$ weil der kubische Charakter auch für $-E$ den Wert 1 hat. Dagegen ist die Schlussfolgerung auf S. 315 Abs. 2 und auf S. 322 letzter Absatz nicht zu reparieren, siehe dazu auch meine Bemerkung im Takagi–Festheft (Journal Math. Soc. Japan Bd. 3) S. 50. Es würde mich interessieren zu erfahren, welche Ergebnisse Ihr Schüler Hesse erzielen wird.

Mit besten Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.65 17.07.1953, Hasse to Deuring

Prof. Dr. H. Hasse
Ahrensburg i. H.
Hamburgerstr. 43

17. Juli 1953

Lieber Herr Deuring,

in den letzten 14 Tagen habe ich getan, was ich schon seit 12 Jahren hätte tun sollen, nämlich einmal Ihre Arbeit aus den Hamburger Abhandlungen **14** über Multiplikatorenringe im Detail durchgelesen, während ich mich bisher nur mit der Zurkenntnisnahme der Resultate begnügt hatte. Es sind das ja ganz wunderschöne Resultate, die auch im Grunde eigentlich sehr einfach und plausibel sind. Das Verständnis Ihrer Beweise im einzelnen ist allerdings für den Leser oft recht mühsam, da Sie nun einmal eine verhältnismässig knappe Form der Darstellung haben.

Vielleicht ist es Ihnen nicht uninteressant, einige Notizen in die Hand zu bekommen, die ich mir laufend am Rande Ihrer Arbeit gemacht habe. Es handelt sich dabei vorwiegend um Druckfehler, die zum Teil recht störend für das Verständnis sind. Einige wenige Bemerkungen enthalten Sachliches. Besonders dankbar wäre ich Ihnen, wenn Sie mir eine kurze Antwort auf die mit Rotstift unterstrichenen Fragen geben könnten. Ich möchte nämlich erst diese Ihre Arbeit restlos verstanden haben, ehe ich mich mit der entsprechenden Gründlichkeit und Vollständigkeit an ein ebensolches Studium Ihrer anschliessenden Arbeiten über die algebraische Begründung der komplexen Multiplikation mache. Darf ich gleich noch eine weitere Frage anschliesen? Ist es möglich, für einen singulären elliptischen Funktionenkörper der Charakteristik 0 eine Erzeugung anzugeben, die folgenden Bedingungen genügt:

1. Sie verläuft über den Körper von j und der Differentialkoeffizienten,

2. Sie gestattet für alle Primdivisoren dieses Körpers (auch die von 2 und 3) den Übergang zu den Restklassen derart, dass der entstehende Körper wieder elliptisch ist und den richtigen Konstanten–Körper hat.

Eine solche Erzeugung wäre natürlich sehr erwünscht, aber ich glaube fast, dass ich zuviel verlange, weil ja die von Ihnen angegebene Normal-formen immer noch akzessorische Irrationalitäten (λ bzw. α) enthalten (s. insbes. auch meine Frage zu S. 225 Mitte).

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.66 23.07.1953, Deuring to Hasse

Göttingen, 23. 7. 1953
Reinhäuser Landstr. 70

Lieber Herr Hasse,

besten Dank für Ihren Brief mir den Bemerkungen über meine Arbeit aus den Hamb. Abh. 14. Die grosse Zahl der Inkorrektheiten hat mich erschreckt, vielleicht habe ich die Arbeit damals in zu grosser Hast geschrieben.

Zuerst will ich Ihre Frage nach einer überall reduzierbaren Erzeugung eines singulären Körpers der Charakteristik 0 mit Koeffizienten aus $\Sigma(j)$ (Σ der Körper der Differentialkoeffizienten) beantworten — oder vielmehr nicht beantworten. Diese Frage habe ich mir oft vorgelegt, aber nicht beantworten können. Im Februar fragte mich A. Weil auch danach, er hat sich auch vergebens bemüht und ist, wie ich auch, der Ansicht, dass es eine Erzeugung mit den gewünschten Eigenschaften nicht gibt — jedenfalls keine mit nur zwei Elementen. Mit mehreren Elementen mag es solche Erzeugungen geben, für sie wäre dann aber die Reduktionstheorie neu zu entwickeln.

Im Zusammenhang damit: die Normalform $y^2 - y + \alpha xy = x^3$ gilt für $p = 3$ und $j = 0$ nicht! Ich habe noch nicht einmal eine zweigliedrige Erzeugung in einer passenden Erweiterung von $\Sigma(j)$ finden können, die überall reduzierbar wäre!

Zu § 9: Ich glaube nicht, dass sich der Hilfssatz wesentlich einfacher beweisen lässt. Vermutlich gefällt Ihnen nicht, dass Ringe auftauchen, die nicht ganz abgeschlossen sind. Das liegt aber, glaube ich, in der Natur der Sache. Eine Aufklärung wird wohl die von Kähler angestrebte Theorie der algebraischen Körper liefern.

Zu (49): Die Rollen von $\Phi_{p^{f-1}}$ und Φ_μ müssen vertauscht werden:

$$\Phi_{p^f}(t, j) = \prod_{h=1}^{\mu(p^{f-1})} \frac{\Phi_p(t, j_h)}{t-j}, \quad \Phi_{p^{f-1}}(t, j) = \prod_{\nu=1}^{\mu(p^{f-1})} (t - j_h).$$

Zu S. 248, Zeile 6: Es ist statt (53) zu lesen: (49) und (53). Man muss ja mit (53) die Nullstellen j_h, die in den beiden vorletzten *Formel*zeilen von S. 247 vorkommen, mittels (53) entwickeln und dann (49) benutzen ((49) ist ja für $f = 2$ richtig). Allerdings hätte „mit Hilfe von (49)"schon hinter Z. 3 von S. 248 stehen sollen.

Auf Ihre obigen Bemerkungen will ich später eingehen. Ich darf kurz noch auf einige Fehler aufmerksam machen:

S. 247, Z. 12. v. o.: $d = \underline{3^4} \cdot 5^3 \cdot 4027$. Danach ist auch (57) zu korrigieren.

S. 258 Tabelle: Für $p = 97$ ist

$$P_p(j) = j^8 + 60j^7 + 10j^6 + 96j^5 + 2j^4 + \underline{72j^3} + 3j^2 + \underline{28j} + \underline{19}$$

Die Wurzeln von $P_{97}(j)$ stimmen dagegen!

S. 269, Schluss von § 10:

$$t_p = t_{p^3} = \cdots = 2t - h$$

Zu S. 255: $s_p(\lambda)$ ist mod. p das Legendre'sche Polynom vom Grade $\frac{\psi-1}{2}$. Die Doppelwurzelfreiheit von $s_p(\lambda)$ lässt sich damit wie in der Theorie der Legendre'schen Polynome üblich beweisen. Vgl. die Bemerkungen auf S. 266 hinten (66)

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

M. Deuring

1.67 04.08.1953, Deuring to Hasse

GÖTTINGEN, 4. 8. 1953
REINHÄUSER LANDSTR. 70

LIEBER HERR HASSE,

heute schrieb mir Herr Köthe, dass der Titel Ihres Vortrages auf der D. M. V. –Tagung „Zetafunktionen arithmetischer Funktionenkörper" lautet. unglücklicherweise hatte ich am Sonnabend mit Herrn Köthe einen Vortrag „Zetafunktionen algebraischer Funktionenkörper" verabredet. Ich fürchte, dass das auf das gleiche hinausläuft! Meine Absicht war, über die Arbeit von André Weil ($ax^n + by^m + c = 0$), meinen Beweis der Darstellbarkeit der Zetafunktion eines elliptischen Funktionenkörpers mit komplexer Multiplikation durch Heckesche L–Reihen und die Formel $\zeta(s)\zeta(s-1) = \zeta(s)^2 \prod_{n=1}^{\infty} \zeta_n^*(s)$ für die Zetafunktion $\zeta(s)\zeta(s-1)$ des Geschlechtes 0 zu berichten ($\zeta_n^*(s)$ ist die Zetafunktion des Körpers der n–ten Einheitswurzeln, ohne die von den Primfaktoren von n herrührenden Bestandteile der Produktdarstellung); ferner über die Verallgemeinerung der eben genannten Formel auf das Geschlecht 1.

Ich könnte aber genau so gut über neue kurze Methoden in der klassischen Theorie der komplexen Multiplikation sprechen.

Mit den besten Grüssen

Ihr

MAX DEURING

1.68 22.01.1954, Hasse to Deuring

22. Januar 1954

Lieber Herr Deuring,

vielleicht interessiert es Sie zu wissen, dass mein Schüler Paul Wolf im Februar (wahrscheinlich zweite Hälfte) zur Ablegung seiner Doktorprüfung in Philosophie bei Prof. König nach Göttingen kommen wird. Er hat in den Mathematischen Nachrichten eine Reihe von Arbeiten über invariante Kennzeichnung galoisscher Körper mit vorgegebener Galoisgruppe und über das Erweiterungsproblem bei galoisschen Algebren geschrieben. Wenn Sie dort Interesse dafür haben, würde er gern bei Ihnen vortragen. Seine Adresse lautet: 24a Hoisbüttel über Ahrensburg.

Mit freundlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.69 21.06.1955, Hasse to Deuring

21. Juni 1955

Lieber Herr Deuring,

beiliegend Abschriften des Ihnen bereits angekündigten Schriftwechsels über die Einladungen zum Internationalen Mathematischen Colloquium in Japan. Es ist nicht leicht, sich daraus eine klare Vorstellung zu machen, was wirklich vorgegangen ist. Mein Eindruck ist jedenfalls der: Von irgendeiner Person oder Personengruppe, sei es im Organisationsausschuss, sei es im Exekutivausschuss, sei es unter den ins Auge gefassen Teilnehmern, sind Einwände erhoben worden, die sich zunächst auf die gesamte, von mir gemachte Vorschlagsliste oder zum mindesten auf Sie, Witt und mich bezogen. Trotz des auf meinen Schritt hin von Hopf geäusserten Wunsches, "etwaige Uneinigkeit beim Colloquium durch Takt der Gäste und Diplomatie des Wirtes zu beseitigen", hat Iyanaga nicht den Mut gehabt, Witt und mich einzuladen, sondern sich auf die nachträgliche Einbeziehung Ihrer Person unter die Teilnehmer beschränkt.

Witt wird Ihnen in dieser Sache seine Gedanken schreiben, die etwas über die meinen hinausgehen. Von mir aus möchte ich nur sagen, dass ich es verstehen würde, wenn Sie die Einladung trotz allem annähmen, und Sie in diesem Falle bitten, wo immer es möglich ist, durch Ihr persönliches Eintreten darauf hinzuwirken, dass eine derartige wissenschaftlich ungerechtfertigte Zurücksetzung nicht wieder stattfindet.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.70 02.07.1955, Deuring to Hasse

Göttingen, 2. 7. 1955
Reinhäuser Landstr. 70

Lieber Herr Hasse,

besten Dank für die Zusendung der Briefabschriften, die mich, wie Sie sich denken können, bestürzt haben. Ich hatte von dem geplanten Symposium in Tokio vor längerer Zeit flüchtig gehört, die Angelegenheit war mir aber ganz aus dem Kopf gekommen, so dass ich sehr überrascht war, als ich Ende Mai die Einladung erhielt. Damals habe ich gleich positiv geantwortet und sofort auch über die Göttinger Akademie einen Antrag beim Auswärtigen Amt um das Reisegeld gestellt.

Ich bin sehr froh darüber, dass Sie selbst nicht unbedingt der Meinung sind, ich sollte die Einladung noch ablehnen. Ich halte es für falsch, in einer solch grundsätzlichen Weise zu reagieren, weil ich glaube, dass dadurch bei manchen Leuten die unversöhnliche Haltung nur bestärkt würde. (Mir ist übrigens durchaus unklar, wer diese Unnachgiebigkeit gezeigt hat, ich denke aber, dass ich es erfahren werde.) Mir scheint es auch darum falsch, weil ja offenbar auch gegen mich eine Voreingenommenheit vorhanden ist — würde ich ablehnen, so würde ich nur Wasser auf die Mühlen der Unversöhnlichen giessen.

Auf jeden Fall ist mir, das können Sie sich denken, der Spass an der Sache verdorben und ich mache mich auf einige unerfreuliche Unterhaltungen gefasst. Vielleicht ergibt sich aber auch eine Besänftigung der Gemüter.

Bitte nehmen Sie auch Herrn Iyanaga sein Verhalten nicht zu übel. Schliesslich sind ihm die Hände gebunden, weil er als ausführendes Organ des Organisationskomitees nicht einfach als Vertreter der japanischen Mathematiker handeln konnte. Seine Absicht, Sie später einzuladen, halte ich nicht einfach für ein Ausweichmanöver, vielmehr glaube ich, dass ihm wirklich daran liegt, Sie nach Japan zu bekommen und dass er natürlich, wenn es ohne Rücksicht auf internationale [...] handeln kann, leicht erreicht, was er will — von den technischen Schwierigkeiten abgesehen.

Eigentlich wartete ich noch auf Herrn Witt's Meinung, ich habe aber nichts von ihm gehört.

Darf ich Ihnen noch kurz in Sachen Enzyklopädie etwas schreiben ? Herr

Heisig hat Ihnen vor einiger Zeit eine neue Fassung des von ihm geplanten Schreibens an die Autoren geschickt. Auf meinen Wunsch hat er sich auf rein sachliche Dinge beschränkt, so dass Sie, glaube ich, diesem Verfahren zustimmen können. Seine Absicht ist in der Hauptsache, die Autoren, die vielleicht zum Teil ihre Verpflichtung halb vergessen haben, zu erinnern. Darf ich Sie bitten, auch Herrn Sperner von dieser meiner Stellungnahme zu unterrichten ?

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

M. Deuring

1.71 08.07.1955, Hasse to Deuring

8. Juli 1955

Lieber Herr Deuring,

ich danke Ihnen sehr für Ihren freundlichen Brief und für Ihre Anteilnahme an der Demütigung, die mir anlässlich des Kolloquiums Tokio zugefügt wurde. Ich möchte nicht glauben, dass auch gegen Sie eine persönliche Voreingenommenheit vorhanden ist. Es scheint mir vielmehr, dass Iyanaga, weil er glaubte, mich nicht einladen zu können, zunächst überhaupt keinen deutschen Mathematiker einladen wollte und dann auf die Vorstellungen von Kamke und Hopf hin aus der auf mich zurückgehenden, durch Kamke eingereichten Vorschlagsliste — Deuring, Hasse, Witt, Leopoldt, Jehne — wenigstens Sie als Zeichen des guten Willens gewählt hat.

Ich möchte den beiliegenden Durchschlag eines Briefes an Iyanaga zu Ihrer Kenntnis bringen. Ich bin gespannt, ob er daraufhin mir die Wahrheit sagt. Auf jeden Fall wäre ich Ihnen sehr dankbar, wenn Sie sich bemühen würden, diese Wahrheit in Tokio in Erfahrung zu bringen, denn Sie können sich denken, dass ich die gegenwärtige Situation als sehr quälend, ja geradezu unerträglich empfinde.

Im übrigen lassen Sie sich bitte durch diese Geschichte Ihre Freude an der weiten Reise in ein sicher schönes Land nicht verderben.

Was die Enzyklopädie betrifft, so tragen Sperner und ich uns sehr ernsthaft mit dem Gedanken, unsere Arbeit daran niederzulegen. Der Rechtsberater der Deutschen Forschungsgemeinschaft hat uns angedeutet, dass in seinen Augen die Rechtslage doch recht verwickelt ist und möglicherweise ein bei ostdeutschen Gerichten gegen uns ergangenes Urteil auch von westdeutschen Gerichten anerkannt werden müsste. Wir lassen im Augenblick diesen Punkt durch den Rechtsberater der Deutschen Forschungsgemeinschaft unter Vorlage des gesamten Materials noch ganz genau prüfen. Herrn Heisig werden wir jedenfalls erst einmal eine vorläufige knappe Antwort auf seine Anfrage geben. Er verlangt ja eigentlich nur, dass wir unsere Bereitschaft erklären, mit den Autoren wieder in Beziehung zu treten.

Mit besten Grüssen auch von Sperner

Ihr

H. Hasse

1.72 29.07.1955, Hasse to Deuring

29. Juli 1955

Lieber Herr Deuring,

Ich möchte Sie durch Übersendung beiliegender Abschriften über die japanische Angelegenheit auf dem Laufenden halten. Mein Eindruck — und übrigens auch der von Sperner — ist, dass der auf Iyanaga ausgeübte offenbar sehr starke Druck von Chevalley ausgeht, der wohl seinerseits durch die vor Jahren von Siegel drüben über mich verbreiteten, sachlich völlig unzutreffenden Verleumdungen verhetzt ist. Während Artin mir vor 2 Jahren einen sehr freundlichen Brief schrieb, während R. Brauer wohl Zurückhaltung gewahrt hat, aber nach Rohrbachs Aussagen sicher nicht so weit gehen würde, dass er ein Zusammentreffen mit mir vermeiden oder gar meine Nichtanwesenheit verlangen würde, während Mac Lane mir bereits 1946 in Göttingen einen Besuch machte und A. Weil unserer Einladung nach Hamburg folgte, ist ja auch Ihnen von der Enzyklopädie her bekannt, dass Chevalley mir auf meine wiederholten Anfragen überhaupt nicht mehr geantwortet hat, nachdem er 1950 meinen sehr freundschaftlich gehaltenen Brief kühl, sachlich und mit der Grussformel beantwortet hatte: "Mit der Hochachtung, die ich Ihren mathematischen Leistungen entgegenbringe, bin ich ...".

Ich möchte annehmen, dass Sie schon wegen der Enzyklopädie mit Chevalley ins Gespräch kommen werden, und wäre Ihnen dankbar, wenn Sie nicht nur herausbekommen könnten, was er gegen mich hat, sondern gegebenenfalls auch überzeugend für mich eintreten würden.

Nochmals meine besten Wünsche für Ihre Reise.

Mit freundlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.73 16.09.1955, Deuring to Hasse

Tokyo,
16. September 1955

Lieber Herr Hasse,

nach dem Schluss des Symposiums darf ich Ihnen zusammen mit Herrn Suetuna die herzlichsten Grüsse senden. Es ist sehr schade, dass Sie und ihre Schüler nicht hier sein konnten, denn es gab höchst interessante neue Dinge zu hören, insbesondere über komplexe Multiplikation der Abelschen Funktionen, über die — ausser Weil — zwei junge japanische Mathematiker, Shimura und Taniyama, mit grossen Erfolg gearbeitet haben.

Herzliche Grüsse

Ihr

Max Deuring

Von Herrn Deuring habe ich erfahren, dass Sie nun krank zu Bett liegen. Vom ganzen Herzen hoffe ich, dass Sie bald wieder gesund sein werden. Heute Abend bin ich mit Herrn Deuring zusammen. Wir essen japanische Speisen und sprechen über Deutschland und denken an Sie.

Mit vielen herzlichen Grüssen von

Ihrem

Z. Suetuna

1.74 30.10.1956, Hasse to Deuring

30. Oktober 1956

Lieber Herr Deuring,

im Jahre 1953 schickte ich Ihnen auf Ihren Wunsch 4 handgeschriebene Manuskripte von mir aus den Jahren 1925–28 über komplexe Multiplikation. Da ich neulich bereits Korrekturbogen zu Ihrem Enzyklopädie–Artikel vor Augen hatte, darf ich wohl annehmen, dass Sie dieses Material nun nicht mehr brauchen. Ich wäre Ihnen sehr dankbar, wenn Sie mir diese Manuskripte möglichst bald zurücksenden könnten. Es gibt hier einen jungen Mathematiker, dem ich eine Aufgabe über elliptische Funktionen gestellt habe, bei der er wohl mit Vorteil von den darin befindlichen früher von mir angestellten Rechnungen Gebrauch machen kann.

Mit besten Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.75 07.11.1956, Deuring to Hasse

GÖTTINGEN, 7. 11. 1956
MERKELSTRASSE 45

LIEBER HERR HASSE,

anbei die Aufzeichnungen zurück, die Sie mir freundlicherweise überlassen hatten. Besten Dank, ich hoffe, dass nichts fehlt.

Vor kurzem bekam ich Ihre Arbeit aus der Berliner Akademie über die Zetafunktionen von Funktionenkörpern vom Fermatschen Typus in die Hand. Sie werden bemerkt haben, dass in meinen beiden Arbeiten zur Zetafunktion einer algebraischen Kurve vom Geschlechte 1 (2 und 3. Mitteilung) die Antwort auf die Frage der birationalen Invarianz der Zetafunktion, die Sie auf S. 13–16 Ihrer Arbeit stellen, für die singulären Körper vom Geschlechte 1 gelöst ist, fast in dem Sinne, wie Sie es vermuten: „Fast", weil man nicht mit einer Transzendenten auskommt, sondern sie jeweils dem fortzusetzenden Primdivisor der Zahlkörper anpassen muss.

Übrigens hatte ich anfangs den Titel „Zetafunktion einer *Kurve* gewählt, weil ich mir über die birationale Invarianz nicht klar war!

Erlauben Sie mir noch eine Bemerkung zu der Einleitung Ihrer Arbeit. Sie erwähnen dort die Normierungsformeln aus Ihrer Arbeit „Beweis des Analogons der Riemannschen Vermutung" usw., S. 261 unten. Mir scheint, dass diese Formeln sich mit der allgemeinen Kongruenz $\Pi \equiv 1$ mod. m aus meiner Arbeit „Die Struktur der elliptischen Funktionenkörper" usw. durchaus nicht decken. Einerseits kommen in Ihren Formeln ja nur ganz spezielle Kongruenzmoduln vor und man kann ihnen eine Verallgemeinerung auf beliebige Moduln nicht ansehen. Andererseits gilt die von mir bewiesene Kongruenz nur unter der Voraussetzung, dass der m–Teilungskörper im Konstantenkörper enthalten ist. Infolgedessen sind Ihre Formeln nicht sämtlich Spezialfälle von meinen, sondern lediglich die erste,

$$\omega \equiv 1 \text{ mod. } 4\,, \quad \text{falls } \left(\frac{D}{2}\right) = 1\,.$$

Die anderen Kongruenzen lassen sich von meiner Theorie her nicht ohne weiteres verstehen.

Für die Zetafunktionen sind natürlich die von mir aufgestellten Kongruenzen für einen *beliebigen* Modul wesentlich.

Mit den besten Grüssen

Ihr

M. Deuring

1.76 13.11.1956, Hasse to Deuring

13. November 1956

Lieber Herr Deuring,

vielen Dank für die Rücksendung meiner Aufzeichnungen, die ich nun in die Hände eines meiner Schüler gelegt habe, der weiter über derartige Fragen arbeiten möchte.

Ihre 2. und 3. Mitteilung habe ich inzwischen gelesen. Die Resultate sind ja wirklich wunderschön. Ich hatte von ihnen schon durch Lamprecht gehört. Was meine Bemerkung über Ihre Mitteilung betrifft, so haben Sie natürlich recht. Die Bemerkung entsprang aus dem, was Sie mir einmal bei einem Kurzbesuch in Göttingen mündlich sagten, wonach die *Methode* der Normierung der Nullstellen der Kongruenz–Zetafunktion, die zur Grössencharaktereigenschaft nötig ist, *grundsätzlich* dieselbe ist, wie ich sie in einem Spezialfall in meiner Note aus den Göttinger Nachrichten angewandt habe, nur dass mir die analytische Theorie zugrundelag, während bei Ihnen die Strahlklassenkörper abstrakt definiert sind, und alles in voller Allgemeinheit gemacht wird.

Mit besten Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.77 17.04.1957, Deuring to Hasse

Göttingen, 17. 4. 1957
Merkelstrasse 45

Lieber Herr Hasse,

darf ich — als Enzyklopädie–Herausgeber — anfragen, wie es mit dem von Ihnen übernommenen Artikel über die Arithmetik der hyperkomplexen Systeme steht? Es wäre und sehr erwünscht, wenn Sie einen Termin nennen könnten, bis zu dem das Manuskript fertiggestellt sein kann. Ich habe im Zusammenhang mit der Enzyklopädie noch eine weitere Frage: Befindet sich ein von A. Scholz hinterlassenes Manuskript über spezielle Zahlkörper in Ihrem Besitz? Wir möchten es gerne als Grundlage für eine neue Bearbeitung dieses Gegenstandes nehmen.

Es wird Sie gewiss interessieren, dass ich einen weiteren Fall der "Hasseschen Vermutung" behandelt habe: Die Zetafunktion eines elliptischen Körpers K über einem Zahlkörper k, wenn die Invariante j singulär ist, aber k den zugehörigen imaginären quadratischen Zahlkörper Σ *nicht* enthält. Gehört zu dem mit Σ erweiterten Körper $K\Sigma$ der Heckesche Charakter χ (von $k\Sigma$), so dass $(L(s-\frac{1}{2}, \chi)L(s-\frac{1}{2}, \overline{\chi}))^{-1}$ der L–Faktor der Zetafunktion von $K\Sigma$ ist, so ist $L(s-\frac{1}{2}, \chi)^{-1}$ der L–Faktor der Zetafunktion von K (es ist in diesem Falle $L(s, \overline{\chi}) = L(s, \chi)$).

Mit den besten Grüssen

Ihr

M. Deuring

1.78 08.05.1957, Hasse to Deuring

8. Mai 1957

Lieber Herr Deuring,

auf Ihre Anfrage nach dem von mir übernommenen Enzyklopädie–Artikel kann ich nur dieselbe Antwort geben, die ich Teubner schon oft gegeben habe, dass ich nämlich diesen Artikel erst dann zu planen und zu schreiben beginnen kann, wenn der Artikel über die Algebra der hyperkomplexen Systeme mir zum mindesten im endgültigen Ms vorliegt. Es würde dann schätzungsweise 1 Jahr dauern, bis die Arbeit an meinem Artikel abgeschlossen ist. Was an Material von A. Scholz hinterlassen ist, lasse ich Ihnen gleichzeitig als eingeschriebene Sendung zugehen.

Vielen Dank für die Mitteilung Ihres eigenen interessanten Resultats über die Zetafunktionen elliptischer Körper. Das klingt ja sehr vernünftig und befriedigend.

Mit freundlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.79 14.06.1957, Hasse to Deuring

14. Juni 1957

Lieber Herr Deuring,

da ich nicht weiss, ob Alexandroff auch nach Göttingen geschrieben hat, möchte ich Ihnen Abschrift seines Briefes und meiner heutigen Antwort beiliegend zur Kenntnis bringen.

Mit freundlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.80 10.07.1959, Hasse to Deuring

10. Juli 1959

Lieber Herr Deuring,

haben Sie recht herzlichen Dank für die Zusendung Ihres Enzyklopädie–Artikels über komplexe Multiplikation, zu dessen Fertigstellung ich Ihnen gratulieren möchte. Ihre Darstellung gefällt mir sehr, und ich bin froh, dass sich nun etwaige Interessenten unter meinen Schülern darauf stützen können. Ein solcher Interessent Herr Klaus Alber reicht gerade eine Dissertation aus diesem Gebiet bei der Fakultät ein. Er beweist darin den Anordnungssatz der Klassenkörpertheorie, den ich in den Monatsheften für die Ringklassenkörper behandelt hatte, auch für die Strahlklassenkörper untereinander sowie auch für einen Ring– und einen Strahlklassenkörper. Ausserdem beweist er ein ganz allgemeines bemerkenswertes Theorem über die Hauptdivisordarstellung eines Quotienten aus zwei Deltawerten mit beliebigen Ringidealbasen und kann damit die Einschränkung [...] in meinem Zerlegungsgesetz für Strahlklassenkörper auf [...] reduzieren.

Mit nochmaligem Dank und besten Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.81 16.05.1960, Hasse to Deuring

16. 5. 1960

Lieber Herr Deuring,

Ich wäre Ihnen sehr dankbar, wenn Sie mir sagen könnten, ob Sie *Curt Meyer* nach den vorliegenden wissenschaftlichen Arbeiten (siehe Beilage) für geeignet halten, zum a. o. Prof. ernannt zu werden. Wir brauchen ja dafür, wie Sie sich noch erinnern werden, einige *auswärtige* Gutachten.

Mit freundlichen Grüßen

Ihr

H. Hasse

1.82 11.06.1960, Deuring to Hasse

Göttingen,
den 11. Juni 1960
Bunsenstrasse 3/5
Telefon 59364

Herrn
Professor Dr. H. Hasse
Mathematisches Institut der Universität

H a m b u r g 13
===========
Rothenbaumchaussee 67/69

Lieber Herr Hasse,

Bitte entschuldigen Sie, dass ich erst jetzt das gewünschte Gutachten über Herrn Meyer schicke. Ich hatte noch etwas auf die Korrekturen von Meyers letzter Abhandlung gewartet, die Sie in Ihrem Brief erwähnten. Da Sie aber gewiss den Antrag noch in diesem Semester einbringen wollen, so will ich nicht länger zögern und glaube damit in Ihrem Sinne zu handeln.

Darf ich bei dieser Gelegenheit gleich um ein Gutachten über Herrn Richert bitten für den gleichen Zweck, die Ernennung zum ausserplanmässigen Professor. Ein Schriftenverzeichnis von Herrn Richert füge ich bei.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

M. Deuring

1.83 28.06.1960, Hasse to Deuring

28. Juni 1960

Lieber Herr Deuring,

Der Verlag de Gruyter hat es leider versäumt, meine Bitte zu erfüllen, Ihnen und Eichler, die Fahnen der letzten Arbeit von C. Meyer zuzusenden. Besten Dank, dass Sie auch ohne dies Ihr Gutachten abgegeben haben. Ich freue mich, dass es so positiv ausgefallen ist.

Beiliegend das erbetene Gutachten über Richert.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.84 07.03.1961, Deuring to Hasse

Göttingen,
den 7. März 1961
Bunsenstrasse 3/5
Telefon 59364

Herrn
Professor Dr. Hasse
Mathematisches Institut der Universität

H a m b u r g 13
===========
Rothenbaumchaussee 67/69

Lieber Herr Hasse,

im Auftrage unserer Fakultät und meiner mathematischen Fachkollegen bitte ich Sie, uns bei der Neubesetzung des Ordinariates für Mathematik zu beraten, das im kommenden Jahre durch die Emeritierung von Professor Reidemeister frei werden wird.

Wir wären Ihnen sehr zu Dank verpflichtet, wenn Sie uns die Namen von Mathematikern nennen, die Sie dafür für geeignet halten. Uns liegt daran, dass nach Möglichkeit Topologie und Geometrie wieder vertreten sein werden, oder dass Sie in Ihren Vorschlägen Mathematiker berücksichtigen, die in der reellen Analysis (insbesondere partielle Differentialgleichungen) gearbeitet haben, jedoch möchten wir vor allem die Qualität der zu nennenden Mathematiker berücksichtigt wissen.

Mit den besten Grüssen

Ihr

M. Deuring

1.85 15.03.1961, Hasse to Deuring

15. März 1961

Lieber Herr Deuring,

zu der im Auftrage Ihrer Fakultät gestellten Frage, betreffend Neubesetzung des demnächst freiwerdenden Ordinariats für Mathematik, habe ich mich gestern mit Artin unterhalten und dabei erfahren, dass er Ihnen M. Köcher (Münster) vorschlagen wird. Diesem Vorschlag möchte ich voll und ganz beitreten. Ich halte Köcher für einen ungewöhnlich ideenreichen Mathematiker, der durch seine Arbeiten die Theorie der automorphen Funktionen mehrerer Veränderlicher entscheidend gefördert hat.

Leider haben wir von Ihnen bisher keine Zusage zu der für die Woche nach Pfingsten in Oberwolfach geplanten Zahlentheorie–Tagung bekommen. Ich würde es sehr begrüssen, wenn Sie es möglich machen könnten, an dieser Tagung teilzunehmen.

Mit besten Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.86 11.01.1972, Deuring to Hasse

34 Göttingen,
11. 1. 1972
Bunsenstrasse 3–5
Telefon 59364, 55102

Herrn Professor Dr. H. Hasse
207 Ahrensburg
Hagener Allee 35

Lieber Herr Hasse,

ich wende mich heute mit der Bitte an Sie, ein Gutachten über Herrn Maus abzugeben. Er hat sich um eine Stelle als wissenschaftlicher Rat und Professor beworben, die Institutsdirektion hat ihn in die engere Wahl gezogen und braucht nun zur Vorlage beim Ministerium ein Gutachten über Maus' wissenschaftliche Qualifikation. Sie kennen ihn gewiß noch gut genug.

Mit herzlichen Grüssen [1]

Ihr

M. Deuring

[1] Hand–written remark by Hasse: "Dank für Gruß aus Köln"

1.87 13.01.1972, Hasse to Deuring

13. 1. 72

LIEBER HERR DEURING,

Zu Ihrem Brief wegen Maus möchte ich bemerken, daß ich durch die räumliche Trennung die Übersicht über sein wissenschaftlichen Arbeiten weitgehend verloren habe. Ich wäre Ihnen daher sehr dankbar, wenn Sie mir durch einen der dortigen Assistenten ein Verzeichnis von Maus' Schriften aufstellen lassen könnten. Eine weitere Hilfe könnten Sie mir dadurch leisten, daß Sie Band und Seitenzahl des betr. Zbl.–Referats zusetzen ließen. Ich habe ja hier niemanden, dem ich solche Aufgaben detachieren kann, sitze aber andrerseits sehr im Druck, nicht nur durch Crelle (6 Bände mit mehr als 150 Arbeiten im Jahr), sondern auch durch eine nahe bevorstehende USA–Vortragsreise, die an 13 verschiedene Universitäten führt und höchst kompliziert zu organisieren ist. Bitte zögern Sie daher die Erfüllung meiner obigen Bitten nicht zu lange hinaus, damit ich nicht schon fort bin oder in den letzten Tagen hier nicht mehr Zeit habe, das erbetene Maus–Gutachten zu schreiben.

Für Ihren Kartengruß aus Köln herzlichen Dank. Mit besten Grüßen

Ihr

H. HASSE

1.88 18.01.1972, Deuring to Hasse

34 Göttingen,
18. 1. 72
Bunsenstrasse 3–5
Telefon 59364, 55102

Herrn Professor Dr. H. Hasse
207 Ahrensburg
Hagener Allee 35

Lieber Herr Hasse!

Anbei die gewünschten Zitate:

Arithmetisch disjunkte Körper, Crelle **226**, S. 184	Zbl. **149**. S. 294; M. R. **35**, S. 534
Die gruppentheoretische Struktur der Verzweigungsgruppenreihen, Crelle **230**, S. 1	Zbl. **165**, S. 357; M. R. **37**, S. 254

Mehr sind es nicht; natürlich hat Herr Maus möglicherweise irgendwo eine Arbeit eingereicht, vielleicht bei Ihnen für Crelle? Wir können das in der Eile nicht feststellen, da Herr Maus z. Zt. in Vancouver ist.

Mit herzlichen Grüßen

Ihr

M. Deuring

1.89 22.01.1972, Hasse to Deuring

22. 1. 1972

Lieber Herr Deuring,

Anbei das erbetene Gutachten. An die beiden weiteren Artikel von Maus kann ich im Augenblick nicht herankommen, da sie bei der Druckerei von W. de Gruyter im Satz befindlich sind. Es genügt aber doch wohl, was ich geschrieben habe.

Mit herzlichem Gruß

Ihr

H. Hasse

Kapitel 2

Miscellaneous

2.1 13.10.1959, Klaus Alber to Deuring

Hamburg 39,
den 13. 10. 1959
Baumkamp 24

Sehr geehrter Herr Professor Deuring!

Herr Professor Hasse bat mich, Ihnen kurz die Ergebnisse meiner Dissertation mitzuteilen.

Zunächst zu der von Herrn Professor Hasse erwähnten Hauptidealdarstellung von Deltaquotienten. Dieses Ergebnis ist weiter nichts als eine vollständige Ausschöpfung der Beweise der Hasseschen Arbeit in den Monatsheften für Math. 38(1931) S. 331–344. Im wesentlichen das gleiche Ergebnis fand ich dann auch in den Abschnitten 13 und 22 Ihres, von mir leider erst nach Fertigstellung meiner Arbeit im Juli entdeckten, Enzyklopädieartikels wieder. Es lautet:

Seien $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}'$ zwei beliebige (nicht ausgeartete) Gitter aus einem imaginär–quadratischen Zahlkörper mit den Divisorteilern $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ und den Indizes $\mathfrak{k} = \prod_p p^{r_p}$, $\mathfrak{k}' = \prod_p^{r'_p}$. Dann gilt

$$\frac{\Delta(\mathfrak{w}')}{\Delta(\mathfrak{w})} \cong \left(\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{k}}{\mathfrak{a}'\mathfrak{k}'}\right)^{12} \cdot \prod_{\substack{p \\ (\mathfrak{h}|p)}} \mathfrak{h}^{12(E(p,r'_p)-E(p,r_p))}$$

mit

$$E(p,\,r) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } p \text{ zerlegt,} \\ \frac{p^r-1}{p^r(p-1)} & \text{, falls } p \text{ verzweigt,} \\ \frac{p^r-1}{p^{r-1}(p^2-1)} & \text{, falls } p \text{ träge.} \end{cases}$$

Insbesondere gilt also für zwei Gitter $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}'$ mit gleichem Index

$$\frac{\Delta(\mathfrak{w}')}{\Delta(\mathfrak{w})} \cong \left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}'}\right)^{12}.$$

Aber, wie gesagt, der Beweis ist zum größten Teil aus der genannten Arbeit von Herrn Professor Hasse abgeschrieben, und das Ergebnis läßt sich unmittelbar auch aus demjenigen in Ihrem Enzyklopädieartikel zusammensetzen. Überhaupt nicht untersucht habe ich dabei bisher die Frage, welchen Körpern diese Deltaquotienen denn nun eigentlich angehören. Die eigentlichen Resultate meiner Arbeit sind die folgenden beiden:

1. Der Anordnungssatz für die Ring– und Strahlklassenkörper:

Ist eine Ring– oder Strahlklasseneinteilung eines imaginär–quadratischen Zahlkörpers eine Verfeinerung einer zweiten, so ist der zur ersten gehörige Klassenkörper ein Erweiterungskörper des zur zweiten gehörigen. Dabei gelten für die Automorphismen der beiden Körper die entsprechenden Aussagen wie in dem in Abschnitt 19 Ihres Enzyklopädieartikels bewiesenen Anordnungssatz für Ringklassenkörper.

Für zwei Ringklassenkörper stammt dieser Satz ja von Herrn Prof. Hasse (Abschnitt 19 Ihres Enzyklopädieartikels), für zwei Strahlklassenkörper läßt er sich sehr leicht aus dem "verallgemeinerten Prinzip der komplexen Multiplikation" (Hasse, Crelle 168 (1931) 64–88, Satz 15) herleiten. Die Einbettung eines Ringklassenkörpers in einen Strahlklassenkörper schließlich habe ich mit folgender Idee bewiesen:

Die $\psi(m)$ verschiedenen primitiven Verfeinerungsgitter m–ten Grades eines Gitters $\mathfrak{w}$ (die ich mit $\frac{1}{m}\mathfrak{M}\mathfrak{w}$ bezeichne) lassen sich durch die Beziehung

$$\omega \equiv 0 \text{ mod. } \frac{1}{m}\mathfrak{M}\mathfrak{w}$$

umkehrbar eindeutig den $\psi(m)$ "Reihen" primitiver m–Teilungspunkte ω zu $\mathfrak{w}$ zuordnen. Ist dann, für singuläres $\mathfrak{w}$,

$$j(\frac{1}{m}\mathfrak{M}\mathfrak{w}) = j(\mathfrak{k}_m) \qquad \text{und} \qquad \tau(\omega|\mathfrak{w}) = \tau(\mathfrak{k}_m^*),$$

so kann man zeigen, daß die genannte Zuordnung zwischen den Verfeinerungsgittern und den Teilpunktreihen zu $\mathfrak{w}$ gerade die Relation

$$\mathfrak{k}_m^* \subseteq \mathfrak{k}_m^{-1}$$

zwischen den Ring– und Strahlklassen liefert. Drückt man also mit Hilfe eines geeigneten Interpolationspolynoms die Funktionswerte $j(\frac{1}{m}\mathfrak{M}\mathfrak{w})$ rational durch die "zugeordneten" Funktionswerte $\tau(\omega|\mathfrak{w})$ aus, so ist damit der Satz bewiesen.

2. Den Beweis der Frobeniuskongruenz für singuläre τ–Werte (Formel 51) in Ihrem Enzyklopädieartikel) habe ich derart verschärft, daß er nur noch mit der natürlichen Einschränkung $\mathfrak{h} \nmid \mathfrak{m}$ anstatt $\mathfrak{h} \nmid \mathsf{N}\mathfrak{m}$ gilt.

Zu diesem Zwecke benutze ich statt der Funktion

$$\delta_{\mathfrak{P}}(\omega|\mathfrak{w}) \;=\; \tau(\omega|\mathfrak{w})^p - \tau(\omega|\frac{1}{p}\mathfrak{P}\mathfrak{w})$$

die Funktionen

$$\tilde{\delta}_{\mathfrak{P}} \;=\; \{\tau(\omega|\mathfrak{w})^p - \tau(\omega|\frac{1}{p}\mathfrak{P}\mathfrak{w})\}\left\{\frac{\Delta(\frac{1}{m}\mathfrak{M}\mathfrak{w})}{\Delta(\mathfrak{w})}\right\}^p ,$$

wobei ω und $\frac{1}{m}\mathfrak{P}\mathfrak{w}$ einander wieder durch die Beziehung

$$\omega \;\equiv\; 0 \text{ mod. } \frac{1}{m}\mathfrak{M}\mathfrak{w}$$

zugeordnet sind. Der zusätzliche Faktor bewirkt, daß die q–Entwicklungskoeffizienten der Funktionen $\tilde{\delta}_{\mathfrak{K}}(\omega|\mathfrak{w})$ nicht nur höchstens durch $\mathsf{N}\mathfrak{m}$ teilbare Nenner haben wie diejenigen der Funktionen $\delta_{\mathfrak{K}}(\omega|\mathfrak{w})$, sondern sogar ganz sind. Aus dem Satz über die Deltaquotienten liest man weiter ab, daß der Zusatzfaktor im singulären Fall nur aus Primteilern von $\mathfrak{m}$ zusammengesetzt ist, sodaß die singulären Werte

$$\delta_{\mathfrak{K}}(\omega|\mathfrak{w}) \;=\; \tau(\mathfrak{K}^*_{\mathfrak{m}})^p - \tau(\mathfrak{K}^*_m\mathfrak{h}^{-1})$$

höchstens Primteiler von $\mathfrak{m}$ statt von $\mathsf{N}\mathfrak{m}$ im Nenner haben.

Das sind — in ganz grober Skizze — die Ergebnisse meiner Arbeit. Im übrigen habe ich mich dabei auf Vorschlag von Herrn Professor Hasse bemüht, möglichst weitgehend nicht von den Gitterbasen, deren Transformationen usw., sondern nur von den Gittern selbst, deren Verfeinerungsgittern usw. zu sprechen. Nur bei den q–Entwicklungen muß man dann notgedrungen diese basisinvariante Sprechweise aufgeben.

Ich hoffe, daß ich Ihnen mit diesen Angaben ein wenig nützlich sein kann. Falls Sie Interesse daran haben, kann ich Ihnen gern einen Durchschlag der Arbeit zur Verfügung stellen. Nur habe ich im Augenblick keinen überzähligen hier. Aber ich werde ohnehin in einigen Wochen, falls die Arbeit von der Fakultät angenommen wird, noch eine Reihe von Exemplaren davon herstellen müssen.

Mit freundlichen Grüßen

Ihr

(Klaus Alber)

Kapitel 3

Name Index

Alber, 135
Artin, 114, 126, 140
Behrens, 107, 108
Blaschke, 101
R. Brauer, 69, 126
Chevalley, 29, 31, 126
Eichler, 138
Franz, 48
Geppert, 50, 95
Hecke, 11
Heisig, 123, 124
Herglotz, 106
Hesse, 112
Hopf, 121, 124
Hurwitz, 42
Iyanaga, 121, 122, 124, 126
Jehne, 124
Jung, 50
Kaehler, 117
Kamke, 124
Kneser, 52
Köcher, 140
Koethe, 119
Lefschetz, 47
Leopoldt, 124

Maak, 108
MacLane, 126
Magnus, 69
Maus, 141, 142, 142, 143
C. Meyer, 103, 136, 137, 138
Nehrkorn, 29
E. Noether, 11, 13, 14, 24, 34, 54
F. Noether, 35, 54
Ore, 19
Reich, 18
Reidemeister, 139
Richert, 137, 138
Rohrbach, 102, 126
Schilling, 17, 28
H. L. Schmid, 40, 44, 48, 49, 55, 68
F. K. Schmidt, 68, 82
Scholz, 17, 132, 133
Severi, 47, 72, 73
Shimura, 127
Siegel, 79, 126
Sperner, 101, 123, 124
Suetima, 127
Taniyama, 127
Teichmüller, 45
Teubner, 133
v. d. Waerden, 12, 35, 50
A. Weil, 47, 79, 117, 126, 127
Witt, 121, 122
Wolf, 120

Kapitel 4

Subject Index

Mehrfach vorhandene Seitenzahlen werden bei der endgültigen Seitenverteilung entfernt werden

Anordnungssatz, 135, 147
Character,
    Hecke, 132
Class Number, 12, 11
Complex Multiplication, 66, 73, 74, 75, 76, 80, 82, 110, 112, 119, 127
Congruence,
    Frobenius, 147
Correspondence, 40, 42, 42, 46, 49, 50, 55, 58, 65, 72, 78
Delta Quotient, 135, 146, 148
Differential, 46, 85
Diophantine Equation, 79
Divisor, 39, 42, 57, 58, 60, 65, 69, 70
    prime, 28, 42, 49, 49, 53, 56, 60, 63, 69, 70, 129
Elliptic case, 38, 39, 44, 70
Field,
    Abelian, 15
    class, 28, 29, 31, 72, 135, 147
    cyclic, 15, 29
    elliptic, 36, 83, 115, 119, 132
    function, 77, 83, 115, 119, 129
    imaginary–quadratic, 146, 147, 12
    normal, 111
    number, 63, 103
    real–quadratic, 12
    singular, 129

Formula,
    Kummer, 103
    norm addition, 38, 71
Function,
    Abelian, 70, 72, 73, 82, 127, 38
Galois Group, 15, 28, 80, 120
Genus, 36, 61, 119, 129
Hasse Hypothesis, 132
hypercomplex, 44
Hypercomplex System, 63, 65, 132
Jacobian, 70
L–Series, 119
Lattice, 146, 148
Lattice Base, 148
Module,
    Singular, 72
Normal Base, 62
Reciprocity, Law of, 15, 76, 81
Riemann Hypothesis, 37, 39, 70, 77, 129
Superposition, 42, 65
Theorem,
    Abel, 67, 86
    Hurwitz, 67
    Jacobi, 67, 67
    principal ideal, 17, 76, 81, 111, 112, 114, 15
    residue, 82
Theta–Function, 71
unramified, 15, 81
Zeta–Function, 11, 119, 129, 132, 133