Briefwechsel

H. Hasse – R. Brauer

Herausgegeben von Peter Roquette

Version vom 29.09.2011

Letztmalig geändert am 7. Juli 2013.

Hasse an Brauer 30.10.27 – 24.11.64
Brauer an Hasse 22.10.27 – 9.4.71
Eichler an Brauer 7.10.37

Quelle: Handschriftenabteilung der Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen.
Nachlässe Helmut Hasse, Richard Brauer

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Die Korrespondenz Hasse–Brauer

1.1 22.10.1927, Brauer an Hasse

Berlin, d. 22. X. 27

Sehr geehrter Herr Professor,

Für Ihre liebenswürdigen Zeilen danke ich Ihnen, zugleich im Namen meines Bruders, herzlich; Ihre Bemerkungen haben uns sehr interessiert.

Durch Frl. Noether bekam ich Ihr Manuskript zugeschickt. Ihr Existenzsatz ist für gruppentheoretische Zwecke von großem Interesse. Für die ursprünglich von Frl. Noether aufgeworfene Frage scheint man allerdings, wie ich jetzt gesehen habe, mit wesentlich einfacheren Hilfsmitteln durchzukommen. Man kann zeigen, daß es für unendlich viele n Körper des Grades 2^n mit den verlangten Eigenschaften gibt. Man hat die Körper analog wie bei Ihnen zu nehmen und die Primzahl p als Teiler von $2^{2^k}+1$ $(k=0,1,2,\ldots)$ zu wählen. Adjungiert man zu Ihrem Körper k die Zahl i, so gibt es in $k(i)$ eine Einheit mit der Relativnorm -1 in bezug auf k. Daher kann man in k -1 als Summe von zwei Quadraten darstellen; und die zugehörige Darstellung der Quaternionen läßt sich dann sogar explizit angeben. – Es scheint dagegen nicht möglich zu sein, die Methode bei allen Gradzahlen 2^n anzuwenden; daß Ihr Resultat auch dann noch gilt, ist über die ursprüngliche Frage von Frl. Noether hinaus gruppentheoretisch sehr interessant.

Mit den besten Grüßen

Ihr

Richard Brauer

1.2 30.10.1927, Hasse an Brauer, Postkarte

Halle, den 30. X. 27.

(Postkarte)

Lieber Herr Brauer!

Frl. Noether teilte mir inzwischen Ihren ganz einfachen Beweis des Existenzsatzes für *gewisse* n mit. Um -1 als Summe von 2 Quadraten (statt 3) zu haben, brauchen Sie doch aber nicht erst i zu adjungieren, weil das Kriterium für 2 oder 3 Quadrate genau dasselbe ist (Satz 13, 14 meiner Arbeit in Crelle 153).

Ich wäre Ihnen dankbar, wenn Sie mir die Bedeutung meines Existenzsatzes für Gruppen– u. Quaternionentheorie genau darlegen würden. Aus E. Noethers Andeutungen werde ich bei ihrer üblicherweise überstürzten Darstellungsweise nicht klug.

Mit freundlichen Grüßen Ihr H. Hasse.

1.3 04.11.1927, Brauer an Hasse

Königsberg, d. 4. XI. 27

Sehr geehrter Herr Professor,

Für Ihre Karte* besten Dank. Ich will versuchen, die Bedeutung Ihres Existenzsatzes für Gruppentheorie, bezw. Theorie der hyperkomplexen Zahlen einigermaßen übersichtlich darzustellen. Dabei will ich mich auf das beschränken, was gerade für diesen Zweck wesentlich ist, und alles Andere weglassen; der Brief würde sonst gar zu lang und auch zu schwer lesbar werden. Einige Schwierigkeiten macht es, daß sehr verschiedene Bezeichnungsweisen üblich sind; ich habe deshalb vorsichtshalber Zitate beigefügt.

Ich beginne in I mit der gruppentheoretischen Betrachtung. In II behandle ich das Beispiel, bei dem man auf Ihren Existenzsatz geführt wird, mit einer ganz einfachen, völlig elementaren Methode bis zu der Stelle, wo man Ihren Satz anzuwenden hat. Es folgt in III eine Darstellung des Zusammenhangs zwischen den Fragen aus I und der Theorie der hyperkomplexen Zahlen, so weit es für uns von Interesse ist. Für den Fall, daß es Sie interessieren sollte, füge ich schließlich unter IV meinen Beweis für den Existenzsatz für unendlich viele Werte von n hinzu. Es scheinen gerade dabei durch den Brief von Frl. Noether Mißverständnisse entstanden zu sein, z. B. bezüglich der Adjunktion von i. Der Beweis benutzt nur Überlegungen recht elementarer Natur.

I. $\mathfrak{G}$ sei eine Gruppe linearer homogener Substitutionen; die Koeffizienten der Substitutionen mögen (nur der Einfachheit halber) gewöhnliche Zahlen sein. Ist K ein gegebener Zahlkörper, so heißt $\mathfrak{G}$ *in K rational*, wenn alle diese Koeffizienten zu K gehören; $\mathfrak{G}$ heißt *in K rational darstellbar*, wenn es eine zu $\mathfrak{G}$ ähnliche *) Gruppe gibt, die in K rational ist. Notwendig für das letztere ist jedenfalls, daß K den Charakter †) von $\mathfrak{G}$

*) ähnlich = äquivalent, Speiser Gruppentheorie S. 103.

†) Speiser S. 105

enthält.

$\mathfrak{G}$ sei im folgenden irreduzibel[‡]. K bedeute einen festen Zahlkörper, der den Charakter von $\mathfrak{G}$ enthält. Dann läßt sich $\mathfrak{G}$ in algebraischen Körpern über K rational darstellen[§], diese Körper mögen — nach Vorschlag von E. Noether — als *Zerfällungskörper*[¶] bezeichnet werden. Ein Zerfällungskörper heißt *minimal*, wenn er keinen anderen Zerfällungskörper als Teilkörper enthält. Man betrachte die Grade der Zerfällungskörper, das Minimum m dieser Zahlen heißt nach I. Schur[‖] der *Index von* $\mathfrak{G}$ *in bezug auf* K. Z. B. bedeutet $m = 1$, daß $\mathfrak{G}$ in K selbst rational darstellbar ist. Schur beweist, daß der Grad jedes Zerfällungskörpers durch m teilbar ist.

Frl. E. Noether warf in Kissingen die Frage auf, ob alle minimalen Zerfällungskörper den Grad m haben.[**] Da das nicht richtig ist, änderte sie die Frage so ab: *Gibt es feste Gruppen* $\mathfrak{G}$*, für die es minimale Zerfällungskörper von beliebig großem Grad gibt*? Sie nahm dann später als Beispiel die Quaternionengruppe und wurde bei der Untersuchung gerade auf die Frage geführt, die Sie Ihnen seinerzeit vorgelegt hat. Ich will die Zurückführung auf diese Frage jetzt nach einer anderen Methode durchführen.

II. $\mathfrak{G}$ bezeichne die Gruppe zweiten Grades der Ordnung 8, die besteht

[‡] Speiser S. 109.

[§] Für endliche Gruppen Speiser S. 147 (Frobenius) – Für unendliche Gruppen anscheinend nirgends explizit formuliert, es ergibt sich durch Kombination eines Satzes von Burnside (Proc. London Math. Soc. Ser. 2 Bd. 4 S. 4), – der in der Burnsideschen Formulierung allerdings falsch ist –, und eines Satzes von Schur (Trans. Am. Math. Soc. Ser. 2. Bd. 15 (1909). S. 167)

[¶] $\mathfrak{G}$ tritt als irreduzibler Bestandteil (Speiser S. 104) in einer im wesentlichen eindeutig bestimmten, in K rationalen und in K irreduziblen (Speiser §53) Gruppe $\mathfrak{H}$ auf. $\mathfrak{G}$ enthält nur $\mathfrak{G}$ als absolut irreduziblen Bestandteil und zwar etwa m–mal. Die algebraischen Körper, in denen $\mathfrak{H}$ in absolut irreduzible Bestandteile zerfällt, sind gerade die Zerfällungskörper. Korrekt müssen wir also von den *Zerfällungskörpern von* $\mathfrak{H}$ und nicht von denen von $\mathfrak{G}$ sprechen. E. Noether geht, etwas anders als hier, von der Gruppe $\mathfrak{H}$ aus, die in K irreduzibel ist, und zerlegt sie in einem Oberkörper in absolut irreduzible Bestandteile. *Allgemeiner kann man als Zerfällungskörper jeden Körper bezeichnen, in dem* $\mathfrak{G}$ *rational darstellbar ist*, auch solche, die nicht relativ algebraisch sind. Wegen der Bedeutung der Zahl m vgl. Anmerkung 6)

[‖] I. Schur, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1906 für endliche Gruppen; für unendliche Gruppen in den Trans. Am. Math. Soc. Ser. 2. Bd. 15. — Die Zahl m ist dieselbe wie in Anm. 5). Im allgemeinen gibt es unendlich viele Zerfällungskörper des Grades m, falls $m > 1$ ist. —

[**] Ich hatte mir die Frage früher schon einmal überlegt und kannte ein Gegenbeispiel, das Frl. Noether in der Folge durch ein einfacheres ersetzte.

aus

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} , \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = I \cdot J$$

$$-E , \quad -I , \quad -J , \quad -K = I\,J .$$

Es handelt sich um eine Darstellung der Quaternionengruppe.

Der Grundkörper K sei im folgenden der Körper der rationalen Zahlen; der Charakter von $\mathfrak{G}$ gehört zu K.

Behauptung: K^* ist dann und nur dann für $\mathfrak{G}$ Zerfällungskörper, wenn sich in K^* die Zahl -1 als Summe von zwei Quadraten darstellen läßt.

Beweis: 1) Es sei $\widetilde{\mathfrak{G}}$ eine zu $\mathfrak{G}$ ähnliche, in K^* rationale Gruppe, den Elementen I, J, K von $\mathfrak{G}$ mögen in $\widetilde{\mathfrak{G}}$ die Elemente $\widetilde{I}$, $\widetilde{J}$, $\widetilde{K}$ entsprechen. J und $\widetilde{J}$ sind ähnliche Matrizen, die 4 Koeffizienten von J sind rational $(0, +1, -1)$, die von $\widetilde{J}$ gehören zu K^*. Daher[††)] kann man eine Matrix Q mit Koeffizienten aus K^* bestimmen, so daß $Q^{-1}\widetilde{J}Q = J$ ist. Ersetzt man $\widetilde{\mathfrak{G}}$ von vornherein durch $Q^{-1}\widetilde{\mathfrak{G}}Q$ und schreibt dafür wieder $\widetilde{\mathfrak{G}}$, so ist auch jetzt $\widetilde{\mathfrak{G}}$ in K^* rational und zu $\mathfrak{G}$ ähnlich, es wird $\widetilde{J} = J$. Es sei $\widetilde{I} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dann sind a, b, c, d Zahlen aus K^*. Aus $IJ = -JI$ folgt: $\widetilde{I}\widetilde{J} = -\widetilde{J}\widetilde{I}$, also $\widetilde{I}J = -J\widetilde{I}$, d. h.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

also $a = -d$, $b = c$. Aus $I^2 = -E$ folgt $\widetilde{I}^{\,2} = -E$, also

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[††)] Es handelt sich dabei um eine einfache Folge von Sätzen über lineare homogene Gleichungen. Q muß der Gleichung $\widetilde{J}Q = QJ$ genügen. Das ergibt für die 4 Koeffizienten von Q vier homogene lineare Gleichungen mit Koeffizienten aus K^*. Wegen der Ähnlichkeit von J und $\widetilde{J}$ haben diese eine Lösung, derart daß die zugehörige Matrix Q nicht verschwindende Determinante hat. Dann gibt es auch eine in K rationale Lösung, derart daß die zugehörige Matrix Q nichtverschwindende Determinante hat. Für dieses Q ist $Q^{-1}\widetilde{J} = QJ$ und Q hat Koeffizienten aus K^*.

und es ergibt sich folglich $a^2 + b^2 = -1$. Es sind a und b Zahlen aus K^* und also ist -1 in K als Summe von zwei Quadraten darstellbar.

2) Es sei umgekehrt $-1 = a^2 + b^2$, wo a und b Zahlen aus K^* sind. Man setze $\widetilde{I} = \begin{pmatrix} a & b \\ +b & -a \end{pmatrix}$, $\widetilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\widetilde{K} = \widetilde{I} \cdot \widetilde{J}$. Dann bilden, wie man leicht sieht, $\pm E$, $\pm\widetilde{I}$, $\pm\widetilde{J}$, $\pm\widetilde{K}$ eine zu $\mathfrak{G}$ ähnliche Gruppe $\widetilde{\mathfrak{G}}$, $\widetilde{\mathfrak{G}}$ ist in K^* rational. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Um also für unser $\mathfrak{G}$ nachzuweisen, daß es minimale Zerfällungskörper von beliebig großem Grade gibt, hat man nachzuweisen, daß es algebraische Körper K^* beliebig großen Grades gibt, in denen -1 als Summe von zwei Quadraten darstellbar ist, ohne daß das in einem echten Teilkörper von K^* geht. Dieser Nachweis ist geführt, wenn man zeigen kann: *Es gibt zyklische Körper des Grades* 2^n, *($n = 1, 2, 3, \ldots$), über dem Körper der rationalen Zahlen, in denen* -1 *als Summe von zwei*[‡‡)] *Quadraten darstellbar ist.* Ein echter Teilkörper eines derartigen Körpers ist nämlich sicher reell, in ihm ist eine Darstellung von -1 bestimmt nicht möglich. Es handelt sich also gerade um den Satz, nach dem Frl. Noether Sie gefragt hat.

III. Es sei ein Körper K gegeben; im Anschluß an I machen wir die [überflüssige] Voraussetzung, es sei K ein Zahlkörper. A sei eine *Divisi-*

[‡‡)] Bei Frl. Noether ergab sich als notwendige und hinreichende Bedingung für Zerfällungskörper die Darstellbarkeit von -1 durch 3 Quadrate. Es folgt also aus der Darstellbarkeit von -1 durch 3 Quadrate in einem Körper die Darstellbarkeit durch 2 Quadrate. Wie ich vor kurzem gemerkt habe, ist das aber so gut wie trivial. Sind a_1, a_2, a_3, a_4 vier Zahlen aus K^*, die nicht alle 0 sind, und für die $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 0$ ist, sind b_1, b_2, b_3, b_4 zunächst beliebige Zahlen aus K^*, so folgt aus der bekannten Identität:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 \quad (c_\lambda \text{ bilinear in den } a_\lambda,\ b_\lambda).$$

$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 = 0$, wo die c_λ gewisse lineare homogene Ausdrücke in den b_λ sind. Man kann nun die b_λ so für K^* wählen, daß $c_1 = 0$ wird. Man schließt leicht, daß das auch geht, wenn man $c_2 \neq 0$ vorschreibt. Dann wird $c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 = 0$ eine nicht triviale Darstellung der Null durch drei Quadrate in K^*.

onsalgebra [*')] über K. Das Zentrum [†')] von A ist einem algebraischen Körper über K isomorph. Man ersetze K durch dies Zentrum; man erkennt, daß man ohne wesentliche Einschränkung annehmen kann, daß K selbst das Zentrum von A sind. Ist jedem Element von A eine Matrix eines festen Grades m zugeordnet; entspricht ins besondere den Zahlen k aus K die Matrix $k \cdot E$, (wo E die Einheitsmatrix bedeutet); und ist schließlich allgemein diese Zuordnung isomorph bezüglich Addition und Multiplikation, so spricht man von einer Darstellung $\mathfrak{A}$ von A durch Matrizen. $\mathfrak{A}$ ist insbesondere eine Gruppe; zwei Darstellungen heißen ähnlich, wenn es sich um ähnliche Gruppen handelt, analog ist es mit der Irreduzibilität von Darstellungen. Ähnliche Darstellungen gelten als nicht verschieden. Dann gelten die Sätze: Es gibt eine und nur eine irreduzible Darstellung $\mathfrak{A}$ von A. Die Zuordnung der Elemente ist dabei eineindeutig. Der Charakter von $\mathfrak{A}$ gehört zu K, der Index von $\mathfrak{A}$ in bezug auf K ist gleich dem Grad m von $\mathfrak{A}$ [‡')] *Jeder Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$ vom Grad m über K ist einem maximalen Unterkörper* [§')] *von A isomorph* [¶')] *und umgekehrt.*

Ist r eine ganze Zahl > 0, so bezeichne A_r die einfache Algebra [‖')], die aus allen Matrizen r ten Grades besteht, deren Koeffizienten Elemente aus A sind. Dann gilt allgemeiner: *Jeder Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$ vom Grad $m \cdot r$ ist einem maximalen Unterkörper von A_r isomorph; umgekehrt ist jeder maximale Unterkörper von A_r ein Zerfällungskörper.* Macht man für K noch eine „Regularitätsvoraussetzung“, so folgt noch, daß jeder maximale Unterkörper von A_r den Grad $m \cdot r$ in bezug auf K hat.

[*')] vgl. Dickson Speiser, Algebren und ihre Zahlentheorie, 3. Kapitel. – Eine Divisionsalgebra hat alle Eigenschaften eines Körpers bis auf die Kommutativität der Multiplikation. Frl. Noether nennt derartige Systeme direkt Körper. Was man sonst Körper nennt, bezeichnet sie dann als *kommutative* Körper. Zu einer Divisionsalgebra kommt noch als weitere Forderung hinzu, daß sie von endlichem Rang über ihrem Zentrum (vgl. [†')]) ist (und für uns noch, daß das Zentrum einem Zahlkörper isomorph ist, – das ist aber überflüssig). Da zu leicht Verwechslungen möglich sind, vermeide ich die Noethersche Bezeichnungsweise und spreche *nur bei kommutativer Multiplikation* von Körpern.

[†')] Das Zentrum besteht aus allen den Zahlen z von A, für die für alle α aus A die Gleichung $\alpha \cdot z = z \cdot \alpha$ gilt.

[‡')] Der Grad von $\mathfrak{A}$ ist der Grad der Matrizen von $\mathfrak{A}$. Aus dem Satz folgt, daß eine Basis von A aus m^2 Elementen besteht. Wenn A nicht K selbst ist, ist $m > 1$.

[§')] Ein maximaler Unterkörper ist ein solcher, der in keinem anderen Unterkörper von A enthalten ist.

[¶')] Bei zwei Körpern ist „isomorph“ immer eineinstufig gemeint.

[‖')] Dickson–Speiser §57.

Man bilde nun der Reihe nach $A = A_1$, A_2, A_3, ... und bestimme zu jedem dieser Systeme die maximalen Unterkörper. Die Tatsache, daß die Gradzahlen der minimalen Zerfällungskörper nicht beschränkt zu sein brauchen ist gleichbedeutend mit dem folgenden: *Es kann eintreten, daß für beliebig große* r *immer noch maximale Unterkörper des Grades* $m \cdot r$ *von* A_r *auftreten, die nicht als Erweiterung eines der vorhergehenden Körper (im Sinn der Isomorphie) aufzufassen sind.*

Beim Beispiel von II. hat man für A die rationalen Quaternionen, für $\mathfrak{A}$ die Gesamtheit aller linearen Verbindungen von E, I, J, K mit rationalen Koeffizienten zu nehmen. Ersichtlich ist dann und nur dann $\mathfrak{A}$ in einem Körper K^* darstellbar, wenn $\mathfrak{G}$ darstellbar ist. [Ich will noch darauf hinweisen, daß man in gewissem Sinn alle Algebren auf Divisionsalgebren zurückführen kann, vgl. den Dickson–Speiser. Die Bildung von A_r spielt dabei eine wichtige Rolle, vgl. Kapitel 7, besonders §78.]

IV. Beweis der Existenz von zyklischen Körpern des Grades 2^n über dem Körper der rationalen Zahlen, in denen -1 als Summe von zwei Quadraten darzustellen ist, (für unendlich viele Werte von n.)

1. Es sei p eine Primzahl mit folgenden Eigenschaften

(1) $p \equiv 1 \pmod{2^n}$, $p \not\equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$

(2) Es gibt eine ganze rationale Zahl r, so daß $2^r + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ ist

Anders ausgedrückt: 2 gehört $(\mathrm{mod}\ p)$ zu einem geraden Exponenten.

Beweis der Existenz einer Primzahl p für unendlich viele n:
Es sei k ganz rational > 0, sonst beliebig. p sei ein Primteiler von $2^{2^k} + 1$. Dann ist $2^{2^k} \equiv -1 \pmod{p}$, also (2) erfüllt. Ferner ist $2^{2^{k+1}} \equiv 1 \pmod{p}$. Also ist der Exponent, zu dem 2 $(\mathrm{mod}\ p)$ gehört, eine Potenz von 2. Wegen $2^{2^k} \equiv -1$ ist er genau 2^{k+1}, also folgt $2^{k+1} | p-1$. Bedeutet 2^n die höchste Potenz von 2, die in $p-1$ aufgeht, so ist (1) erfüllt; es ist $n > k$. k war beliebig, daher lassen sich (1) und (2) für unendlich viele n erfüllen.

2. Es sei jetzt P der Körper der rationalen Zahlen, ε eine primitive p–te Einheitswurzel. Behauptung: In $P(\varepsilon)$ läßt sich -1 als Summe von zwei Quadraten (sogar ganzer Zahlen) darstellen: $-1 = a^2 + b^2$; $a, b < P(\varepsilon)$.
Die letzte Gleichung ist gleichbedeutend mit $-1 = (a + ib)(a - ib)$, anders ausgedrückt, da $a + ib$ eine Zahl von $P(\varepsilon \cdot i) = P(\varepsilon, i)$ und $(a + ib)(a -$

$ib)$ ihre Relativnorm in bezug auf $P(\varepsilon)$ ist: Es gibt im Körper der $(4p)$–ten Einheitswurzeln Zahlen, deren Relativnorm in bezug auf den Körper der p–ten Einheitswurzeln -1 ist. Relativnorm sei im folgenden immer so verstanden, Relativnorm einer Zahl von $P(\varepsilon i)$ in bezug auf $P(\varepsilon)$. Dann hat man zu zeigen: -1 läßt sich als Produkt von Relativnormen darstellen.

Die Relativnorm von $1+i\varepsilon^\nu$ ist $(1+i\varepsilon^\nu)(1-i\varepsilon^\nu) = 1+\varepsilon^{2\nu}$ $(\nu = 1, 2, \dots, p-1)$

Daher sind alle Zahlen $1+\varepsilon,\ 1+\varepsilon^2,\ \dots,\ 1+\varepsilon^{p-1}$ Relativnormen. Man bilde für ein gleich zu bestimmendes α das Produkt von Relativnormen

$$\Pi = \prod_{\nu=1}^{\alpha} \left(1+\varepsilon^{2^\nu}\right) = (1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^4)\dots(1+\varepsilon^{2^\alpha})$$

Nach einer bekannten Identität folgt

$$\Pi = 1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\dots+\varepsilon^{2^{\alpha+1}-1}$$

Man wähle $\alpha+1 = r$. Fügt man zu Π noch $\varepsilon^{2^{\alpha+1}} = \varepsilon^{2^r}$ hinzu, so ist wegen $2^r \equiv -1 \pmod p$ $\big($nach (2)$\big)$ $\varepsilon^{2^r} = \varepsilon^{p-1}$ und $\Pi+\varepsilon^{2^r}$ besteht aus lauter Stücken $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\dots+\varepsilon^{p-1} = 0$. Daher wird

$$\Pi = -\varepsilon^{2^r} = -\varepsilon^{-1}$$

Nun ist auch ε Relativnorm, nämlich von $\varepsilon^{\frac{p+1}{2}}$ wegen $\varepsilon^{\frac{p+1}{2}} \cdot \varepsilon^{\frac{p+1}{2}} = \varepsilon$, also auch $\Pi \cdot \varepsilon = -1$. Daher ist -1 wirklich Relativnorm, also in $P(\varepsilon)$ als Summe von 2 Quadraten darstellbar.

3. Es sei Z der Unterkörper des Grades 2^n von $P(\varepsilon)$. Durch Multiplikation von $a+bi$ mit gewissen Konjugierten zeigt man leicht, daß es in $Z(i)$ eine Einheit gibt, deren Relativnorm in bezug auf Z gerade -1 ist, daher ist in Z die Zahl -1 als Summe von 2 Quadraten darstellbar. — Man kann hier aber auch rein gruppentheoretisch schließen: Der Index der Gruppe $\mathfrak{G}$ in bezug auf Z als Grundkörper ist ein Teiler von 2.[**'] Da nun $\mathfrak{G}$ in dem Körper $P(\varepsilon)$ von ungeradem Relativgrad $\frac{p-1}{+++}$ über Z rational darstellbar ist, muß der Index in $\frac{p-1}{2}$ aufgehen, also 1 sein. Daher ist $\mathfrak{G}$ in Z rational darstellbar, also -1 in Z als Summe von zwei Quadraten darzustellen. Z

[**'] Der Index irgend einer Gruppe in bezug auf einen Zahlkörper geht nach Schur stets in dem Grad der Gruppe auf.

ist ein zyklischer Körper des Grades 2^n.

Aus II und IV ergibt sich, daß die Gradzahlen der minimalen Zerfällungskörper nicht beschränkt sind. — Ihre Betrachtung lehrt, daß alle Potenzen von 2 Grade von minimalen Zerfällungskörpern sind; diese Tatsache wird ohne Ihre Betrachtung wohl nicht zu beweisen zu sein. Offen ist noch, ob alle geraden Zahlen Gradzahlen von minimalen Zerfällungskörpern sind; es ist aber nicht ausgeschlossen, daß Primzahlen, die nicht in m (hier: $m = 2$) aufgehen, eine andere Rolle als die in m aufgehenden spielen. — Zu IV muß ich noch bemerken, daß ich das Beispiel Ihrem Beispiel nachgebildet habe. Ob wir IV in die Arbeit aufnehmen, ist noch sehr fraglich, da die Arbeit dann wohl zu lang wird. — Die Forderung (2) ist übrigens für IV wesentlich; wenn (2) nicht erfüllt ist, leistet auch keine andere Produktbildung an Stelle von Π das Verlangte.

Eben erhalte ich von Frl. Noether eine Karte, deren Inhalt sich im wesentlichen mit dem ~~Inhalt~~ Beweis in Anm. 9) deckt. Ich hatte ihr das auch mitgeteilt; unsere Karten haben sich gerade gekreuzt.

Mit den besten Grüßen

Ihr sehr ergebener

Richard Brauer

1.4 07.11.1927, Hasse an Brauer

Halle, den 7. XI. 27

Lieber Herr Brauer!

Mit großem Interesse las ich Ihren Brief* und danke Ihnen bestens für die viele Arbeit, die Sie sich meinetwillen gemacht haben. Ich möchte von mir aus noch einige Bemerkungen hinzufügen.

1.) Ihr in Anm. 9 gegebener Beweis, daß aus $-1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ auch folgt $-1 = y_1^2 + y_2^2$, ist mir noch zu kompliziert. Der Satz ist viel allgemeiner, nämlich auf *beliebige* Quaternionen–Algebren ausdehnbar. Deren Normen werden durch quaternäre Formen gegeben, die in der Gestalt $x^2 - ay^2 + b(u^2 - av^2)$ angenommen werden können, wobei a und b Elemente des Grundkörpers K (Charakt. $\neq 2$) sind. Für eine solche Form gilt nun der Satz:

> $x^2 - ay^2 + b(u^2 - av^2) = 0$ *ist in* K *dann und nur dann eigentlich lösbar, wenn* $\overline{x}^2 - a\overline{y}^2 + bz^2 = 0$ *in* K *eigentlich lösbar ist.*

Beweis: Ist $a = a_0^2$ in K, so ist das trivial. Andernfalls ist $K(\sqrt{a})$ relativ quadratisch über K, und dann bilden die Relativnormen $N(x + y\sqrt{a}) = x^2 - ay^2$ eine multiplikative Gruppe. Somit ist $\dfrac{x^2 - ay^2}{u^2 - av^2} = \overline{x}^2 - a\overline{y}^2$, was den Beweis (mit $z = 1$) ergibt. Siehe dazu auch: a.) Dickson–Speiser §32, b.) Meine Arbeit Crelle 152, S. 129 ff Satz 15 mit Satz 6 zusammen (in Satz 15 $d = d_0^2$).

2.) Mein Beweis für die Gradzahlen 2^n überträgt sich fast wörtlich auf beliebige Gradzahlen $2^n\overline{u}$ ($n \geqq 1$, $\overline{u}$ ungerade). Man wähle dazu wieder $p \equiv 1 \bmod. 2^n\overline{u}$, $\not\equiv 1 \bmod. 2^{n+1}\overline{u}$ und K als den Unterkörper $2^n\overline{u}$–ten Grades des Kreiskörpers K_p der p–ten Einheitswurzeln. Damit $-1 = x^2 + y^2$ in K wird, ist notwendig und hinreichend, daß der Grad der Primteiler von 2 in K gerade ist (Crelle 153, S. 128, Satz 13); da K Klassenkörper zur Gruppe der $2^n\overline{u}$–ten Potenzreste mod. p ist, also daß die früheste Potenz von 2, die $2^n\overline{u}$–ter Potenzrest mod. p ist, einen geraden Exponenten hat, daß also 2 *nicht* 2^n–ter Potenzrest mod. p ist. Nun ist 2 dann und nur dann 2^n–ter P. R. mod. p, wenn dasselbe mod. $\mathfrak{p}$ der Fall ist, wo $\mathfrak{p}$ eins der Primideale 1. Grades von p im Körper K der $2^n\overline{u}$–ten Einheitswurzeln ist. Und weiter ist letzteres dann und nur dann der Fall, wenn $\mathfrak{p}$ in $K\left(\sqrt[2^n]{2}\right)$ „voll–zerlegt“ (in versch. Pr. Id. 1. Gr. zerlegt) ist. Hiernach ist die Existenz von $\mathfrak{p}$ in K zu zeigen, für die

$$\text{(I)} \qquad \mathfrak{p} \text{ in } K\left(\sqrt[2^n]{2}\right) \qquad \textit{nicht} \text{ voll–zerlegt}$$

ist, und — was mit $p \not\equiv 1$ mod. $2^{n+1}\overline{u}$ gleichbedeutend — außerdem

$$\text{(II)} \qquad \mathfrak{p} \text{ in } K\left(\sqrt[2]{\zeta}\right) \qquad \textit{nicht} \text{ voll–zerlegt}$$

ist, wo ζ eine prim. $2^n\overline{u}$–te Einheitswurzel ist. Dieser Nachweis ist geführt, wenn gezeigt ist, daß die unter eine oder beide der gegenteiligen Bedingungen fallende $\mathfrak{p}$:

$$(\overline{\text{I}}) \qquad \mathfrak{p} \text{ in } K\left(\sqrt[2^n]{2}\right) \qquad \text{voll–zerlegt}$$

$$(\overline{\text{II}}) \qquad \mathfrak{p} \text{ in } K\left(\sqrt[2]{\zeta}\right) \qquad \text{voll–zerlegt}$$

zusammen höchstens einen echten Bruchteil aller Pr. Id. 1. Gr. $\mathfrak{p}$ von K ausmachen, und dies wieder, wenn die Relation

$$\frac{1}{r_n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{r_n^*} < 1$$

gezeigt ist, wo r_n den Rel. Gr. von $K\left(\sqrt[2^n]{2}\right)$ über K, r_n^* den von $K\left(\sqrt[2^n]{2}, \sqrt[2]{\zeta}\right)$ über K bezeichnet (der Rel. Gr. von $K\left(\sqrt[2]{\zeta}\right)$ über K ist ja 2 wegen $n \geqq 1$).

Nun ist aber

$$\begin{aligned} r_n &= 2^{n-1}\,, \text{ wenn } \quad n > 2 \\ r_n &= 2^n\,, \text{ wenn } \quad n = 1 \quad \text{oder} \quad 2\,. \end{aligned}$$

Denn für $n > 2$ ist zwar bekanntlich $\sqrt[2]{2}$ in K (schon im Körper der 2^3–ten Einheitswurzeln), aber nicht auch $\sqrt[2^2]{2}$, weil das eine nicht–Abelsche Zahl ist. Für $n > 2$ ist also schon $\frac{1}{r_n} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2} < 1$, und auch für $n = 2$ ist schon $\frac{1}{r_2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} < 1$. Für $n = 1$ aber ist $r_1^* = 2^2$ als Grad von $K\left(\sqrt[2]{2}, \sqrt[2]{\zeta}\right)$ über K, weil $\sqrt[2]{2}$ nicht im Körper $K\left(\sqrt[2]{\zeta}\right)$ der $2^2\overline{u}$–ten Einheitswurzeln enthalten ist (sonst enthielte dieser die $2^3\overline{u}$–ten Einheitswurzeln während die zugeordneten Gruppen $\equiv 1$ mod. $2^2\overline{u}$ und $\equiv 1$ mod. $2^3\overline{u}$ *nicht* +++

sind). Also ist auch für $n = 1$: $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{r_1^*} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} < 1$

Ihr *direkter* Beweis für $-1 = x^2 + y^2$ in den speziellen Körpern ist sehr witzig. Er zeigt, wie viel arithmetischer Gehalt doch in den Relationen zwischen Einheitswurzeln steckt.

Wenn Sie meinen, daß sich die ganze Frage nach minimalen Zerfällungskörpern nicht–beschränkter Grade auch auf allgemeinere als die gewöhnlichen Quaternionen ausdehnen läßt, so stehe ich, was Existenzsätze anbetrifft, gerne zur Verfügung. Vermutlich werden Sie aber nach dem bisherigen Muster (und meinen Existenz–Arbeiten in Annalen und Zeitschrift) selbst den richtigen „Dreh“ finden.

Mit besten Grüßen

Ihr H. Hasse.

1.5 21.11.1927, Brauer an Hasse

Königsberg, d. 21. XI. 27.

Sehr geehrter Herr Professor,

Für die Übersendung der Separate möchte ich Ihnen recht herzlich danken. — Die Verallgemeinerung Ihres Existenzsatzes scheint für gruppentheoretische Zwecke nicht verwendbar zu sein. Die Zerfällungskörper, die Sie konstruieren, sind bestimmt keine minimalen Zerfällungskörper. Es gilt ganz allgemein die folgende einfach zu beweisende Tatsache: Hat eine Gruppe in bezug auf einen Grundkörper K den Index m, ist $K(\vartheta)$ Zerfällungskörper vom Grade n und enthält $K(\vartheta)$ einen Teilkörper $K(\eta)$ vom Grad n', wobei $\frac{n}{n'}$ zu m teilerfremd sei, so ist auch $K(\eta)$ Zerfällungskörper, also $K(\vartheta)$ nicht minimal. Infolgedessen kann ein zyklischer Körper nur dann minimaler Zerfällungskörper sein, wenn sein Grad nur Primzahlen enthält, die in m aufgehen; bei der Quaternionengruppe also nur dann, wenn der Grad eine Potenz von 2 ist.

Die Frage, die ich Ihnen seinerzeit schrieb, ob jede gerade Zahl Gradzahl eines minimalen Zerfällungskörpers der Quaternionengruppe ist, habe ich inzwischen auf gänzlich anderem Wege beantworten können. Da für einen festen Körper die Entscheidung, ob sich -1 als Summe von zwei Quadraten darstellen läßt, schwierig ist, wähle ich den Körper von vornherein so, daß diese Darstellbarkeit gesichert ist.*) Es sei für gerades $n > 4$, $n = 2\nu$

$$f(x) = X^n + 25 \cdot 9 \cdot 16 X^2 + 9 \cdot 64\,,$$

ϑ eine Wurzel von $f(x) = 0$; dann folgt

$$\vartheta^{2\nu} + (5 \cdot 3 \cdot 4)^2 \vartheta^2 + (3 \cdot 8)^2 = 0$$

*) Man kann auch versuchen, von einem beliebigen Körper auszugehen und durch Adjunktion einer Quadratwurzel die Darstellbarkeit von -1 zu sichern, doch scheint man so nicht zu ganz exakten Aussagen zu kommen.

woraus sich natürlich die Darstellbarkeit von -1 ergibt. Die Zahlkoeffizienten sind so gewählt, daß man 1) die Irreduzibilität von $f(x)$ im Körper P der rationalen Zahlen nachweisen kann 2) durch Modifikation einer einfachen Methode von Furtwängler, (Math. Ann. 85) zeigen kann, daß $P(\vartheta)$ außer sich und P nur $P(\vartheta^2)$ als Teilkörper enthält 3) ϑ^2 reell ist, bezw. reelle Konjugierte hat, sodaß $P(\vartheta^2)$ als Zerfällungskörper nicht in betracht kommt. Infolgedessen ist $P(\vartheta)$ minimaler Zerfällungskörper vom Grad n. Man kann leicht noch $f(x)$ mit Parametern belasten. Die Durchführung des Beweises ist langwierig, da unangenehme Ausnahmefälle auftreten, und recht mühsam.

Ihr Beweis dafür, daß aus $-1 = x_1^2+x_2^2+x_3^2$ auch $-1 = y_1^2+y_2^2$ folgt, hat mich sehr interessiert; es ist ja so riesig einfach. Die Ausdehnung auf beliebige Quaternionenalgebren war mir übrigens schon bekannt; sie ergab sich ebenfalls durch Vergleich eines Resultats von Frl. Noether und von mir; ich habe schon vor einiger Zeit mit Frl. Noether korrespondiert. Die Methode, die ich Ihnen geschrieben habe, gilt auch für diesen allgemeineren Fall, wie sie auch bei jeder Normrelation überhaupt anwendbar ist. Man kann übrigens noch ähnlich beweisen, daß aus einer Darstellung von -1 durch sieben Quadrate eine Darstellung durch vier Quadrate folgt, wobei vier sich nicht allgemein durch eine kleinere Zahl ersetzen läßt. Indem man die Relation für acht Quadrate verwendet (Normrelation einer nicht assoziativen Algebra) kann man zeigen, daß man 15 Quadraten auf 8 kommen kann. Interessant wäre es, ob man immer von $2^k - 1$ Quadraten auf 2^{k-1} kommen kann und ob man dabei eine Klassifikation der nicht reellen Körper mit Beziehung zur Theorie der Algebren bekommt. Das weiß ich aber nicht; ich kann vorläufig nur von $8n-1$ Quadraten auf $8(n-1)$ Quadrate kommen $(n \geqq 2)$

Für Ihr freundliches Anerbieten, mir mit Existenzsätzen zu helfen, danke ich Ihnen herzlich. Bei der Frage der Gradzahlen der minimalen Zerfällungskörper glaube ich allerdings, daß andere Wege leichter zum Ziel führen. Dagegen gibt es verschiedene andere Fragen, bei denen Existenzsätze von großer Bedeutung sein können; ich kann es noch nicht genau übersehen. Es wird für mich von großem Wert sein, wenn ich mich vielleicht später einmal an Sie wenden darf, wenn ich allein nicht weiterkomme.

Mit den besten Grüßen

Ihr sehr ergebener

Richard Brauer.

1.6 15.01.1928, Brauer an Hasse

Königsberg, d. 15.I.28

Sehr geehrter Herr Professor,

Frl. Noether schrieb mir, daß Sie die unangenehme Arbeit des Verschickens der Separate auf sich nehmen wollen; ich bin sonst auch gern bereit, es zu übernehmen.

Wenn die Liste, nach der Sie verschicken, sich im Brief senden läßt, würde ich sie gerne einsehen; damit ich weiß, an wen ich persönlich noch die Arbeit schicken soll. In betracht kommen hauptsächlich für mich Berliner Bekannte, Hopf, Löwner, Feigl und eine ganze Menge andere. Außerdem hätte ich gerne noch eine Reihe von Separaten für das hiesige Seminar, weil wir eventuell an ausländische Zeitschriften im Austausch Separate schicken wollen. Dazu kommen Separate für die hiesigen Mathematiker und ein kleiner Vorrat. Es wäre mir also sehr angenehm, wenn ich insgesamt 50 Stück würde haben können. Ich hatte auf der Korrektur nach Vereinbarung mit Frl. Noether insgesamt 200 Exemplare angegeben; man müßte eventuell die Zahl noch erhöhen.

mit den besten Grüßen
Ihr sehr ergebener
Richard Brauer.

1.7 05.03.1928, Brauer an Hasse

Königsberg, d. 5.III.28

Sehr geehrter Herr Professor,

Eben bemerke ich, daß ich Ihnen auf Ihren letzten Brief noch nicht geantwortet habe. Ich habe Ihre Liste damals an Frl. Noether weitergeschickt, und Sie werden sie inzwischen erhalten haben. Wie mir Frl. Noether schreibt, steht Bochner auf Ihrer Liste; ich hatte den Namen damals falsch gelesen und wußte auch nicht, daß Bochner jetzt in Dresden ist. Ich schicke dann natürlich das Separat nicht an ihn. Ebenso lasse ich Hopf weg, den Frl. Noether übernehmen will.[FN: An die anderen schicke ich heute ab.]

Da ja nun die Anzahl der Separate geringer ist als wir gerechnet hatten, werden sie eventuell nicht reichen oder doch keine für sich behalten. Ich bin gerne bereit, von den 35 Exemplaren, die ich bekommen habe, Ihnen einige zur Verfügung zu stellen. Sie brauchen mir nur zu schreiben, wieviel Sie haben wollen.

mit den ergebensten Grüßen
Ihr
Richard Brauer.

1.8 07.03.1928, Hasse an Brauer

Halle, 7. III. 28

Lieber Herr Brauer!

Besten Dank für Ihren heutigen Brief[*]. Die Liste für Ihre Separata–Versendungen habe ich inzwischen durch Frl. Noether zurückerhalten. Den Namen Boehmer[*)] hatten Sie mißverstanden. Ich habe nun aber Bochner doch notiert, da Sie ja schon verschickt haben. Wenn Ihnen nicht sehr viel daran liegt, würde ich mit meiner Versendung gerne noch ein paar Wochen warten. Ich habe noch eine Reihe von in Bälde erscheinenden Arbeiten und Rezensionen ausstehen und möchte gern die doppelte Mühe sparen.

Ich habe 80 Separata erhalten, während meine Liste 95 Namen enthält. Ich selbst bin zufrieden, wenn ich nur ein Exemplar für mich zurückbehalte, macht 96, von denen mir also 16 fehlen würden. Ich könnte ohne Schaden noch 6 weglassen. Wenn Sie mir also noch 10 Abdrucke schicken könnten, wäre ich Ihnen recht dankbar, aber auch für jede Anzahl $\leqq 10$.

Über die minimalen Zerfällungskörper der Quaternionengruppe habe ich jetzt in Leipzig und Kiel einen kleinen Vortrag gehalten und dabei natürlich auch Ihren Namen samt dem Beweis mit $2^{2^k}+1$ gebührend gewürdigt. Das Thema ist für solch' kleineren Vortrag vor einem nicht typisch–algebraisch–arithmetisch geschulten Kreis recht dankbar. Besonders die Schursche Idee mit $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{2^r-1}=(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)\cdots(1+\varepsilon^{2^{r-1}})$ wurde allerseits angestaunt und höchst originell befunden.

Mit freundlichen Grüßen

Ihr H. Hasse.

[*)] Versicherungsmathematiker in Dresden, der aber auch in Analysis und Algebra interessiert ist. Ich habe diesen Namen, sowie auch Ludwig (Dresden) inzwischen gestrichen, dagegen noch Kapferer und Ostrowski aufgenommen

1.9 07.07.1929, Brauer an Hasse

Warnemünde, d. 7. VII. 29.

Sehr geehrter Herr Professor,

Beiliegend schicke ich Ihnen einen Sonderabdruck; ich möchte Ihnen bei dieser Gelegenheit aufschreiben, was ich über Gruppenringe vom Standpunkt der Theorie der hyperkomplexen Zahlen weiß.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe der Ordnung g; K ein Körper von der Charakteristik 0; Γ sei der aus $\mathfrak{G}$ mit Hilfe von Koeffizienten aus K gebildete Gruppenring. Zugleich bedeute $\mathfrak{G}$ auch die reguläre Darstellung der Gruppe und Γ die daraus hervorgehende Darstellung des Ringes.

Als System hyperkomplexer Größen über K ist Γ halbeinfach (äquivalent mit dem Satz von der vollständigen Reduzibilität). Zerlegt man die Darstellung $\mathfrak{G}$ und damit auch Γ in K in irreduzible Bestandteile, so stellen diese Bestandteile die einfachen invarianten Teilsysteme, aus denen sich Γ zusammensetzt, einstufig isomorph dar. Die erste Frage ist also: Wie findet man die in K irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{G}$? Nach Schur (Berl. Ber. 1906) suche man einen (im absoluten Sinn) einfachen Charakter χ von $\mathfrak{G}$; der Grad sei f. Die algebraisch zu χ in bezug auf K konjugierten Charaktere seien $\chi_1 (= \chi)$, χ_2, …, χ_ℓ. Dann gibt es eine durch χ und K eindeutig bestimmte ganze rationale positive Zahl m, so daß die Darstellung mit dem Charakter

$$m(\chi_1 + \chi_2 + \ldots + \chi_\ell)$$

sich in K rational schreiben läßt, sie ist in K irreduzibel. Läßt man χ alle ~~(nicht algebraisch konjugierten)~~ einfachen Charaktere durchlaufen, so erhält man so alle in K irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{G}$ und damit von Γ, alg. konjugierte Charaktere liefern dabei natürlich dieselbe Darstellung. m heißt nach Schur der Index des Charakters χ in bezug auf K, m ist ein Teiler des Grades f.

Die eben erwähnte in K rationale Darstellung hat den Grad $m \cdot \ell \cdot f$, das zugehörige invariante Teilsystem A hat die Ordnung[*] $\ell \cdot f^2$ in bezug auf K. — Das Zentrum von A ist isomorph zum Körper $K(\chi)$, hat also den Grad ℓ in bezug auf K; in bezug auf sein Zentrum hat also A noch die Ordnung f^2.

Ist die zu χ gehörige Darstellung von $\mathfrak{G}$ etwa $\mathfrak{F}$ und bedeutet Φ die Gesamtheit aller linearen Verbindungen von Matrizen von $\mathfrak{F}$ mit Koeffizienten aus K, so ist Φ zu A einstufig isomorph[†]. Nach Wedderburn kann man das einfache System A auffassen als das System aller Matrizen eines Grades k mit Koeffizienten aus einem Schiefkörper Δ. Als weitere Fragen erhält man mithin: 2) Wie bestimmt man k? 3) Wie bestimmt man Δ?

Zu 2) In den alten Bezeichnungen ist einfach $k = \frac{f}{m}$; Δ hat die Ordnung $m^2\ell$ in bezug auf K[‡], die Ordnung m^2 in bezug auf sein Zentrum, das zum Zentrum von A, d. h. zu $K(\chi)$ isormorph ist.

Die Bestimmung von k kommt also auf die Bestimmung des Index' eines Charakters χ in bezug auf K heraus. Nach Schur (a. a. O.) kann man m auch folgendermaßen deuten: Die zu χ gehörige irreduzible Darstellung $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{G}$ läßt sich in Körpern vom Grade $m \cdot \ell$ über K rational schreiben; kann man umgekehrt $\mathfrak{F}$ in einem Körper vom Grad t über K rational schreiben, so muß t durch $m \cdot \ell$ teilbar sein. Bei Adjunktion des Charakters zum Grundkörper ändert sich der Index m nicht, man kann sich also auf den Fall $\ell = 1$ (d. h. ja χ in K enthalten) beschränken. — Nach dem früher gesagten ist die Berechnung von m natürlich möglich, wenn man eine gegebene Gruppe linearer Substitutionen in einem gegebenen Körper K in irreduzible Bestandteile zerlegen kann. — Schur gibt ferner noch Beziehungen zwischen m und den charakteristischen Wurzeln der Elemente von $\mathfrak{F}$; zwischen m und dem Index (in diesem Sinne) bei Untergruppen. Er zeigt, daß $m = f$ nur bei gewissen auflösbaren Gruppen möglich ist[§]; nach dem oben gesagten bedeutet das, daß ~~Δ die Ordnung~~ $k = 1$, also A selbst ein Schiefkörper ist. Schließlich zeigt Schur noch, daß, wenn K der Körper der g–ten Einheitswurzeln ist und $\mathfrak{G}$ auflösbar ist, $m = 1$ wird. (Es be-

[*] deutlicher Rang; Rang ist aber leider z. T. in anderer Bedeutung üblich

[†] Im absoluten Sinn enthält $\mathfrak{F}$ zwar nur f^2 linear unabhängige Elemente. Da aber für $\ell \cdot m > 1$ $\mathfrak{F}$ in K nicht rational darstellbar ist, kann es natürlich in bezug auf K mehr linear unabhängige Elemente enthalten

[‡] $k^2 \cdot m^2\ell = \frac{f^2}{m^2} \cdot m^2\ell = f^2 \cdot \ell$; das ist wirklich die Ordnung von A.

[§] In einer weiter unten genannten Arbeit zeige ich gelegentlich, daß für jede vorgebene Zahl f bei geeigneter Wahl von $\mathfrak{G}$ der Fall $m = f$ wirklich eintritt.

steht die Vermutung, daß in bezug auf den Körper der g–ten Einheitswurzeln stets $m = 1$ ist.) $m = 1$ bedeutet nach dem oben gesagten, daß Δ von der Ordnung 1 in bezug auf sein Zentrum, also Δ selbst ein Körper ist. — Vollständig erledigen kann man den Fall, daß K der Körper der reellen Zahlen ist, hier kann man m, das nur 1 oder 2 sein kann, explizit durch χ ausdrücken. (Frobenius und Schur, Berl. Ber. 1906) Speiser hat gezeigt: Ist χ reell und f ungerade, so ist in bezug auf jedes K stets $m = 1$ (Speiser, Math. Zeitschr. 5). Ein anderer Speiserscher Satz läßt sich dahin verallgemeinern, daß für reelles χ und gerades f stets m eine Potenz von 2 ist, $m = 2^\mu$ $(\mu \geqq 0)$. Schließlich habe ich noch Beziehungen zwischen m und Invariantenanzahlen der Gruppe $\mathfrak{F}$ gegeben und auch noch einige weitere Sätze über m. (Berl. Ber. 1926, Math. Zeitschr. 28 und eine demnächst erscheinende Arbeit in der Math. Zeitschr.) — Ältere Burnsidesche Untersuchungen (London Proc. $^{1905}/_6$) sind durch die Schursche Arbeit überholt. Erwähnt sei noch, daß die auf der vorigen Seite genannten Körper vom Grad $m \cdot \ell$, in denen sich $\mathfrak{F}$ rational darstellen läßt, dadurch gekennzeichnet werden können, daß sie zu maximalen das Zentrum enthaltenden Teilkörpern des Schiefkörpers Δ isomorph sind. Ähnliches gilt auch, wenn $t > m\ell$ ist. (Minimale Zerfällungskörper)

Zu 3) Die Gruppe $\mathfrak{F}$ sei in dem Körper $Z(\vartheta)$ vom Grade r über Z rational, Z sei dabei ein χ enthaltender Körper, etwa $K(\chi) = Z$.

Konjugierten in bezug auf Z seien $\vartheta_1 (= \vartheta)$, $\vartheta_2, \ldots, \vartheta_r$; die algebraisch zu $\mathfrak{F}$ konjugierten Gruppen seien $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_r$. Sie sind alle ähnlich, da sie denselben Charakter haben. Es sei etwa

$$\mathfrak{F}_\alpha P_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta}\mathfrak{F}_\beta$$

Die Matrizen $P_{\alpha\beta}$ kann man in $Z(\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta)$ rational voraussetzen; man darf ferner annehmen, daß bei einer Permutation der Galoisschen Gruppe von $Z(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_r)$ in bezug auf Z, bei der ϑ_α in ϑ_γ, ϑ_β in ϑ_δ übergeht, gerade $P_{\alpha\beta}$ in $P_{\gamma\delta}$ übergeht. Die $P_{\alpha\beta}$ sind eindeutig bestimmt bis auf Zahlenfaktoren, die in entsprechender Weise algebraisch konjugiert sein müssen. Da auch $P_{\alpha\beta}P_{\beta\gamma}$ ebenso wie $P_{\alpha\gamma}$ die Gruppe $\mathfrak{F}_\alpha$ in $\mathfrak{F}_\gamma$ transformiert, folgt

$$P_{\alpha\beta}P_{\beta\gamma} = c_{\alpha\beta\gamma}P_{\alpha\gamma}$$

Die r^3 Zahlen $c_{\alpha\beta\gamma}$ heißen das Faktorensystem von $\mathfrak{F}$ (implizit bei Speiser Math. Zeitschr. 5, explizit bei Schur, ebenda; allerdings nur für den Fall, daß

$Z(\vartheta)$ ein Normalkörper sei). Ebenso wie die $P_{\alpha\beta}$ sind auch die $c_{\alpha\beta\gamma}$ nicht völlig eindeutig festgelegt, in diesem Sinne gleichberechtigte Systeme heißen assoziiert. Man kann dann auch in nahe liegender Weise definieren, wann zwei Faktorensysteme, die zu verschiedenen Körpern $Z(\vartheta)$ und $Z(\eta)$ gehören, als assoziiert zu gelten haben.

Jetzt sei eine Darstellung¶) von $\mathfrak{F}$ in einem Körper vom Grade $m \cdot \ell$ über K, also vom Grade m über $Z = K(\chi)$ bekannt. Dann kann man das zugehörige Faktorensystem wirklich bestimmen, es sei $c_{\alpha\beta\gamma}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, m)$. Man bilde alle Matrizen vom Grade m

$$\left(c_{\kappa\lambda 1}\ell_{\kappa\lambda}\right) = D\,, \quad (\kappa \text{ Zeilen}-,\ \lambda \text{ Spaltenindex}, \quad \kappa, \lambda = 1, \ldots, m)$$

dabei sei $\ell_{\kappa 2}$ ein beliebiges System von m^2 Zahlen, das nur entsprechenden „Konjugiertheitsbedingungen" zu genügen hat, wie sie oben bei den Matrizen $+++$ $P_{\alpha\beta}$ auftraten. (also $\ell_{\alpha\beta} < Z(\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta)$; $\ell_{\alpha\beta}$ geht in $\ell_{\gamma\delta}$ über, wenn ...) Die Gesamtheit aller Matrizen D bildet eine einstufig isomorphe Darstellung des Schiefkörpers Δ. Damit ist Δ bestimmt.

Ich hoffe, damit gezeigt zu haben, daß die betreffenden Fragen gerade auf das herauskommen, was man (nicht in jeder Beziehung glücklich) arithmetische Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen nennt. Die darauf bezüglichen Untersuchungen sind nun nicht nur auf endliche Gruppen beschränkt, beim Gruppenbegriff braucht man hier ferner die eindeutige Auflösbarkeit nicht zu fordern.‖) Sehr viel von dem Gesagten gilt dann auch für unendliche Gruppen, bezw. für beliebige Systeme hyperkomplexer Größen von endlicher Ordnung über dem Grundkörper. Läßt man auch unendliche Gruppen zu, so kann man die Gesamtheit aller Faktorensysteme durch Eigenschaften charakterisieren. Welche Bedingungen ein Faktorensystem erfüllen muß, damit es schon bei einer endlichen Gruppe auftritt, kann ich nicht sagen. Die auf die Aufstellung aller Faktorensysteme zu einem gegebenen Körper Z bezüglichen Fragen hängen übrigens eng mit Spezialfällen der algebraischen Frage zusammen:

Gegeben ist ein Körper Ω und ein Normalkörper $\Omega(\eta)$ über Ω, die Galoissche Gruppe sei $\mathfrak{H}$. Ferner ist eine Gruppe $\mathfrak{K}$ von endlicher Ordnung

¶) Darstellung von $\mathfrak{F}$ heißt hier genauer: Eine zu $\mathfrak{F}$ ähnliche Gruppe. In demselben Sinne gemeint ist: Eine Gruppe linearer Substitutionen läßt sich in einem Körper rational darstellen.

‖) Schur American Trans. 1909

gegeben. Kann man $\Omega(\eta)$ durch Adjunktion zu einem Normalkörper mit der Gruppe $\mathfrak{K}$ erweitern? Selbstverständlich muß $\mathfrak{K}$ zu $\mathfrak{H}$ homomorph sein; die Beantwortung der Frage hängt natürlich i. a. nicht nur von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ ab.

Zum Schluß noch einige Bemerkungen über den Fall, daß K die Charakteristik p hat; $\mathfrak{G}$ sei wieder von der Ordnung g. Hier ist Γ nicht immer halbeinfach; es ist dann und nur dann der Fall wenn $g \not\equiv 0 \pmod p$ ist. Für die Anzahl der verschiedenen absolut irreduziblen Bestandteile gilt hier, daß sie gleich der Anzahl *der* Klassen konjugierter Elemente ist, für die die Ordnung der Elemente zu p teilerfremd ist. Der Index m ist hier stets 1, das hängt natürlich eng mit dem Wedderburnschen Satz über endliche Schiefkörper zusammen.

Ich hoffe, mich einigermaßen verständlich ausgedrückt zu haben. Das Ganze ist mir während des Schreibens länger und damit unübersichtlicher geworden, als ich eigentlich geplant hatte; ich hoffe, daß es für sie trotzdem von Interesse ist.

Mit den besten Grüßen

Ihr

Richard Brauer.

1.10 20.07.1929, Hasse an Brauer, Postkarte

Halle, 20. 7. 29.

(Postkarte)

Lieber Herr Brauer!

Ich möchte Ihnen noch einmal sehr herzlich für Ihre wunderbar klaren Ausführungen danken. Sie enthalten in der Tat alles, was ich auf diesem Gebiet wissen wollte, und ich sehe nun in großen Zügen völlig klar. Die Einzelheiten wollen wir ja dann im Winter im Seminar behandeln. Ich studiere sie daher jetzt schon an Hand der Literatur. Obwohl ja die Schursche Arbeit in Berl. Ber. 1906 „Arithm. Unters. ü. endl. Gruppen" durch die in den Trans. Am. Math. Soc. 1909 „Beitr. z. Th. d. Gr. lin. hom. Subst." im wesentlichen überholt ist, so regt es mich doch auf, daß ich eine Stelle in der ersteren nicht verstehen kann, und ich wäre Ihnen sehr dankbar, wenn Sie mir da helfen könnten. Ich meine p. 169 Mitte: Dort wird geschlossen, daß alle $r_k \neq 0$ einander gleich sein müssen, und dann, daß die η_k konjugiert sein müssen. Ich sehe zunächst nur, daß die $r_k f_k \neq 0$ einander gleich sein müssen, und daß die $\frac{\eta_k}{f_k}$ zueinander konjugiert sein müssen. Von da an kann ich nicht weiter. — Meine Bitte betr. Ihre Separata bezieht sich auch auf Ihre Arbeit in Zeitschr. 28, natürlich nur sofern Sie noch gut einige Exemplare entbehren können, ev. auch nur gegen Rückgabe. – Im voraus besten Dank und freundliche Grüße

Ihr H. Hasse.

1.11 24.07.1929, Brauer an Hasse

Warnemünde, d. 24. 7. 29

Sehr geehrter Herr Professor!

Für Ihre Karten* besten Dank. Die Separata habe ich Ihnen inzwischen übersandt und habe die ältere Arbeit auch gleich beigelegt. Ich lese im nächsten Semester eine Vorlesung über Gruppen linearer Substitutionen und hyperkomplexe Zahlen, da will ich auf die Dinge zum Teil eingehen. Ich habe die Absicht, für mich bei der Gelegenheit das Ganze noch einmal auszuarbeiten, da ich glaube, es etwas übersichtlicher und teilweise auch einfacher darstellen zu können, als es in der Arbeit geschehen ist. Ich werde Ihnen dann einen Durchschlag schicken, ich werde aber kaum vor Ende August fertig werden.

Die Stelle bei Schur Berl. Ber. 1906 ist wirklich etwas knapp dargestellt. Man kann so schließen: $\eta_\kappa f_\lambda$ und $\eta_\lambda f_\kappa$ sind konjugiert. Da man die y_R als Unbestimmte nehmen kann, folgt daß die Charaktere $\chi^{(\kappa)} f_\lambda$ und $\chi^{(\lambda)} f_\kappa$ konjugiert sind. Der zu $\chi^{(\kappa)}$ entsprechend konjugierte Charakter sei $\chi^{(\mu)}$; dann ist $\chi^{(\kappa)} f_\lambda$ zu $\chi^{(\mu)} f_\lambda$ konjugiert, also

$$\chi^{(\mu)} f_\lambda = \chi^{(\lambda)} f_\kappa.$$

Wegen der eindeutigen Darstellung einees Charakters durch die einfachen Charaktere folgt $f_\kappa = f_\lambda$ und $\chi^{(\mu)} = \chi^{(\lambda)}$, und daraus ergibt sich dann das Behauptete.

Mit den herzlichsten Grüssen
Ihr
Richard Brauer

1.12 26.10.1929, Brauer an Hasse

Königsberg, d. 26. X. 29

Sehr geehrter Herr Professor,

Beiligend schicke ich Ihnen einen Durchschlag einer Ausarbeitung, die ich für Vorlesungszwecke gemacht habe und die vielleicht für Sie Interesse hat. Die Fertigstellung hat sich durch allerhand widrige Umstände verzögert; und jetzt fehlt noch ein großer Teil. Da aber das Semester schon sehr nahe ist, weiß ich nicht wann ich das Ganze fertig bekomme und da schicke ich es lieber so.

Teil I behandelt Gruppen linearer Substitutionen im allgemeinen. Wenn auch die Beweise im einzelnen anders sind als in der Frobenius-Schurschen Arbeit, beruht auch hier alles auf einem einfachen von Schur herrührenden Hilfssatz. Die Änderungen sind zum Teil dadurch bedingt, daß allgemeinere Körper als Grundkörper zugelassen werden. Andererseits bekommt man so, wie mir scheint, die Sätze schneller auf einmal heraus. Will man nur die Frobenius-Schurschen Ergebnisse herausbekommen, dann ist das durchgeführte Verfahren nicht einfacher aber auch nicht komplizierter als die Frobenius-Schursche Methode. Es steht in diesem Teil auch eine ganze Menge Sachen, die für das spätere entbehrlich sind.

Im zweiten Teil wird dann die Schursche Theorie und danach der Inhalt meiner Arbeit aus der Math. Zeitschr. 28 behandelt, das letztere in etwas vereinfachter Form und gleich so, wie es für die spätere Anwendung zweckmäßig ist. II13 ist noch nicht ausgeführt, da der Beweis im wesentlichen so bleibt wie in meiner Arbeit. Ansonsten kann ich diese Dinge jetzt in einen anderen Zusammenhang bringen; ich habe das aber noch nicht ausgearbeitet. Ansonsten fehlt auch noch die Ausführung der Beweis zu II14, der Inhalt ist aber für das spätere überflüssig.

Der dritte Teil besteht vorläufig nur aus ganz kurzen Notizen, von denen ich hoffe, daß sie einigermaßen verständlich sind. Es handelt sich um die Anwendung auf hyperkomplexe Größen. Ich gebe immer nur kurz an, wie die einzelnen Stellen in meiner Arbeit zu ändern sind.

In dem Ganzen finden sich vermutlich viele Schreibfehler; ich bitte das zu entschuldigen.

Mit den besten Grüßen

Ihr

sehr ergebener

R. Brauer.

1.13 16.03.1930, Hasse an Brauer

Dr. H. Hasse
Halle (Saale)
Kuhntstr. 17

16. 3. 30

Lieber Herr Brauer!

In diesen Ferien bin ich endlich dazu gekommen, Ihre mir liebenswürdigerweise zugesandte Vorlesung über Darstellungstheorie ganz genau zu lesen, und auch Ihre beiden damit zusammenhängenden Zeitschriftarbeiten. Ich bin von allem aufs Höchste entzückt und möchte Ihnen gerne sagen, *welche* Freude ich an Ihren schönen Resultaten und an Ihrer abgerundeten Darstellung gefunden habe. Ich darf die Bitte aussprechen, daß Sie mir eine eventuelle Vervollständigung Ihrer Ausarbeitung (Teil II Schluß und Teil III) ebenfalls in die Hand geben.

In unserem Seminar sind wir leider doch nicht so weit gekommen. Wir hatten die Artin-Arbeiten für die Zeit *vor* Weihnachten vorgesehen, und die Darstellungstheorie für die Zeit *nach* Weihnachten. Doch sind wir mit den Artin-Arbeiten erst zu Semesterschluß fertig geworden.

Nun will ich aber in meinem ersten Marburger Seminar mit der Darstellungstheorie ab ovo beginnen, und dabei werden wir uns an Ihrer vortrefflichen Ausarbeitung orientieren.

Ich selbst habe mir in letzter Zeit einiges zur hyperkomplexen Arithmetik überlegt. Bei der Beschäftigung mit dem Speiserschen Ansatz wurde ich darauf geführt, diesem in der vorliegenden Form recht unbeholfenen und komplizierten Ansatz dadurch auf die Beine zu helfen, daß ich die Henselschen Methoden heranziehe, – mit überraschendem Erfolg. Die $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen haben vor den Restsystemen mod $\mathfrak{p}^m$ den Vorteil, daß sie einen *Körper* bilden, daß also die Struktursätze von Wedderburn anwendbar werden, und man nicht die Artinsche Erweiterung dieser Struktursätze braucht.

Ist A ein einfaches System, k sein Zentrum, das ich als algebraischen Zahlkörper voraussetze, und ist $\wp$ ein Primideal aus k, so erweitere ich k

zum Körper $\overline{k}$ der $\wp$-adischen Zahlen und betrachte neben A das System $\overline{A}$ mit derselben Basis über dem neuen Koeffizientenkörper $\overline{k}$.

Man sieht sofort, *daß* $\overline{A}$ *einfach über* $\overline{k}$ *als Zentrum ist.* In dieser simplen Feststellung liegt der wahre und einfache Grund für die folgenden beiden Tatsachen: 1.) In $\wp$ geht *stets* nur *ein* zweiseitiges Primideal $\mathfrak{p}$ aus A auf (Brandt). 2.) Das Rechnen mit den zweiseitigen Idealen aus A ist kommutativ (Artin). Man gelangt dazu und überhaupt zum vollständigen, sehr durchsichtigen Aufbau der gesamten Arithmetik in A, wenn man zunächst die Arithmetik in $\overline{A}$ aufbaut und dann auf bekannten Methoden die Resultate für die einzelnen $\overline{A} = \overline{A}_\wp$ zusammenfügt (Henselsche Grundidee).

Die Arithmetik in $\overline{A}$ behandelt man so: nach Wedderburn ist $\overline{A}$ volles Matrizensystem aus einem Schiefkörper $\overline{S}$ über $\overline{k}$ als Zentrum. Man stellt nun mittels Henselscher Methoden (Zeitschr. 2.) und zusätzlichen Überlegungen fest, daß $\overline{S}$ folgende algebraische und arithmetische Struktur hat:

Das System *aller* ganzen Elemente aus $\overline{S}$ bildet eine Ordnung. Es gibt also in $\overline{S}$ nur eine einzige Maximalordnung.

In dieser Ordnung gibt es nur ein einziges Primideal $\mathfrak{p}$, bestehend aus allen Elementen, deren Norm durch $\wp$ teilbar ist. Dieses Primideal ist Hauptideal: $\mathfrak{p} = (\pi)$. *Alle* Ideale sind Potenzen $\mathfrak{p}^\nu$ von $\mathfrak{p}$. [1]

$\overline{S}$ besteht aus der Gesamtheit aller $\mathfrak{p}$-adischen Reihen $\sum_{\nu=a}^{\infty} \gamma_\nu \pi^\nu$, wo γ_ν als Repräsentanten eines festen Restsystems mod $\mathfrak{p}$ gewählt werden können.

Bezeichnet q die Anzahl der Reste mod $\wp$ in $\overline{k}$, so ist die Anzahl der Reste mod $\mathfrak{p}$ in $\overline{S}$] eine Potenz q^f. Ferner sei $\wp = \mathfrak{p}^e$.

Dann gilt[2] $e = f = n$, wo n der Grad von $\overline{S}$ über $\overline{k}$ ist, also n^2 der Rang von $\overline{S}$ bezüglich $\overline{k}$. [3]

In $\overline{S}$ gibt es eine primitive $(q^n - 1)$te Einheitswurzel ω, deren Potenzen $1, \omega, \ldots, \omega^{q^n-2}$ ein primes Restsystem mod $\mathfrak{q}$ bilden. ω ist bis auf Transformierte eindeutig bestimmt (bekannter allgemeiner Satz!).

Das Primelement π läßt sich, wenn ω fest gewählt ist, so normieren daß gilt: $\pi\omega = \omega^{q^r}\pi$. Dabei ist $(r, n) = 1$. (Transformation mit π bewirkt also einen primitiven Automorphismus des maximalen Teilkörpers $\overline{k}(\omega)$ von $\overline{S}$.

Es ist dann ferner $\pi^n = p$ ein Primelement zu $\wp$ aus $\overline{k}$, also $\wp = (p)$ und also $\overline{S} = \overline{k}(\omega, \pi)$ *mit den Relationen:*

$$\omega^{q^n-1} = 1, \quad \pi\omega = \omega^{q^r}\pi, \quad \pi^n = p.$$

[1]Jedes Ideal ist zweiseitig.

[2]Erst jetzt wird ausgenutzt, daß $\overline{k}$ das <u>Zentrum</u> von $\overline{S}$ ist.

[3][Zeile nicht auf Kopie.]

($\overline{S}$ ist also ein zyklisches Dicksonsches System.)

Als invarianten Bestimmungsstücken für $\overline{S}$ sind allein n und r anzusehen. Denn π kann, unter Einhaltung der Bedingung $\pi\omega = \omega^{q^r}\pi$, so gewählt werden, daß $\pi^n = p$ ein *beliebiges* Primelement aus $\overline{k}$ ist.

r ist wirklich invariant durch $\overline{S}$ bestimmt: das Restsystem mod $\mathfrak{p}$ erfährt bei Transformation mit einem beliebigen Primelement den Automorphismus „Potenzierung mit q^r".

Zu jedem Grad n und Exponenten r mit $(r,n) = 1$ gibt es in der Tat einen Schiefkörper $\overline{S}$.

Man erhält ihn durch die absolut irreduzible Darstellung im Zerfällungskörper $\overline{k}(\widehat{\omega})$, wo $\widehat{\omega}$ eine primitive (q^n-1)-te Einheitswurzel über $\overline{k}$ (deren Grad bekanntlich n ist):

$$\omega = \begin{pmatrix} \widehat{\omega} & & & \\ & \widehat{\omega}' & & \\ & & \ddots & \\ & & & \widehat{\omega}^{(n-1)} \end{pmatrix}, \qquad \pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ p & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei bezeichnet $\widehat{\omega}'$ die Anwendung des Automorphismus $\widehat{\omega} \longmapsto \widehat{\omega}^{q^r}$ von $k(\widehat{\omega})$. p ist ein willkürlich gewähltes Primelement aus $\overline{k}$, also $\wp = (p)$.

Amüsant für Sie dürfte der Nachweis der Nullteilerfreiheit des so definierten Systems $\overline{S} = \overline{k}(\omega,\pi)$ sein, das, wie man sofort sieht, den obigen drei Relationen genügt: $\omega^{q^n-1} = 1$, $\pi\omega = \omega'\pi$, $\pi^n = p$.

Das allgemeine Element α von $\overline{S}$ hat die Form

$$\alpha = \sum_{\mu,\nu=0}^{n-1} a_{\mu\nu}\omega^\mu\pi^\nu \quad (a_{\mu\nu} \text{ aus } \overline{k}).$$

Setzt man

$$\widehat{\alpha}_\nu = \sum_{\mu=0}^{n-1} a_{\mu\nu}\widehat{\omega}^\mu,$$

so wird dies allgemeine Element, als Matrix geschrieben:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \widehat{\alpha}_0 & \widehat{\alpha}_1 & \cdots & \cdots & \widehat{\alpha}_{n-1} \\ p\widehat{\alpha}'_{n-1} & \widehat{\alpha}'_0 & \widehat{\alpha}'_1 & \cdots & \widehat{\alpha}'_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \widehat{\alpha}_1^{(n-2)} \\ p\widehat{\alpha}_1^{(n-1)} & \cdots & \cdots & p\widehat{\alpha}_{n-1}^{(n-1)} & \widehat{\alpha}_0^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Es ist zu zeigen, daß die Determinante $|\alpha| \neq 0$ ist, wenn nicht alle $a_{\mu\nu} = 0$ sind. Ohne Einschränkung können andernfalls die $a_{\mu\nu}$ als ganze, zueinander teilerfremde Elemente aus $\overline{k}$ angenommen werden. Dann ist zunächst

$$|\alpha| \equiv \widehat{\alpha}_0 \widehat{\alpha}'_0 \cdots \widehat{\alpha}_0^{(n-1)} = N(\widehat{\alpha}_0) \bmod \wp.$$

Aus $|\alpha| = 0$ folgt also $N(\widehat{\alpha}_0) \equiv 0 \bmod \wp$, und daraus weiter, weil $\wp$ in $\overline{k}(\widehat{\omega})$ Primideal bleibt, $\widehat{\alpha}_0 \equiv 0 \bmod \wp$. Weil aber $1, \widehat{\omega}, \ldots, \widehat{\omega}^{n-1}$ eine Basis für die ganzen Größen aus $\overline{k}(\widehat{\omega})$ bildet, folgt, daß alle $a_{\mu 0} \equiv 0 \bmod \wp$ sind.

Setzt man demgemäß $\widehat{\alpha}_0 = p\widehat{\beta}_0$ mit ganzem $\widehat{\beta}_0$, und bringt die erste Zeile in der Matrix von α an die letzte Stelle, so wird

$$|\alpha| = (-1)^{n-1} p \begin{vmatrix} \widehat{\alpha}_1 & \widehat{\alpha}_2 & \cdots & \widehat{\beta}_0 \\ p\widehat{\beta}'_0 & \widehat{\alpha}'_1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ p\widehat{\alpha}_2^{(n-1)} & \cdots & p\widehat{\beta}_0^{(n-1)} & \widehat{\alpha}_1^{(n-1)} \end{vmatrix} \equiv (-1)^{n-1} p N(\widehat{\alpha}_1) \bmod \wp^2.$$

Aus $|\alpha| = 0$ folgt also weiter $N(\widehat{\alpha}_1) \equiv 0 \bmod \wp$, $\widehat{\alpha}_1 \equiv 0 \bmod \wp$, alle $a_{\mu 1} \equiv 0 \bmod \wp$.

So fortfahrend sieht man, daß aus $|\alpha| = 0$ folgt: alle $a_{\mu\nu} \equiv 0 \bmod \wp$, gegen die zulässige Annahme, daß die $a_{\mu\nu}$ ganze, teilerfremde Elemente seien.

Es war ja zu vermuten, daß als Analogon der *Größen*eigenschaften (Kongruenzen mod $\wp_\infty$!), mittels deren die Nullteilerfreiheit der Quaternionen bei reellem Zentrum folgt, hier *Kongruenz*eigenschaften ausschlaggebend sind.

Das Resultat ist, daß es über einem $\wp$-adischen Zahlkörper als Zentrum zu jedem r und n genau $\varphi(n)$ „konjugierte“ Schiefkörper gibt, ganz analog wie es zum $\wp_\infty$-adischen (d.h. dem reellen) Zahlkörper zu dem aus algebraischen Gründen einzig möglichen Grad 2 genau $\varphi(2) = 1$ Schiefkörper gibt.

Im Zerfällungskörper $\overline{k}(\sqrt[n]{p})$ lauten die erzeugenden Relationen, für die beiden Elemente ω und $\pi/\sqrt[n]{p} = \tau$ geschrieben:

$$\omega^{q^n-1} = 1, \quad \tau\omega\tau^{-1} = \omega^{q^r}, \quad \tau^n = 1.$$

Das sind aber die Relationen einer endlichen, zweistufig metabelschen Gruppe G vom [Typus]: $\{\omega\}$ ist zyklischer Normalteiler N von der Ordnung $q^n - 1$; $G = \{N, \tau\}$, wo $\tau^n = 1$ und $\tau N \tau^{-1}$ einen der $\varphi(n)$ Automorphismen der Ordnung n von N bedeutet.

Dieser Typus ist grundsätzlich *anders* als der Quaternionentypus! (Nur ein maximaler Normalteiler; Untergruppen, die *keine* Normalteiler sind!)

Auffällig ist mir noch folgendes, was bei alleiniger Kenntnis des reellen Grundkörpers und seines einzigen Schiefkörpers noch nicht so deutlich hervortritt: Über $\overline{k}$ sind doch algebraische Körper $\overline{K}$ mit nicht-zyklischen (allerdings stets meta-zyklischen!) Gruppen möglich. Dennoch entspringt jeder Schiefkörper über $\overline{k}$ aus einem *zyklischen* Körper $\overline{k}(\omega)$, und sogar aus einem Einheitswurzelkörper mit zu $\wp$ primem Exponenten, m. a. W.: *Ist p_0 eine Primzahl und betreibt man die Darstellungstheorie im p_0-adischen Zahlkörper und seinen Erweiterungskörpern, so sind alle absolut-irreduziblen Darstellungen in gewissen Einheitswurzelkörper von zu p_0 primem Exponenten rational.*

Ich möchte nun fragen, ob Ihnen über dem *rationalen* Körper als Zentrum oder einem gewöhnlichen algebraischen Zahlkörper k als Zentrum ein Schiefkörper $\overline{S}$ bekannt ist, für den es keinen *Abelschen* oder wenigstens keinen *zyklischen* minimalen Zerfällungskörper = maximalen Teilkörper gibt.[4] Ich habe Dicksons recht umfangreiche Kapitel nicht soweit durchgerechnet, um zu wissen, ob die Existenz der dort behandelten Abelschen nicht-zyklischen Typen gewiß ist. – Jedenfalls bin ich jetzt überzeugt, daß man durch Kongruenzbetrachtungen in k (Größenbetrachtungen eingeschlossen) die mit der Klassenkörpertheorie im Zusammenhang stehen, eine Klassenkörpertheorie der Schiefkörper mit k als Zentrum wird aufbauen können.

Ich möchte so gerne mit Ihnen über diese Gedanken sprechen, und am liebsten in Zusammenarbeit mit Ihnen, der Sie auf diesem Gebiet von der

[4] Ist etwa das von Ihnen angedeutete direkte Produkt zweier Quaternionenalgebren in diesem Sinne „nicht zylisch“ ? Ich möchte es fast glauben.

anderen Seite so reiche und vielseitige Erfahrung mitbringen, weiter vordringen. Jedenfalls würde ich mich sehr freuen, einmal Ihre Meinung darüber zu hören.

Sind Sie im Sommer wieder in Königsberg? Im Herbst zur Tagung werde ich jedenfalls dorthin kommen und vielleicht über die vorstehend entwickelten Dinge berichten.

Ich fahre Anfang April in meinen neuen Wirkungskreis nach Marburg. Eine Wohnung habe ich allerdings bisher noch nicht.

Mit herzlichen Grüßen
Ihr H. Hasse.

1.14 18.04.1930, Brauer an Hasse

Königsberg, d. 18.IV.30

Sehr geehrter Herr Professor,

Für Ihren Brief* danke ich Ihnen bestens. Ihre Ausführungen haben mich aufs höchste interessiert, und ich bin Ihnen sehr dankbar, daß Sie mir diesen schönen Aufbau der Arithmetik der hyperkomplexen Zahlen mitgeteilt haben. Besonders interessieren mich auch Ihre Ergebnisse über die Schiefkörper über einem $\wp$-adischen Zahlkörper als Zentrum.

Die von Ihnen gestellte Frage kann ich leider zur Zeit noch nicht beantworten. Ich weiß nicht einmal, ob es Schiefkörper (mit endlichem Rang über ihrem Zentrum) gibt, die keinen Normalkörper als maximalen Teilkörper besitzen. Ich habe früher vergeblich versucht, die Existenz eines solchen Normalkörpers zu beweisen. Jetzt will ich umgekehrt versuchen, ein Beispiel zu konstruieren, bei dem es keinen derartigen Normalkörper gibt. Ich habe hierfür einen neuen Ansatz, dessen Durchführung sich allerdings voraussichtlich ziemlich umständlich gestalten wird.

Auch die andere von Ihnen gestellte Frage, ob es Schiefkörper gibt, die nicht vom Dicksonschen Typ sind (d.h. die keinen zyklischen maximalen Teilkörper haben), weiß ich nicht. Das von mir erwähnte Produkt der beiden Quaternionensysteme scheidet aus, da das Zentrum dabei nicht algebraisch ist. Daß bei Dickson die Existenz eines derartigen Systems gezeigt wird, glaube ich nicht. Ich bin jetzt noch nicht dazu gekommen, mir das alles genauer zu überlegen, da ich in der zweiten Hälfte des März eine Grippe hatte und danach bis jetzt verreist war; das ist auch der Grund, weshalb ich Ihnen so spät antworte.

Ich will jetzt Ihre Ausführungen noch einmal genau durcharbeiten und will mich dann mit den von Ihnen genannten Frage befassen. Sobald ich genaueres weiß, schreibe ich Ihnen dann noch einmal.

Die Ausarbeitung der Vorlesung über hyperkomplexe Größen konnte ich leider aus Zeitmamgel nicht weiter fortsetzen. Ich war auch gezwungen, die ganze Vorlesung anders und zwar elementarer zu halten, als ich gewollt hatte, da ich jüngere Semester als erwartet als Hörer hatte. Trotzdem habe ich immer noch den Wunsch, die Ausarbeitung zu Ende zu bringen. In diesem Fall schicke ich Ihnen dann den Rest.

Hoffentlich haben Sie inzwischen in Marburg Wohnung gefunden und fühlen sich dort recht wohl. Indem ich Ihnen recht frohe Feiertage wünsche

mit den ergebensten Grüßen
Ihr
Richard Brauer.

1.15 03.02.1931, Hasse an Brauer

PROF. DR. HELMUT HASSE

MARBURG–LAHN, den 3. Februar 1931
WEISSENBURGSTR. 22
FERNRUF 404

Lieber Herr Brauer!

Wie ich Ihnen bereits im Sommer erzählte, treiben wir in diesem Jahre in unserem Seminar Darstellungstheorie, und zwar halten wir uns dabei in der Hauptsache an Ihre mir damals freundlichst zur Verfügung gestellte Ausarbeitung. Im Sommersemester haben wir deren ersten Teil ganz absolviert, und jetzt sind wir eifrig beim Studium Ihres zweiten Teils beschäftigt. Gleichzeitig halte ich nebenbei meine Hauptvorlesung über „Algebren“, in der Hauptsache nach Dickson und Artin. Sie werden es begreiflich finden, daß wir bei dieser außerordentlich günstigen Situation mit dem Gedanken spielen, Sie doch auch einmal persönlich hierzuhaben und in Ergänzung zu Ihrer Ausarbeitung über irgendein damit im Zusammenhang stehendes Thema vortragen zu hören. Das klingt bei der Riesenentfernung wie ein Scherz. Doch hoffen wir sehr, daß es Ernst werden kann. Aus besonderen Mitteln sind wir in der Lage, für Ihre Reise hierher — allerdings im bescheidenen Rahmen der 3. Klasse + Zuschlag — sowie für Ihre Unterkunft und Verpflegung hier aufzukommen. Naturgemäß kommt für dieses Projekt nur der Schluß des Semesters in Frage, da Sie mitten heraus sicher nicht wegkommen können. Nun beabsichtigen wir, diesen Semesterschluß über Ihren geplanten Besuch und Vortrag hinausgehend zu einem kleinen ganz gemütlichen „Schiefkörperkongreß“ auszugestalten und werden Einladungen zu Vorträgen über dieses Thema auch an die Noetherin, Deuring, Köthe, Brandt und Archibald (Dickson–Schüler, z. Zt. Göttingen) ergehen lassen, sowie alle Interessierten, wie Artin, Speiser, J. Schur jedenfalls in Kenntnis setzen und um Teilnahme bitten. (Sie alle einzuladen, übersteigt naturgemäß unsere Mittel.) Als Zeitpunkt haben wir die Tage vom 26 – 28 d. Mts in Aussicht genommen, und zwar dachte ich, daß Sie am 26. abends um 18^{h} den Reigen eröffnen sollten (das ist die letzte Stunde meines Seminars, in dem ich Sie eben vor allen

Dingen haben möchte). Sie hätten dann $1\frac{1}{2}$ Stunden Redezeit, während wir den übrigen Rednern am Freitag und Sonnabend nur je 1 Stunde bewilligen wollen, damit man nicht allzuviel angestrengt wird.

Nun bitte, lieber Herr Brauer, überlegen Sie sich die Sache und geben Sie mir recht bald Bescheid. Wir alle hier wären Ihnen von Herzen dankbar und würden uns riesig freuen, wenn Sie unserem Anerbieten Folge leisten könnten.

In der Hoffnung, daß es Ihnen, Ihrer verehrten Gattin und dem Kleinen gut geht, bin ich mit den besten Empfehlungen und Grüßen

Ihr

H. Hasse

1.16 05.02.1931, Brauer an Hasse

Königsberg, d. 5.2.31

Sehr geehrter Herr Professor,

Für Ihre liebenswürdige Einladung*, durch die ich mich sehr geehrt fühle und über die ich mich sehr gefreut habe, danke ich Ihnen herzlich. Ich werde sehr gern nach Marburg kommen und vortragen. Falls es Ihnen recht ist, würde ich als Gegenstand des Vortrages die eine Hälfte meines Vortrages auf dem Königsberger Kongreß in sehr erweiterter Form (und natürlich auch viel ausführlicher) wählen. Man kann aus der E. Noetherschen Galoisschen Theorie, vor allem den Satz von der eindeutigen Zuordnung von Untergruppen und Teilkörpern, herleiten. Das ist vielleicht nicht uninteressant, wenn man an das ganz verschiedenartige Aussehen der Isomorphismengruppen in beiden Fällen denkt. – Oder soll ich lieber über ein anderes Thema sprechen?

Ich habe von Prof. Brandt eine Einladung, in Halle vorzutragen. Falls sich, was ich aber noch nicht weiß, beide Reisen verbinden lassen, würde ich in Marburg am 26.2. nachmittags um 16.^{47}h ankommen; ich denke doch, daß ich dann zur Zeit in Ihrem Seminar sein kann.

Ich freue mich riesig auf Ihren Kongreß; ich bewundere sehr Ihre Tatkraft bei der Veranstaltung.

mit den herzlichsten Grüßen
Ihr sehr ergebener
Richard Brauer.

1.17 06.03.1931, Hasse an Brauer

z.Zt. Allendorf-Werra-Sooden, 6. 3. 31
Schulplatz

Liebe(r) Herr / Fräulein Brauer

Habe soeben den fraglichen Normensatz für *zyklische* Relativkörper bewiesen, und mehr braucht man für die Theorie der zyklischen Divisionsalgebren nicht.

Beste Grüsse
H. Hasse

1.18 24.03.1931, Hasse an Brauer

Prof. Dr. Helmut Hasse

Marburg-Lahn, den 24. März 1931
Weissenburgstr. 22
Fernruf 404

Lieber Herr Brauer!

Ich denke, es wird Sie interessieren zu wissen, dass ich nun auch den letzten noch offenen Punkt in meiner Theorie der Schiefkörper erledigen konnte, den Nachweis der Invarianz meiner Normenrestsymbole auch für zusammengesetzten Grad. Dabei haben sich dann insgesamt folgende Sätze ergeben:

1.) Damit zwei zyklische Algebren (b, Z, S) und (b', Z', S') äquivalent sind (d.h. zum selben Schiefkörper gehören) ist notwendig und hinreichend, dass ihre Invarianten a_p und a'_p mod. 1 kongruent sind für jede Primstelle p des Grundkörpers.

Dabei sind diese Invarianten für eine zyklische Algebra (b, Z, S) folgendermassen erklärt: Das Normenrestsymbol $\left(\frac{b,Z}{p}\right)$ werde als Potenz S^{e_p} der Gruppenerzeugenden S dargestellt. Der Exponent e_p werde durch den Grad n des Körpers dividiert:

$$a_p = e_p : n.$$

Es sei ferner

$$a_p = r_p : m_p, \quad (r_p, m_p) = 1$$

die reduzierte Darstellung der Invarianten.

2.) Das direkte Produkt zweier zyklischer Algebren mit den Invarianten a_p und a'_p ist einer zyklischen Algebra mit den Invarianten $a_p + a'_p$ äquivalent.

3.) Der Index m einer zyklischen Algebra mit den Invarianten a_p fällt mit ihrem Exponenten zusammen und ist das kleinste gemeinsame Multiplum aller reduzierten Nenner m_p.

4.) Für eine zyklische Algebra mit den Invarianten a_p ist ein zyklischer Körper Z dann und nur dann Zerfällungskörper, wenn der Grad n von Z ein Vielfaches des Index m ist, und wenn für jedes p die Anzahl der verschiedenen Primteiler p in Z ein Teiler von $n : m_p$ ist.

5.) Wenn eine einfache Algebra zu einer zyklischen Algebra äquivalent ist, so ist sie selbst zyklisch.

Durch den letzten Satz insbesondere wird die grosse noch offene Frage, *ob jede einfache Algebra zyklisch sei*, zurückgeführt auf die Frage, ob für jede einfache Algebra auch nur ein zyklischer Zerfällungskörper existiert.

„Einfache Algebra“ ist dabei durchweg in bezug auf einen algebraischen Zahlkörper endlichen Grades als Zentrum gemeint.

Vielleicht ist es nicht uninteressant, wenn ich noch vermerke, dass der „Normensatz“, dessen Beweis für zyklische Körper mir unter dem Zwang der Verhältnisse glücklich gelungen war, für nicht-zyklische Körper nicht allgemein stimmt. A. Scholz und ich haben unabhängig voneinander je ein Gegenbeispiel konstruiert, bei dem die absoluten Idealklassen eine Rolle spielen.

Hoffentlich können Sie mit Befriedigung auf Ihre Marburger Reise zurückblicken. Wir haben uns jedenfalls sehr über Ihren Besuch und Ihren so schönen Vortrag gefreut.

Mit herzlichen Grüssen, auch an Ihre verehrte Frau Gemahlin,

stets Ihr
H. Hasse

1.19 27.07.1931, Hasse an Brauer

MATHEMATISCHES SEMINAR
DER UNIVERSITÄT

MARBURG–LAHN, DEN 27. Juli 1931

Weissenburgstr. 22

Lieber Herr Brauer!

Beiliegend schicke ich Ihnen zwei Separata, deren Inhalt Sie wohl in großen Zügen schon kennen. Ich möchte Ihnen im Anschluß daran gerne schreiben, wie die Sachlage nun mit der einzigen noch offenen Frage nach der Zyklizität aller normalen einfachen Algebren steht. Ich glaube nämlich, daß diese Frage jetzt angriffsreif ist, und möchte Ihnen die mir vorschwebende Angriffslinie vorlegen.

Sei A eine normale einfache Algebra über dem Zentrum Ω, von dem ich voraussetze, daß es ein algebraischer Zahlkörper endlichen Grades ist. Geht man für die Primstellen p von Ω zu den p–adischen Erweiterungen A_p und Ω_p über, so gilt in Analogie zu Satz 2 meiner Arbeit:

Damit ein p–adischer über Ω_p zyklischer Körper Z_p Zerfällungskörper (und somit zyklischer Darstellungskörper) für A_p ist, ist notwendig und hinreichend, daß der Grad n_p von Z_p ein Multiplum des Index m_p von A_p ist.

Hiernach ist es leicht, einen zyklischen Körper Z über Ω zu konstruieren, der für alle Primstellen p gleichzeitig Zerfällungskörper für A ist, d. h. natürlich daß jeweils Z_p Zerfällungskörper für A_p ist.

Von der normalen einfachen Algebra $\overline{A} = A_Z$ über $\overline{\Omega} = Z$ weiß man dann, daß in ihr keine Primstelle aus $\overline{\Omega}$ verzweigt ist, d. h. daß die Relativdifferente gleich 1 ist *). Man ist am gewünschten Ziel, wenn man beweisen kann, daß $\overline{A}$ volle Matrixalgebra ist. Das ist für jede $\overline{p}$–adische Erweiterung von $\overline{A}$ der Fall.

*) PS. Das ist nicht ganz so scharf, weil es für die unendlichen Primstellen nichts aussagt.

Sei nun a_i Basis von $\overline{A}$. Dann betrachte ich die Spurenmatrix $\mathrm{sp}(a_i a_k)$ und die zugehörige quadratische Form $\sum_{i,k=1}^{n^2} \mathrm{sp}(a_i a_k) x_i x_k$. Diese transformiert sich kogredient mit Basistransformationen der Algebra $\overline{A}$. Die a_i sind auch eine Basis für jedes $\overline{A}_{\overline{p}}$. Daher gibt es eine Basistransformation in $\overline{A}_{\overline{p}}$, bei der die a_i in ein volles Matrizensystem übergehen, und daher die Spurenmatrix in die Quasidiagonalmatrix $\varepsilon_{i_2 k_1}\,\varepsilon_{i_1 k_2}$ $\quad(i_1,\, i_2 = 1, \ldots, n$ Zeilen; $k_1,\, k_2 = 1, \ldots, n$ Spalten),[1] und obige quadratische Form in die entsprechende Quasidiagonalform. Nach dem Fundamentalprinzip meiner Arbeiten über quadratische Formen in Crelle 152 und 153 gibt es dann auch eine Basistransformation in $\overline{A}$ selbst, bei der die Spurenmatrix in die genannte Quasidiagonalmatrix übergeht. Natürlich wird diese Basistransformation im allgemeinen noch nicht zu einem System von Matrizeneinheiten in $\overline{A}$ führen. Aber es wäre doch denkbar, daß man aus der Existenz einer solchen besonderen Basis e_{ik} $\overline{A}$ als volles Matrizensystem erkennen könnte, etwa mit Zuhilfenahme Ihrer Theorie, indem man zeigt, daß dann die reguläre Darstellung innerhalb $\overline{\Omega}$ in n Darstellungen reduzibel wird. Ich möchte diese Sache zur Überprüfung nach diesem Gesichtspunkt in Ihre kundigen Hände legen. Von mir aus darf ich mir noch die Bemerkung erlauben, daß sich die ganze Frage auch einfach so wenden läßt: Sind die diophantischen Gleichungen, die die Äquivalenz der beliebigen Basis a_i zu einem vollen Matrizeneinheitensystem ausdrücken, innerhalb $\overline{\Omega}$ lösbar, wenn man nur weiß, daß sie in jeder $\overline{p}$–adischen Erweiterung $\overline{\Omega}_{\overline{p}}$ lösbar sind? Was mir so sehr viel Hoffnung auf die Vernünftigkeit und den Erfolg dieser Methode macht, ist, daß diese diophantischen Gleichungen einfach *quadratische*, allerdings inhomogene Gleichungen sind. Es handelt sich um das Analogon zu meinen Transformationsuntersuchungen für quadratische symmetrische Matrizen (quadratische Formen) jetzt für kubische assoziativgesetzliche Tensoren (Koeffizientenwürfel [normaler einfacher] Algebren). In der Hoffnung bald von Ihnen zu hören und mit besten Grüßen an Ihre verehrte Gattin und Sie selbst stets Ihr

H. Hasse

[1] Nicht vollständig lesbare Anmerkung am Rand: $\begin{array}{ll} \varepsilon_{pq} = 1 \ , & p = q \\ \varepsilon_{pq} = 0 \ , & p \neq q \end{array}$

1.20 03.08.1931, Brauer an Hasse

Königsberg, d. 3.8.31

Sehr geehrter Herr Professor,

Für Ihren freundlichen Brief* danke ich Ihnen herzlich. Ich habe Ihnen gegenüber ein sehr schlechtes Gewissen, weil ich Ihnen noch garnicht für Ihren vorigen Brief und insbesondere für die liebenswürdige Übersendung der Photographie gedankt habe. Das kam so, daß ich gerne noch einige Sachen herausbekommen wollte, bevor ich schrieb, das zögerte sich dann so heraus, bis ich merkte, daß ich nicht durchkam.

Ihre Ergebnisse haben mich ungeheuer interessiert. Leider bin ich in den arithmetischen Überlegungen noch nicht genügend drin, als daß ich mich selbst dazu äußern könnte. Ich hoffe aber, mich in diesen Ferien einmal genügend einarbeiten zu können, und ich will dann Ihren Brief noch einmal genau durcharbeiten. Auch zu der Frage, ob aus der Existenz der besonderen Basis folgt, daß $\overline{A}$ volle Matrixalgebra ist, kann ich zur Zeit nichts sagen. Ich hoffe wenigstens so weit zu sein, daß ich alles verstehen kann, wenn Sie selbst die Lücke ausgefüllt haben werden.

Die Arbeit von mir, die Sie freundlicherweise für das Crellesche Journal nehmen wollen, ist von mir aus dem oben angeführten Grunde auch nicht fertig gemacht worden. Ich hoffe, das jetzt nachzuholen und werde sie Ihnen dann schicken.

mit den ergebensten Grüßen
Ihr
Richard Brauer.

1.21 29.10.1931, Brauer an Hasse

Dr. Richard Brauer Königsberg i. Pr., 29. 10.31
Loewestr. 2

Sehr geehrter Herr Professor,

Für die Zusendung Ihrer neuen Arbeit danke ich Ihnen sehr; der Inhalt hat mich sehr interessiert. Man kann aus Ihrem Satz in Verbindung mit den Sätzen Ihrer Arbeit aus den Göttinger Nachrichten schliessen, daß für den Fall eines algebraischen Grundkörpers K die Primzahl 2 im Exponenten und im Index eines Schiefkörpers in derselben Potenz aufgeht. Ist also der Exponent $n = 2$, so muß auch der Index $m = 2$ sein. Dieser Fall (oder $n = m = 1$) liegt speziell immer dann vor, wenn man von einer irreduziblen Gruppe linearer Substitutionen von endlicher Ordnung ausgeht, deren Charakter reell ist. Das Zentrum, d.i. der durch den Charakter erzeugte Körper, ist ein Teilkörper eines Kreisteilungskörpers; daß $n = 1$ oder 2 ist, geht aus meiner Arbeit in den Berl. Ber. 1926 S. 410 hervor. Damit ist gezeigt, daß man zur Darstellung einer Gruppe der genannten Art höchstens eine Quadratwurzel zum Körper des Charakters zu adjungieren braucht

Ich führe den Beweis gleich in allgemeinerer Form, da zugleich daraus hervorgeht, daß der allgemeine Satz $m = n$ bei algebraischem Grundkörper in sehr greifbarer Nähe liegt. 1) Man kann sich auf den Fall beschränken, daß m gleich einer Primzahlpotenz p^μ ist, sowohl beim Beweis von $m = n$ wie beim Nachweis der zyklischen Darstellbarkeit; vergl. §1 der kürzeren beiliegenden Arbeiten. 2) Ist beim Schiefkörper A etwa $n = p^\nu$, $m = p^\mu$ und $\nu < \mu$, so kann man ohne Einschränkung $\nu = 1$ annehmen. Denn im andern Fall bilde man die $p^{\nu-1}$-te Potenz von A im Sinn des eben genannten §1; es sei dies der Schiefkörper B. Sein Exponent ist p; ist sein Index größer als p, so nehme man B an Stelle von A. Hat B den Index p, so sei K' Zerfällungskörper p-ten Grades von B. Verwendet man K' als Grundkörper, so hat $A_{K'}$ den Index p^μ oder $p^{\mu-1}$, der Exponent ist jedenfalls ein Teiler von $p^{\nu-1}$, da $B_{K'}$ (die $p^{\nu-1}$-te Potenz des fraglichen Systems) den Exponenten 1 hat. 1 kann der Exponent von $A_{K'}$ nicht sein, weil der Index nicht 1 ist. Auch bei $A_{K'}$ ist der Exponent kleiner als der Index. Behandelt man $A_{K'}$ an Stelle von A und fährt so fort, so kommt man schließlich einmal zu Fall: Exponent p, Index p^μ, $\mu > 1$. 3) Ω

sei ein Normalkörper, der Zerfällungskörper ist, sein Grad sei genau durch p^t teilbar. Gehört K^* als Teilkörper von Ω zu einer Sylowschen Untergruppe der Galoisschen Gruppe, so nehme man K^* als Grundkörper und betrachte A_{K^*}. Da der Relativgrad von K^* über K zu p prim ist, muß der Index p^t sein. Der Exponent ist p; denn er könnte höchstens 1 geworden sein, was nicht möglich ist. Ω hat über K^* den Grad p^t, die Galoissche Gruppe ist also auflösbar. Man adjungiere zu K^* nacheinander Größen p-ten Grades, bis man zu Ω kommt. Der Index wird bei derartiger schrittweiser Abänderung des Grundkörpers immer ungeändert bleiben oder auf den p-ten Teil reduziert werden; einmal muß er p^2 werden; der Exponent muß p geblieben sein.

Wenn also $m \neq n$ sein kann, so darf man folgende Annahmen machen: Der Exponent ist p, der Index p^2; es gibt Zerfällungskörper vom Grad p^2 deren Galoissche Gruppe eine Potenz von p zur Ordnung hat. Es kommen also nur Untergruppen der Sylowschen Gruppe der Symmetrischen Gruppe in p^2 Elementen in Frage. D.i. eine Gruppe der Ordnung p^{p+1}, die ine inv. Abelsche Untergruppe der Ordnung p^p besitzt und zwar vom Typ $(p, p, \ldots, p)$.

Im Fall $p = 2$ ist man fertig. Ist $m = 4$, so gibt es Abelsche Zerfällungskörper; man kann Ihre Sätze anwenden und kommt mit $n = 2$ zum Widerspruch.

Allgemein entsteht die Frage:

I. Besitzt ein Schiefkörper, der einen zweistufig metabelschen Zerfällungskörper besitzt, auch immer abelsche Zerfällungskörper?

Wenn dies gezeigt ist, ist $m = n$ bewiesen. Man braucht dabei nur die speziellen oben genannten metabelschen Körper zu behandeln. Ich halte diese Frage für recht angreifbar; es ist sogar möglich, daß eine Beschränkung auf algebraische Grundkörper dabei überflüssig ist. Ich habe bei $p = 2$ eine Methode, von der nicht ganz ausgeschlossen ist, daß sie sich übertragen läßt.

Zugleich folgt aus I., daß bei einem Index der Form $2^r 3^s$ immer zyklische Zerfällungskörper existieren. Die allgemeine Frage, ob es zyklische Zerfällungskörper gibt, erscheint, wenn I bewiesen ist, zurückgeführt auf:

II. Besitzt ein Schiefkörper vom Index p immer einen metazyklischen Zerfällungskörper?

Hat nämlich A den Index p^μ, so hat ähnlich wie oben, die $p^{\mu-1}$-te Potenz B den Exponenten p und wegen $m = n$ den Index p.[1] Wenn II gezeigt ist, folgt daß B einen metazyklischen Zerfällungskörper besitzt; daraus durch wiederholte Anwendung von I, daß es einen Abelschen Zerfällungs-

[1] Das kann man hier auch ganz direkt unabhängig von I und II zeigen.

körper gibt; daraus schließlich, nach Ihren Sätzen, daß es einen zyklischen Zerfällungskörper p-ten Grades von B gibt. Durch Übergang von K zu diesem Grundkörper wird der Exponent von A also erniedrigt, wegen $m = n$ auch der Index. Durch Wiederholung des Verfahrens kommt man zu einem auflösbaren Zerfällungskörper für A und unter Verwendung von I wieder zu einem Abelschen Zerfällungskörper, also zu einem zyklischen. – Für $p = 2$ und 3 ist II trivial.

Die ganze Frage ist also auf I und II zurückgeführt. Ob das eine wesentliche Erleichterung bedeutet, kann ich natürlich nicht sagen.

Vielleicht helfen bei II die Ergebnisse der längeren der beiden eingereichten Arbeiten etwas. Nach deren Ergebnis kommt nänmlich die ganze Frage auf einen Satz von folgender Form heraus: Ist $K(\theta)$ ein Normalkörper, so besitzt mindestens eins von endlich vielen Einbettungsproblemen (im Sinn der eben erwähnten Arbeit) stets eine Lösung. Dabei entsteht $K(\theta)$ aus dem Galoisschen Körper einer Gleichung p-Grades durch Adjunktion von höchstens $p - 2$ p-ten Wurzeln aus Zahlen des Galoisschen Körpers, (die p-ten Einheitswurzeln darf man ja in K annehmen). Die zu untersuchenden Einbettungsfragen hängen allein von p ab. Die gesuchten Normalkörper müssen vom Grad p^2 über $K(\theta)$ sein. Es handelt sich also um die Frage, ob relativ-Abelsche Körper über $K(\theta)$ existieren, die Normalkörper über K sind und deren Galoissche Gruppe gewisse angebbare Eigenschaften besitzt. Bei dieser Umformung wird es von vornherein klar, daß die ganze Frage in die Klassenkörpertheorie gehört.

Die analoge Umformung der Frage ist bei jedem m möglich, aber dann beim wirklichen Durchführen viel komplizierter.

Zugleich erlaube ich mir, bei Ihnen zwei Arbeiten für das Crellesche Journal einzureichen. Es handelt sich in der Hauptsache um Sachen, über die ich auf dem hiesigen Kongress und in Marburg vorgetragen habe; einige Fragen sind noch weiter verfolgt. Ich habe es auf zwei Arbeiten verteilt, da es als eine Arbeit zu lang wäre; ich hoffe, daß es Ihnen so recht ist. Der Grundkörper ist immer als beliebiger vollkommener Körper angenommen (abgesehen von tivialen Beispielen); meine Resultate für algebraische Grundkörper sind vorläufig sehr wenig erfreulich. Es scheint ja auch, daß sie durch Ihre Theorie binnen kurzem vollständig überholt sind.

Ihre Arbeit würde ich gern noch etwas behalten. Ich hoffe, daß es Ihnen genügt, wenn ich sie etwa am 4. 11. hier abschicke.

mit den ergebensten Grüßen
Ihr
Richard Brauer.

1.22 02.11.1931, Hasse an Brauer, Postkarte

den 2. 11. 31

(Postkarte)

Lieber Herr Brauer!

Herzlichen Dank für die beiden Ms., die nach flüchtiger Durchsicht *sehr* interessant zu sein scheinen. Leider verhindert mich im Moment der Semesterbeginn, sie genau zu lesen; natürlich sollen sie gerne Aufnahme finden. Auch Ihr Brief* hat mich sehr interessiert und angeregt, nämlich dazu, doch die Sylowabspaltung auch für das Problem der Zyklizität zu machen. Das geht sehr schön ganz analog, und ich glaube, damit ist der ganze Beweis geschafft. Denn die Übertragung meines Schlußes vom abelschen auf den metabelschen Fall von Primzahlpotenzordnung glaube ich leisten zu können. Näheres hoffentlich bald. Mein Ms. dürfen Sie behalten. Ich habe gleich für einige Interessenten Durchschläge gemacht. Hoffen wir, daß ich es *nicht* zu publizieren brauche.

Herzlichst Ihr

H. Hasse

1.23 07.11.1931, Hasse an Brauer, Fragment

PROF. DR. HELMUT HASSE

MARBURG–LAHN, 7. 11. 31
WEISSENBURGSTR. 22
FERNRUF 404

Lieber Herr Brauer!

Leider kann ich noch immer keinen endgültigen Erfolg in der Frage der Zyklizität berichten. Immerhin bin ich soweit gekommen, daß ich die feste Überzeugung gewonnen habe, daß sich die Sache zum glücklichen Ende führen läßt, und zwar wohl wesentlich mit den von Ihnen entwickelten Sätzen über Faktorensysteme nicht–galoisscher Zerfällungskörper. Es gäbe für mich keine schönere Freude, als wenn es uns *in gemeinsamer Arbeit* gelänge, das nun wirklich reife Problem der Zyklizität zu bewältigen. Darum will ich Ihnen heute auseinandersetzen, wie ich mir die Lösung denke.

Zunächst habe ich in meinem kürzlich übersandten Ms (unabhängig vom abelschen Fall) bereits gezeigt, daß es genügt, den folgenden Satz zu beweisen:

I. *Jede überall zerfallende normale einfache Algebra A über einem algebraischen Zahlkörper Ω ist ~ 1 (volle Matrixalgebra).*

Wie Sie bewiesen haben, ist nun weiter A direktes Produkt normaler einfacher Algebren von Primzahlpotenzindex. Es genügt also, den Satz für Primzahlpotenzindex zu beweisen.

Dann existiert ein Zerfällungskörper von Primzahlpotenzgrad für A. Sei K der zugehörige über Ω galoissche Körper und S der zugehörige „Sylowkörper" (über dem also der Grad von S eine Potenz der fraglichen Primzahl p ist, während S über Ω zu p primen Grad hat), dann ist A_S eine ebenfalls überall zerfallende normale einfache Algebra, die in K einen galoisschen Zerfällungskörper besitzt, dessen Grad eine Potenz von p ist. Wird der Satz für diesen Spezialfall als bereits bewiesen angenommen, so ist also $A_S \sim 1$. Dann folgt aber ohne weiteres auch $A \sim 1$; denn $A_S \sim 1$ besagt ja, daß S Zerfällungskörper von A ist; der Index von A ist also Teiler des zu p primen Grades von S, und da er andrerseits Potenz von p ist, notwendig gleich 1.

Hiernach ist der Beweis von Satz I auf den Beweis des folgenden Satzes reduziert:

II. *Jede überall zerfallende normale einfache Algebra* A *über einem algebraischen Zahlkörper* Ω, *die einen galoisschen Zerfällungskörper* K *von Primzahlpotenzgrad besitzt, ist* ~ 1.

Den Beweis dieses Satzes denke ich mir durch vollständige Induktion nach dem Grade. Für Primzahlgrad ist K zyklisch und der Satz richtig nach den Ergebnissen meiner Note in den Göttinger Nachrichten (Normensatz!).

Sei der Satz für niedrigeren Grad bereits bewiesen. Dann sei $\mathfrak{H}$ ein Normalteiler vom Primzahlindex p der galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ von K, ferner S ein erzeugendes Element der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, also

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}\mathsf{S} + \cdots + \mathfrak{H}\mathsf{S}^{p-1};$$

dabei ist

$$\mathsf{S}^p = \mathsf{T} \qquad \text{in} \quad \mathfrak{H};$$

schließlich seien X, Y variable Elemente in $\mathfrak{H}$.

Eine zum Zerfällungskörper K gehörige Darstellung von A als verschränktes Produkt: $A = \mathfrak{G} \divideontimes K$ kann dann in der folgenden Form angenommen werden:

$$(1.) \quad zu_{\mathsf{S}} = u_{\mathsf{S}} z^{\mathsf{S}} \qquad zu_X = u_X z^X \qquad \text{für beliebiges } z \text{ aus } K$$

$$(2.) \quad u_{\mathsf{S}}^p = u_{\mathsf{T}} \qquad u_X u_{\mathsf{S}} = u_{\mathsf{S}} u_{X^{\mathsf{S}}} c_X \qquad u_X u_Y = u_{XY}\,.$$

Dabei sind die c_X gewisse von Null verschiedene Zahlen aus K; sie bilden das Faktorensystem dieser verschränkten Produktdarstellung $A = \mathfrak{G} \divideontimes K$.

Daß dies Faktorensystem in der Tat so speziell angenommen werden darf, daß also sowohl die zu $u_X u_Y$ gehörigen Faktoren, als auch der zu u_{S}^p und u_{T} gehörige Faktor von vornherein als 1 angenommen werden dürfen, beweise ich so:

Die in A steckende Teilalgebra $B = \mathfrak{H} \divideontimes K$, die über dem Invariantenkörper $K_{\mathfrak{H}}$ normal und einfach ist, zerfällt ebenfalls überall, ist also nach der Induktionsannahme ~ 1. Daher dürfen jedenfalls die zu $u_X u_Y$ gehörigen Faktoren als 1 angenommen werden. Sicherlich kann daher die verschränkte Produktdarstellung in der Form:

$$(\widehat{2}.) \qquad \hat{u}_{\mathsf{S}}^p = \hat{u}_{\mathsf{T}} a \qquad \hat{u}_X \hat{u}_{\mathsf{S}} = \hat{u}_{\mathsf{S}} \hat{u}_{X^{\mathsf{S}}} \hat{c}_X \qquad \hat{u}_X \hat{u}_Y = \hat{u}_{XY}$$

angenommen werden. Um auch a auf 1 zu reduzieren, bemerke ich, daß auch die in A steckende Teilalgebra $\mathcal{C} = \{\mathsf{S}\} \divideontimes K$, die über dem Invariantenkörper K_{S} normal und einfach ist, überall zerfällt, und daher nach der Induktionsannahme (oder besser: als zyklische Algebra) ~ 1 ist. Es gibt also ein von Null verschiedenes a_0 in K, sodaß

$$\big(\hat{u}_{\mathsf{S}} a_0\big)^{pn} = 1$$

ist, wenn n die Ordnung von $\mathsf{S}^p = \mathsf{T}$ bezeichnet:

$$\mathsf{T}^n = 1\,.$$

Nun ist einerseits

$$(1 =)\ (\hat{u}_{\mathsf{S}} a_0)^{pn} = \hat{u}_{\mathsf{S}}^{pn}\, a_0^{1+\mathsf{S}+\cdots+\mathsf{S}^{pn-1}} = \hat{u}_{\mathsf{S}}^{pn}\, a_0^{(1+\mathsf{S}+\cdots+\mathsf{S}^{p-1})(1+\mathsf{T}+\cdots+\mathsf{T}^{n+++})}$$

andererseits

$$\hat{u}_{\mathsf{S}}^{pn} = (\hat{u}_{\mathsf{T}} a)^n = \hat{u}_{\mathsf{T}}^n a^{1+\mathsf{T}+\cdots+\mathsf{T}^{n-1}} = a^{1+\mathsf{T}+\cdots+\mathsf{T}^{n-1}},$$

letzteres weil die Normierung der $\hat{u}_X$ insbesondere $\hat{u}_{\mathsf{T}}^n = \hat{u}_{\mathsf{T}^n} = 1$ zur Folge hat. Es folgt also:

$$\big(a a_0^{1+\mathsf{S}+\cdots+\mathsf{S}^{p-1}}\big)^{1+\mathsf{T}+\cdots+\mathsf{T}^{n-1}} = 1\,.$$

Daher kann

$$a a_0^{1+\mathsf{S}+\cdots+\mathsf{S}^{p-1}} = b^{1-\mathsf{T}}$$

mit einem von Null verschiedenen b aus K gesetzt werden (Zahlbericht Satz 90 oder Frl. Noethers Automorphismenschluß). Setzt man dann

$$u_{\mathsf{S}} = \hat{u}_{\mathsf{S}} a_0 \qquad u_X = b^{-1} \hat{u}_X b\,,$$

so bleibt das Faktorensystem der u_X unverändert gleich 1, die $\hat{c}_X$ gehen in gewisse neue c_X über, und an Stelle von a tritt jetzt:

$$u_{\mathsf{S}}^p = (\hat{u}_{\mathsf{S}} a_0)^p = \hat{u}_{\mathsf{S}}^p a_0^{1+\mathsf{S}+\cdots+\mathsf{S}^{p-1}} = \hat{u}_{\mathsf{T}} a a_0^{1+\mathsf{S}+\cdots+\mathsf{S}^{p-1}} = \hat{u}_{\mathsf{T}} b^{1-\mathsf{T}} = b^{-1} \hat{u}_{\mathsf{T}} b = +++?$$

Die Zahlen c_X in (2.) genügen den folgenden beiden Bedingungen:

$$(3.) \qquad c_{XY} = c_Y c_X^{Y^{\mathsf{S}}}$$

$$(4.) \qquad c_{X^{\mathsf{S}^{p-1}}} c_{X^{\mathsf{S}^{p-2}}} \cdots c_{X^{\mathsf{S}}}^{\mathsf{S}^{p-2}} c_X^{\mathsf{S}^{p-1}} = 1\,.$$

(3.) bringt einfach die *Assoziativität* des Produktes $u_X u_Y u_{\mathsf{S}}$ zum Ausdruck, (4.) ergibt sich, wenn man $u_X u_{\mathsf{S}}^p = u_X u_{\mathsf{T}} = u_{\mathsf{T}}$ *sukzessive* auf die letztgenannte Form bringt.

Speziell muß, weil[1] $\mathsf{S}^p = \mathsf{T}$ in $\mathfrak{H}$ liegt, und weil[2] das Faktorensystem von $B = \mathfrak{H} \divideontimes K$ gleich 1 ist, $c_{\mathsf{T}} = 1$ sein. Das hat gemäß (3.) die weiteren speziellen Relationen zur Folge:

(3a.) $$c_{\mathsf{T}} = 1\,, \quad c_{X\mathsf{T}} = c_X^{\mathsf{T}}, \quad c_{\mathsf{T}Y} = c_Y\,, \text{ also } \underline{c_{X^{\mathsf{T}}} = c_X^{\mathsf{T}}}\,.$$

Die letztere Tatsache setzt die „Zyklizität" des c–Produktes links in (4.) in Evidenz.

Diese Produktrelation (4.) für die c_X ist das nicht–abelsche Analogon einer Relation „Norm = 1" im abelschen Falle. Sie erlaubt, analog zu Zahlbericht Satz 90 die c_X in der folgenden Form darzustellen:

(6.) $$c_X = a_{X^{\mathsf{S}}} a_X^{-\mathsf{S}}$$

mit gewissen von Null verschiedenen a_X aus K.

Leider kann ich vorläufig (wahrscheinlich aus Ungeschicklichkeit) den schönen E. Noetherschen Automorphismenbeweis[*)] für den abelschen Spezialfall nicht auf den hier vorliegenden Fall übertragen; ich bin fest überzeugt, daß ein ebensolcher eleganter Beweis existiert; überlassen wir diese cura posterior der Emmy! Jedenfalls läßt sich der Hilbertsche Beweis fast wörtlich übertragen. Dieser stellt ein System a_X konstruktiv her. Wenn nämlich die

$$a_X = 1 + c_{X\mathsf{S}^{-1}} + c_{X\mathsf{S}^{-1}} c^{\mathsf{S}}_{X\mathsf{S}^{-2}} + \cdots + c_{X\mathsf{S}^{-1}} c^{\mathsf{S}}_{X\mathsf{S}^{-2}} \cdots c^{\mathsf{S}^{p-2}}_{X\mathsf{S}^{-(p-1)}}$$

von Null verschieden sind, so führen sie gemäß (4.) und (3a.) bereits zu einer Darstellung (6.) der ist das aber nicht der Fall, so bilde man zunächst entsprechend aus

$$c_X^* = (\xi - z_{\mathsf{T}})^{1-\mathsf{S}} c_X$$

[1] Bezieht sich auch auf die vorangehende Gleichung

[2] Bezieht sich auch auf die vorangehende Gleichung

[*)] Für den Fall, daß Ihnen dieser am 27. 2. 31 in Mbg als Punkt 1 unter 4 Punkten vorgetragene Beweis nicht mehr gegenwärtig ist: Ist k zyklisch, S erzeugendes Element der Gruppe und $a^{1+\mathsf{S}+\cdots+\mathsf{S}^{p-1}} = 1$ (p Primzahl oder zusammengesetzt), so hat das verschränkte Produkt $A = \{\mathsf{S}\} \divideontimes k$ mit den Relationen $z u_{\mathsf{S}} = u_{\mathsf{S}} z^{\mathsf{S}}$, $u_{\mathsf{S}}^p = 1$ den Automorphismus $\left\{ \begin{array}{ccc} z & \longrightarrow & z \\ u_{\mathsf{S}} & \longrightarrow & u_{\mathsf{S}} a \end{array} \right\}$. Dieser ist *innerer* Automorphismus, also von der Form $u_{\mathsf{S}} a = v^{-1} u_{\mathsf{S}} v$, $z = v^{-1} z v$. Die letztere Relation besagt aber $v = b$ in K; also $u_{\mathsf{S}} a = b^{-1} u_{\mathsf{S}} b = u_{\mathsf{S}} b^{1-\mathsf{S}}$, $a = b^{1-\mathsf{S}}$.

ein System

$$a^*_X = 1 + c^*_{X^{\mathsf{S}-1}} + c^*_{X^{\mathsf{S}-1}} c^{*\mathsf{S}}_{X^{\mathsf{S}-2}} + \cdots + c^*{}_{X^{\mathsf{S}-1}} c^{*\mathsf{S}}_{X^{\mathsf{S}-2}} \cdots c^{*\mathsf{S}^{p-2}}_{X^{\mathsf{S}-(p-1)}} .$$

Dabei bedeutet z_{T} ein bei T aber nicht bei S invariantes Element aus K, und ξ eine Unbestimmte. Die letztere kann in Ω so gewählt werden, daß die a_X alle von Null verschieden sind, denn für $\xi = z_{\mathsf{T}}$ sind sie alle 1, verschwinden also nicht identisch in ξ. Für die c^*_X und a^*_X hat man nun wieder

$$(6^*.) \qquad c^*_X = a^*_{X^{\mathsf{S}}} a^{*-\mathsf{S}}_X .$$

Geht man daher vermöge

$$a^*_X = (\xi - z_{\mathsf{T}}) a_X$$

zu neuen a_X über, so wird (6.) befriedigt.

Ähnlich wie in meinem Beweis für den abelschen Spezialfall kann man jetzt mittels der Darstellung (6.) die c_X aus den Relationen (2.) entfernen. In der Tat, setzt man

$$\overline{u}_X = u_X a_X$$

so wird

$$\overline{u}_X u_{\mathsf{S}} = u_X a_X u_{\mathsf{S}} = u_X u_{\mathsf{S}} a^{\mathsf{S}}_X$$
$$= u_{\mathsf{S}} u_{X^{\mathsf{S}}} c_X a^{\mathsf{S}}_X = u_{\mathsf{S}} \overline{u}_{X^{\mathsf{S}}} a^{-1}_{X^{\mathsf{S}}} c_X a^{-\mathsf{S}}_X = u_{\mathsf{S}} \overline{u}_{X^{\mathsf{S}}} \qquad \text{nach (6.)} .$$

Daß bei dieser Substitution die Relationen (1.) bestehen bleiben, ist klar. Um auch die erste Relation (2.) zu erhalten, kann man noch die spezielle Vorschrift $a_{\mathsf{T}} = 1$ bei der Bestimmung der a_X beobachten. Das geht ohne weiteres denn wegen $c_{\mathsf{T}} = 1$ ist jedenfalls $a^{1-\mathsf{S}}_{\mathsf{T}} = 1$, also a_{T} bei S invariant. Man kann aber die a_X mit einem beliebigen gemeinsamen bei S invarianten Faktor versehen, ohne (6.) zu ändern, also speziell mit a^{-1}_{T}. Schließlich gehen die dritten Relationen in (2.) jetzt über in $\overline{u}_X \overline{u}_Y = \overline{u}_{XY} \dfrac{a_Y a^Y_X}{a_{XY}}$. Zusammenfassend haben wir also die verschränkte Produktdarstellung $A = \mathfrak{G} \divideontimes K$ jetzt in die Form übergeführt:

$$(\overline{1}.) \quad z u_{\mathsf{S}} = u_{\mathsf{S}} z^{\mathsf{S}} \qquad z \overline{u}_X = \overline{u}_X z^X \qquad \text{für beliebiges } z \text{ aus } K$$

$$(\overline{2}.) \quad u^p_{\mathsf{S}} = \overline{u}_{\mathsf{T}} \qquad \overline{u}_X u_{\mathsf{S}} = u_{\mathsf{S}} \overline{u}_{X^{\mathsf{S}}} \qquad \overline{u}_X \overline{u}_Y = \overline{u}_{XY} \overline{c}_{X,Y} ,$$

$$\text{wo} \quad (\overline{2}a.) \quad \overline{c}_{X,Y} = \frac{a_Y a^Y_X}{a_{XY}} .$$

Die Assoziativrelationen (3.) haben dabei gemäß (6.) noch zur Folge, daß jedenfalls gilt:

$$(\overline{3}.) \qquad \overline{c}^{\mathsf{S}}_{X,Y} = \overline{c}_{X^{\mathsf{S}},Y^{\mathsf{S}}} \ .$$

Es kommt nun darauf an, zu beweisen, daß man die $\overline{c}_{X,Y}$ nicht nur überhaupt in der Form ($\overline{2}a$.) darstellen kann, sondern daß man das auch sozusagen in bei S invarianter Weise kann, also

$$(7.) \qquad \overline{c}_{X,Y} = \frac{\overline{a}_Y \overline{a}^Y_X}{\overline{a}_{XY}} \quad \text{mit} \quad \overline{a}^{\mathsf{S}}_X = \overline{a}_{X^{\mathsf{S}}} \ .$$

Gibt es solche $\overline{a}_X$ in K, so können sie wegen $\overline{a}^{\mathsf{S}}_{\mathsf{T}} = \overline{a}_{\mathsf{T}}$ wieder wie bei a_X so normiert werden, daß $\overline{a}_{\mathsf{T}} = 1$ ist, und der Übergang zu $\overline{u}_X \overline{a}_X^{-1}$ beseitigt die Faktoren $\overline{c}_{X,Y}$ wieder, ohne neue c_X einzuführen oder überhaupt irgendeine andere Änderung zu bewirken. Dann ist aber das *reelle* Faktorensystem auf 1 reduziert. Aber auch umgekehrt, wenn dies Faktorensystem zu 1 assoziiert, d. h. $A \sim 1$ ist, müssen *notwendig* solche $\overline{a}_X$ existieren. Denn es muß dann möglich sein, an die u_{S}, $\overline{u}_X$ solche Faktoren aus K anzubringen, daß das Faktorensystem zu 1 wird. Ist dazu insbesondere der Übergang zu $u_{\mathsf{S}}a$ zu machen, so folgt ähnlich wie oben $a = b^{1-\mathsf{S}}$, sodaß $u_{\mathsf{S}}a = b^{-1}u_{\mathsf{S}}b$ wird, und die Transformation aller Elemente mit b zeigt, daß man dann auch bei Festhaltung von u_{S} zum Ziel kommen kann. Die an die $\overline{u}_X$ anzubringenden Faktoren $\overline{a}_X$ liefern dann eine Lösung von (7.). Damit ist gezeigt:

III. *Damit $A \sim 1$ ist, ist nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig, daß das Relationensystem (7.) durch ein System $\overline{a}_X$ lösbar ist.*

Da wir wissen, daß A überall zerfällt, ergibt sich, daß (7.) „überall lösbar" ist. Es kommt jetzt darauf an, die $\overline{c}_{X,Y}$ als Faktorensystem einer geeigneten verschränkten Produktdarstellung so zu deuten, daß die Induktionsannahme auf sie angewandt werden kann. Hierzu betrachte ich zunächst die schon oben betrachtete Teilalgebra

$$\mathsf{B} = \mathfrak{H} \divideontimes K \ , \qquad \text{Rang } h \cdot ph \text{ über } \Omega \\ \text{(wo } h \text{ die Ordnung von } \mathfrak{H}) \ ,$$

ferner dann die Teilalgebra

$$\overline{\mathsf{B}} \quad \begin{array}{l}\text{der bei } \mathsf{S} \text{ invarianten} \\ \text{Elemente aus } \mathsf{B}\end{array} \ , \qquad \text{Rang } h \cdot \frac{h}{n} \text{ über } \Omega$$

Dabei nenne ich ein Element aus A bei S invariant, wenn es bei dem inneren Automorphismus „Transformation mit u_{S}" invariant bleibt. Daß $\overline{\mathsf{B}}$ den Rang

$h\cdot\frac{h}{n}$ über Ω hat, kann man entweder durch die rechte Abschätzung beweisen, indem man benutzt, daß ein Element

$$\bar{b} = \sum_X \overline{u}_X \overline{z}_X \quad (\overline{z}_X \text{ in } K) \text{ aus } \mathsf{B}$$

dann und nur dann zu $\overline{\mathsf{B}}$ gehört, wenn seine Koordinaten $\overline{z}_X$ die Invarianzbedingung

$$\text{(8.)} \qquad \overline{z}_X^{\mathsf{S}} = \overline{z}_{X^{\mathsf{S}}}$$

befriedigen, deren Typ ein neues Licht auf die Bedingungen ($\overline{3}$.) und (7.) wirft. Oder man kann es wohl auch aus Ihren und E. Noethers Sätzen über Teilsysteme („Galoissche Theorie“) folgern. Allerdings müßte man diese Sätze erst noch auf beliebige (auch *nicht* einfache) Teilsysteme verallgemeinern, was auch in Hinsicht auf den hier zu führenden Beweis, wie sofort hervortreten wird, erwünscht erscheint. Nach diesen Sätzen bilden die bei S invarianten Elemente aus A eine Teilalgebra $\overline{A}$, deren Rang das Komplement (bzgl. des Gesamtranges $ph\cdot ph$) der Rangzahl pn der durch u_{S} erzeugten (kommutativen) Teilalgebra $\{u_{\mathsf{S}}\}$ ist. Der Rang von $\overline{A}$ ist also $\dfrac{ph\cdot ph}{pn} = \dfrac{ph\cdot h}{n}$. Damit ein Element aus $\overline{A}$ zu B (und somit zu $\overline{\mathsf{B}}$) gehört, ist aber notwendig und hinreichend, daß es nur Glieder mit $u_{\mathsf{S}}^p = u_{\mathsf{T}}$ und dessen Potenzen enthält, keine mit den dazwischenliegenden Potenzen von u_{S}. Der Rang reduziert sich also beim Übergang von $\overline{A}$ zu $\overline{\mathsf{B}}$ auf den p–ten Teil, d. h. es wird in der Tat $h\cdot\dfrac{h}{n}$.

Die Teilalgebra $\overline{\mathsf{B}}$ ist nun offenbar für den genannten Zweck von besonderer Wichtigkeit. Es interessiert daher, noch etwas mehr über sie zu wissen. Ihr Zentrum ist, wie ich zeigen will, die durch $\overline{u}_{\mathsf{T}}$ erzeugte (kommutative) Teilalgebra $\{u_{\mathsf{T}}\}$ vom Range n. In der Tat gehört $\overline{u}_{\mathsf{T}}$ zu $\overline{\mathsf{B}}$, weil $\overline{u}_{\mathsf{T}^{\mathsf{S}}} = \overline{u}_{\mathsf{T}}$, also $\overline{u}_{\mathsf{T}} u_{\mathsf{S}} = u_{\mathsf{S}} \overline{u}_{\mathsf{T}}$ gilt. Und $\overline{u}_{\mathsf{T}}$ gehört zum Zentrum von $\overline{\mathsf{B}}$, weil $\overline{\mathsf{B}}$ bei Transformation mit $\overline{u}_{\mathsf{T}} = u_{\mathsf{S}}^p$ sicherlich elementweise invariant ist.

Damit [ist] jedenfalls gezeigt, daß $\{\overline{u}_{\mathsf{T}}\}$ im Zentrum von $\overline{\mathsf{B}}$ enthalten ist. Andrerseits ist nun $\overline{\mathsf{B}}$ nicht nur mit $\{u_{\mathsf{S}}\}$ sondern auch mit dem Invariantenkörper K_{S} elementweise vertauschbar (der ja sogar mit B elementweise vertauschbar ist). K_{S} hat den Rang p; somit hat das mit $\overline{\mathsf{B}}$ elementweise vertauschbare System $\{u_{\mathsf{S}}\,,\, K_{\mathsf{S}}\}$ den Rang $pn\cdot p$. Da dieser Rang komplementär zum Rang $h\cdot\frac{h}{n}$ von $\overline{\mathsf{B}}$ ist, ist $\{u_{\mathsf{S}}\,,\, K_{\mathsf{S}}\}$ *das* im Sinne der „Galoisschen Theorie“ zugeordnete System, und folglich sein Zentrum gleichzeitig das Zentrum von $\overline{\mathsf{B}}$. Das Zentrum von $\{u_{\mathsf{S}}\,,\, K_{\mathsf{S}}\}$ ist aber ersichtlich $\{\overline{u}_{\mathsf{T}}\}$.

Über seinem (nicht notwendig einfachen, im Gegenteil sicher *nicht* einfachen) Zentrum $\{\overline{u}_{\mathsf{T}}\}$ hat nun $\overline{\mathsf{B}}$ den Rang $\frac{h}{n}\cdot\frac{h}{n}$. Ferner bildet $\{\overline{u}_{\mathsf{T}}, K_{\mathsf{S}}\}$ ein maximales kommutatives Teilsystem von $\overline{\mathsf{B}}$. Daß auch K_{S} in $\overline{\mathsf{B}}$ vorkommt, ist klar, denn K_{S} ist bei S elementweise invariant und gehört zu B. Nimmt man irgendeine Basis von $\overline{\mathsf{B}}$ in bezug auf dieses maximale kommutative Teilsystem, so entspringt aus ihr eine Darstellung von $\overline{\mathsf{B}}$ in ihm vom Grade $\frac{h}{n}$. Es kommt nun darauf an, eine solche Basis zu bestimmen, oder sonstwie *das Faktorensystem dieser Darstellung zu berechnen.* Ich vermute, daß es eng mit den $\overline{c}_{X,Y}$ zusammenhängt, und daß die *Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf dieses Faktorensystem* (unter Zuhilfenahme der oben bewiesenen Tatsache III) den Induktionsschluß für den Beweis von Satz II vollständig macht. Durch den Übergang zu dem genannten „kleineren" Faktorensystem vom Grade $\frac{h}{n}$ (während das ursprüngliche den Grad h hatte) werden sozusagen die in den Bedingungen (3.) liegenden Abhängigkeiten zwischen den Faktoren $\overline{c}$ eliminiert. Das neue Faktorensystem ist in diesem Sinne „unabhängig". Bringt man zum Ausdruck, daß es (nach der Induktionsvoraussetzung) ~ 1 ist, so erhält man — so stelle ich mir die Sache vor — diejenigen „unabhängigen" Größen, die den in (7.) geforderten Abhängigkeiten zwischen den $\overline{a}$ zugrundeliegen.

Leider muß ich bekennen, daß ich hier am Ende *meines* Könnens stehe und alle meine Hoffnungen auf *Ihr* Können setze. Es handelt sich, wie Sie sehen um ein Faktorensystem, das zu einem *nicht–galoisschen* Zerfällungskörper K_{S} gehört. Daß dieser durch $\overline{u}_{\mathsf{T}}$ noch zu einem (nicht einfachen) kommutativen System erweitert ist, bedeutet vermutlich keine schwerwiegende Modifikation Ihrer Theorie der Faktorensysteme.

Zum Schluß noch einige Bemerkungen:

1.) Die Reduktion von I auf II erbringt, wenn man genauer zusieht, bereits den Beweis für eine ausgedehnte Klasse von Fällen, nämlich z. B. für alle normalen einfachen Algebren, deren Index quadratfrei ist. Denn der galoissche Körper zu einem Körper von Primzahlgrad p liefert notwendig einen Sylowkörper vom Grade p, und dafür ist Satz II bereits bekannt. Auch wenn der Sylowkörper stets höchstens vom Grade p^2 ausfällt, ist der Beweis fertig. Denn es gibt nur abelsche Gruppen vom Grade p^2. Ist also z. B. der Index 4 und bekannt, daß ein Zerfällungskörper mit Tetraedergruppe (statt der allgemeinen Oktaedergruppe) vorliegt, so gilt der Zyklizitätssatz. — Insbesondere: *Jede normale einfache Algebra von Primzahlindex ist zyklisch.* Das ist doch schon recht schön!

2.) Meine Reduktion auf die überall zerfallenden Algebren läßt sich auch in anderer Weise auffassen. Zerfällt eine Algebra A überall, so zerfallen insbesondere alle diejenigen zyklischen Algebren $\mathsf{B}_{K_\mathsf{S}}$ überall, die durch Übergang zum Invariantenkörper K_S irgendeines Gruppenelements und Bildung des auf S bezüglichen Ausschnitts entstehen ($\mathsf{B}_{K_\mathsf{S}} = \{\mathsf{S}\} \divideontimes K$). Also sind nach meinem Satz über zyklische Algebren die $\mathsf{B}_{K_\mathsf{S}} \sim 1$, d. h. ihre Faktorensysteme ~ 1. Diese Faktorensysteme sind die auf die einzelnen zyklischen Untergruppen $\{\mathsf{S}\}$ bezüglichen Ausschnitte des Gesamtfaktorensystems. Satz I gestattet also auch die folgende Formulierung:

I' *Hat ein zu einem Galoisschen Körper K gehöriges Faktorensystem die Eigenschaft, daß alle auf die zyklischen Untergruppen $\{\mathsf{S}\}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ von K bezüglichen Ausschnitte ~ 1 sind, so ist es selbst ~ 1 (und natürlich umgekehrt.)*

Nicht nur folgt I aus I', sondern auch umgekehrt; die Voraussetzungen beider Sätze sind nämlich gleichwertig. Denn ist umgekehrt die Voraussetzung von I' erfüllt, so sind insbesondere diejenigen zyklischen Faktorensysteme absolut und somit $\mathfrak{p}$–adisch ~ 1, auf die sich jeweils das ganze Faktorensystem $\mathfrak{p}$–adisch reduziert. Also ist dann $A_\mathfrak{p} \sim 1$ für jedes $\mathfrak{p}$, d. h. A zerfällt überall.

In Satz I' liegt eine, von der Beziehung auf die Arithmetik ($\mathfrak{p}$–adik) völlig freie Formulierung 1. des noch beweisenden Satzes und 2. des Prinzips des Schlusses vom Kleinen aufs Große vor. Gerade das letztere finde ich sehr amüsant. Es steht hiernach zu vermuten, daß das Prinzip I' *allgemeine* Gültigkeit hat und nur die Reduktion der Zyklizitätsfrage auf I' von der arithmetischen Struktur von Ω abhängt. Oder können Sie auch gegen I' ein Gegenbeispiel mit Unbestimmten konstruieren?

3.) Den Satz, daß für Potenzen von 2 als Index der Exponent gleich dem Index ist, hat auch A. A. Albert kürzlich bewiesen, wie er mir schrieb. Seine Mitteilung darüber ist in Proc. nat. Ac. Sc. **17** (1931), p. 389–92 (siehe Zentralblatt **2** (3), p. 115) erschienen. Im übrigen hinkt Albert doch sehr hinter Ihnen, E. Noether und mir her; siehe seine Arbeit in Trans. Am. math. Soc. **33** (1931), p. 690–711, die uns gar nichts Neues sagt. Allerdings sind ja diese Dinge leider auch von uns noch nicht publiziert. Die ersten Publikationen darüber werden unsere beiden sein, Ihre eben an Crelle eingereichte „Konstruktion der Schiefkörper" und meine ausführliche den Trans. Am. Math. Soc. eingereichte Darstellung der Beweise meiner Gött. Nachr. Note. Im zweiten Abschnitt gebe ich da eine ausführliche Begründung der Theorie der verschr. Produkte, Zerfällungskörper, Faktorensysteme, allerdings nur soweit sie sich auf den galoisschen Fall beziehen. Mehr brauchte ich ja für meine Zwecke bisher nicht. So ist es sehr schön, daß Ihre Arbeit diesen Fall einschließt, daß im übrigen *sehr* starke Berührungspunkte da sind, und teilweise ganz dieselben Tatsachen bewiesen werden, schadet hoffentlich nicht ...

1.24 09.11.1931, Hasse an Brauer, Postkarte

9. 11. 31.

(Postkarte)

Lieber Herr Brauer!

Eben bekomme ich einen Brief von Emmy, der die ganze Frage erledigt, und zwar so, daß ein Eingehen auf die Struktur der Faktorensysteme gar nicht notwendig wird. Ganz genau so, wie die Reduktion von I durch die Sylowmethode auf II kann man nämlich den Beweis von II durch Schrittweise Reduktion in Primzahlschritten führen. Man muß nur den Abbau nicht, wie ich ungeschickt versuchte, beim Körper unten, bei der Gruppe oben beginnen, sondern umgekehrt. Ist K auflösbarer Zerfällungskörper des überall zerfallenden A, und K/L zyklisch von Primzahlgrad, ist $A_L \sim 1$, also L Zerfällungskörper von A. Bekanntlich kann L so gewählt werden, daß selbst galoissch (oder man wähle von vornherein eine K abbauende Kette $K\ L_1\ L_2 \ldots \Omega$). So folgt sukzessive $A_{L_1} \sim 1$, $A_{L_2} \sim 1, \ldots$, also $A \sim 1$.

Hoffentlich haben Sie sich nicht unnötige Mühe gemacht. *Ich* habe mich furchtbar gequält, und doch nicht den einfachen Gedanken von Emmy gehabt.

Herzliche Grüße

stets Ihr

H. Hasse

1.25 11.11.1931, Hasse an Brauer

MATHEMATISCHES SEMINAR
DER UNIVERSITÄT

MARBURG–LAHN, DEN 11. 11. 31

Lieber Herr Brauer!

Nachdem die Zyklizitätsfrage mit Ihrer und E. Noethers Hilfe zu einem glücklichen Abschluß gekommen ist, fiel mir die sehr harmonische Obliegenheit zu, unsere drei Beiträge in der Form von Reduktionen zu einem einheitlichen und würdigen Ganzen zusammenzuschweißen. Dies habe ich beifolgend getan. Ich bitte Sie, die beiliegenden Blätter einer liebevollen und wenn irgend möglich recht schnellen Durchsicht zu unterziehen. Denn wie Sie sehen, habe ich die Gelegenheit benutzt, um eine ehrfurchtsvolle Verbeugung zu Hensels 70. Geburtstag zu machen, und der ist bereits am 29. Dezember. Wir bringen ein Festheft bei Crelle heraus (fast 2 Bände stark) und da soll dies nach Möglichkeit noch hinein. Da tut dann Eile sehr not. So möchte ich Sie also bitten, möglichst nicht noch umstürzende Änderungen zu machen, sondern wenn Sie solche haben, lieber darauf an anderer Stelle zurückzukommen. Ich könnte mir aber denken, daß Sie von sich aus zu dem letzten Satz (Satz 3) noch etwas hinzuzufügen oder eine Verschärfung anzubringen haben. Ich habe das nur sehr roh angepackt. Das ließe sich leicht noch anbringen. Habe ich I. Schur richtig und genügend zitiert? Und Sie selbst? Sonst sagen Sie bitte, was in dieser Hinsicht noch geschehen muß.

Dies Exemplar behalten Sie bitte. Ich habe noch zwei, eins für die Druckerei und eins für mich hier, außerdem noch eins an E. Noether geschickt, die zum Schluß noch die Reduktion auf Primzahlpotenzgrad durch Ihren Satz von der direkten Aufspaltung als überflüssig herausschmiß. Daher fand ich auch eigentlich nicht genug Gelegenheit Ihre Arbeit aus Math. Zeitschr. zu zitieren. Es wird fast nichts daraus gebraucht, außer den einfachsten schon vorher feststehenden Tatsachen über Zerfällungskörper.

Mit herzlichen Grüßen

auch an Ihre verehrte Gattin

stets Ihr

H. Hasse

1.26 11.11.1931, Brauer an Hasse

Dr. Richard Brauer

Königsberg i. Pr., den 11. 11. 31
Loewestr. 2

Sehr geehrter Herr Professor,

Herzlichen Dank für Ihren ausführlichen Brief* und Ihre Karte*, die ich eben erhielt. Es ist sehr schön, daß das Zyklizitätsproblem jetzt erledigt ist! Ich hatte Ihnen gerade heute schreiben wollen und Ihnen genau die Methode der Emmy mitteilen wollen; allerdings muß ich offen sagen, daß ich fürchtete, einen dummen Fehler dabei zu machen, weil mir die Sache zu einfach vorkam. Ich hatte Sie gerade deswegen anfragen wollen, was ja nun überflüssig geworden ist. Es war mir übrigens von vornherein klar, daß durch Ihre Reduktion die wesentliche Arbeit geleistet war.

Nach Ihrer Theorie der zyklischen Algebren ist ja nun alles wirklich erschöpfend erledigt! Die einzige Frage, die noch offen ist, ist, ob man eine endliche Gruppe linearer Substitutionen der Ordnung g immer im Körper der g-ten Einheitswurzeln darstellen kann. Wenn der Charakter rational und die Gruppe irreduzibel ist, ist jedenfalls eine Darstellung in einem Kreiskörper nach dem Zyklizitätssatz möglich. Die Frage erscheint also jetzt als recht natürlich, während Frl. Noether sie früher mit Recht als etwas gekünstelt bezeichnete.

Besonders freut mich, daß nun für algebraische Grundkörper auch die Gleichheit von Exponent und Index bewiesen ist; mit dieser Frage habe ich mich vor ungefähr fünf Jahren sehr stark beschäftigt und war durch die Erfolglosigkeit meiner Arbeit ganz deprimiert; damals wußte ich von dem Zusammenhang der Faktorensysteme mit den hyperkomplexen Größen noch nichts. Daß sich aus der Gleichheit von Exponent und Index eine wesentliche Verschärfung der Sätze über Zusammenhang zwischen arithmetischen und invariantentheoretischen Eigenschaften bei Gruppen endlicher Ordnung ergibt, ist klar.

Ebenso selbstverständlich ist, daß nun die Galoissche Theorie der Schiefkörper im Fall eines algebraischen Grundkörpers vollständig erledigt ist. Im

Falle eines Primzahlpotenzexponenten gilt: Ist Z ein (das Zentrum enthaltender kommutativer) Teilkörper, so gibt es außer Z selbst nur einen Teilschiefkörper mit dem Zentrum Z; das direkte Produkt zweier normaler Divisionsalgebren ist nur dann Divisionsalgebra, wenn die Indizes teilerfremd sind.

In Ihrem Brief stellen Sie die Vermutung auf, daß der Satz I' von der Arithmetik unabhängig ist. Das trifft aber nicht zu, wie die folgende Betrachtung zeigt. P sei der Körper der rationalen Zahlen (wesentlich ist nur, daß i nicht vorkommt), x_1, x_2, x_3, x_4 seien Unbekannte. Man adjungiere zu P alle Polynome in den x_ν, die die Vierergruppe $\mathcal{V}$: (1), $(1,2)(3,4)$, $(1,3)(2,4)$, $(1,4)(2,3)$ gestatten, der so entstehende Körper heiße K. Dann ist $K(x_1)$ Normalkörper vierten Grades über K, die Galoissche Gruppe ist $\mathcal{V}$. Nun kann man die Quaternionengruppe G der Ordnung 8 als eine Erweiterung der zyklischen Gruppe der Ordnung 2 mit Hilfe von $\mathcal{V}$ auffassen. G liefert also ein Faktorensystem c vom Exponenten 2 (oder 1), das nur aus Zahlen ± 1 besteht. Ein zugehöriges einfaches System ist

$$\alpha = \begin{pmatrix} f_1 & -g_1 & -h_1 & -k_1 \\ g_2 & f_2 & -k_2 & h_2 \\ h_3 & k_3 & f_3 & -g_3 \\ k_4 & -h_4 & g_4 & f_4 \end{pmatrix}.$$

Dabei sollen f, g, h, k rationale Funktionen der c_ν mit Koeffizienten aus P sein, die Indizes 1, 2, 3, 4 sollen Anwendung der Elemente von $\mathcal{V}$ bedeuten. Der Index m ist 4; um das zu beweisen, genügt es nachzuweisen, daß $|\alpha| \neq 0$ ist, wenn nicht f, g, h, k alle vier identisch 0 sind. Das kann man aber durch eine ganz elementare Teilbarkeitsbetrachtung schließen, die ich allerdings im Augenblick nur auf einem nicht ganz kurzen Weg durchführen kann.

Nimmt man als Grundkörper jetzt einen Teilkörper 2. Grades von $K(x_1)$, so besteht der zugehörige „Ausschnitt“ aus c auch nur aus 1 und -1. Ersetzt man also K durch $K(i) = K'$, so ist der Ausschnitt von c in allen drei quadratischen Teilkörpern von $K'(\theta)$ zu 1 assoziiert; der Index von c bei K' als Grundkörper kann aber nicht kleiner als $\frac{4}{2}$ sein und ist daher genau 2. Es ist also c nicht ~ 1, aber jeder echte Teilkörper des Galoisschen Zerfällungskörpers $K'(\theta)$ selbst Zerfällungskörper.

Wahrscheinlich leistet aber eine Modifikation des Satzes I' das Verkangte.

Ob das eben behandelte System bei K als Grundkörper zyklisch darstellbar ist, weiß ich nicht; ebenso nicht, ob allgemein bei beliebigem Grundkörper immer Galoissche Zerfällungskörper von minimalem Grad existieren; ich glaube nicht, daß es der Fall ist. Meinen Sie, daß die Konstruktion eines Beispiels Interesse hätte? Die Rechenarbeit bei Konstruktion eines Beispiels ist wahrscheinlich sehr groß und sehr langweilig.

Mit den ergebensten Grüßen

Ihr Richard Brauer

1.27 13.11.1931, Brauer an Hasse

Dr. Richard Brauer — Königsberg i. Pr., den 13. 11. 31
Loewestr. 2

Sehr geehrter Herr Professor,

Heute früh erhielt ich Ihre Arbeit; ich bin ganz überrascht, daß meine doch wirklich nur geringfügige Bemerkung Sie veranlaßt hat, diese besonders schöne Arbeit mit unter meinem Namen zu publizieren. Das wesentliche Fundament des Beweises liegt doch ganz allein in der Reduktion 1.; außerdem stammt doch die Anwendung der Sylow-Abspaltung beim Zyklizitätsproblem eigentlich von Ihnen und nicht von mir. Ich empfinde es als große Ehre für mich, daß Sie mich unter die Verfasser aufgenommen haben und bin Ihnen dafür ganz besonders dankbar.

Ich habe die Arbeit genau durchgelesen und im Augenblick keine wesentlichen Bemerkungen dazu zu machen. Satz 3 hat mir besonderen Eindruck gemacht; ich hätte nicht geglaubt, daß man die Methoden auf dies Problem so unmittelbar würde anwenden können. Sehr interessant wäre es ja, wenn man die Zulässigkeit von $h = 1$ zeigen könnte. Ich bin zur Zeit außerstande, möchte mich aber damit noch weiter beschäftigen, sobald mir der Semester-Anfangstrubel wieder Ruhe dazu läßt – natürlich nur in dem Fall, daß Sie es nicht inzwischen selbst erledigt haben, was ich für recht wahrscheinlich halte.

An kleinen stilistischen Änderungen würde ich eventuell vorschlagen, auf S. 1. Zeile 6 von unten die Definition von $A \sim W$ etwas anders zu fassen, da ich sie nicht sehr klar finde. Vielleicht kann man sagen: $A \sim W$ bedeutet, daß A einer vollständigen Matrixalgebra isomorph ist; danach wäre dann auf die allgemeine Bedeutung des Zeichens $\sim$ hinzuweisen. Auf S. 2, Zeile 15 würde ich hinter d.h. einschieben: D. Auf S.4, Zeile 1 muß es statt II heißen III. Auf S. 5 ist die Numerierung der Anmerkungen zu ändern. Auf S. 6, Zeile 5 würde ich sagen: Ein in bezug auf W_i relativ zyklischer Körper $Z_i \ldots$; analog eventuell auf der vorletzten Zeile.

Die Zitate finde ich voll ausreichend; bei den Sätzen 1-3 würde ich vorschlagen, daß hervorgehoben wird, daß es sich um *Ihre* Ergebnisse handelt.

Der Zyklizitätssatz läßt nach meiner jetzt bei Crelle eingereichten Arbeit eine ziemlich einfache Formulierung zu, die vom hyperkomplexen ganz frei ist. Ist K algebraischer Zahlkörper, $K(\theta)$ ein Normalkörper mit der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$, und ist $\mathcal{G}$ eine Erweiterung der zyklischen Gruppe m-ter Ordnung mit Hilfe von $\mathfrak{G}$, so ist das zugehörige Einbettungsproblem stets lösbar, wenn man K durch einen relativzyklischen Körper K' über K ersetzt. Dabei ist allerdings noch angenommen, daß es immer einen zu $K(\theta)$ teilerfremden zyklischen Zerfällungskörper gibt. Dies ist doch wohl immer der Fall? Im andern Fall müßte man die Formulierung etwas ergänzen. Ich habe die Hoffnung, daß man vielleicht mit Hilfe dieser Formulierung an die Aufgabe der Konstruktion von Körpern mit vorgegebener auflösbarer Gruppe herankann, etwa indem man zuerst große Körper konstruiert und dann zu Teilkörpern heruntergeht. Ich weiß aber nicht, ob das durchführbar ist.

Mit den herzlichsten Grüßen
Ihr sehr ergebener
Richard Brauer

1.28 16.11.1931, Hasse an Brauer

MATHEMATISCHES SEMINAR
DER UNIVERSITÄT

MARBURG–LAHN, DEN 16. 11. 31

Lieber Herr Brauer!

Herzlichen Dank für Ihre schnelle Antwort*. Mit den vorgeschlagenen Verbesserungen bin ich gerne einverstanden. E. Noether hat auch noch eine ganze Reihe von kleineren Änderungen angeregt, Sie werden das ja dann bei der Korrektur sehen. Insbesondere hat auch Sie darauf bestanden, daß ich die Folgerungen als von mir herrührend bezeichne, und so will ich das dann tun.

Daß wir Sie mit unter die Verfasser dieser Note rechnen müssen, ist doch nach allem ganz selbstverständlich; denn ganz abgesehen davon, daß Sie nun auch die Reduktion 3 von sich aus gefunden haben, was ich auch noch eingefügt habe, – war es wirklich so, daß Ihre Darlegungen über die Reduktion 2 im Falle der Frage „Exponent = Index“ das Wesentliche darstellten. Schon beim Lesen Ihres Briefes war mir sofort klar, daß die Anwendung dieser Schlußweise auf mein Reduktion 1 zum Erfolg führen mußte, und in der Tat hatte ich ja auch gar nichts weiter zu tun, als aus Ihrem Brief abzuschreiben und die dortigen Entwicklungen dem für die Zyklizitätsfrage erforderlichen Beweisgang entsprechend durchzuführen, was übrigens wie Sie sehen viel einfacher geht, als Sie zunächst dachten, nicht nur durch E. Noether's Herausschmeißen der Reduktion auf Primzahlpotenzgrad, sondern auch abgesehen davon.

E. Noether konnte es gar nicht fassen, daß ich die schwierigere Reduktion 2 gesehen haben und die einfachere Reduktion 3 übersehen haben sollte. Die Tatsache, daß das so war, und daß ich stattdessen in einer geradezu labyrinthischen Weise gequält habe (übrigens bei Eintreffen der E. Noetherschen Karte im Wesentlichen durchgekommen war!), zeigt Ihnen aufs Neue daß die Reduktion 2 nicht mein geistiges Eigentum ist. Denn ich habe sie noch nicht einmal so verstanden gehabt, daß ich ihr Analogon in dem viel einfacheren Falle der Reduktion 3 im nötigen Moment ansetzen konnte. Sie dagegen haben sofort gesehen, daß auch die Reduktion 3 nach diesem Schema geht.

Unter die Folgerungen habe ich nun noch den folgenden Satz aufgenommen, der mir von grundlegender Bedeutung zu sein scheint:

Damit ein algebraischer Körper K über W für eine normale einfache Algebra A über W Zerfällungskörper sei, ist notwendig und hinreichend, daß für die sämtlichen Primteiler P_i in K der sämtlichen Primstellen p von W jeweils der P_i–Grad n_{P_i} von K über W ein Multiplum des p–Index m_p von A ist.

Dabei ist der P_i–Grad folgendermaßen erklärt: Ist

$$p = \underset{i}{\text{Prod.}}\ P_i^{e_i}, \quad N(P_i) = p^{f_i}$$

die Zerlegung von p in K, so ist $n_{P_i} = f_i e_i$, also gleich dem Grad des zugehörigen P_i–adischen Körpers K_{P_i}. Und der p–Index ist einfach der Index von A_p. Daß n_{P_i} ein Multiplum von m_p ist, ist einfach die notwendige Gradbedingung dafür, daß an der fraglichen Primstelle K_{P_i} Zerfällungskörper für A_p sei. Der Satz sagt also einfach, daß die vom Kleinen her notwendigen trivialen Gradbedingungen in ihrer Gesamtheit auch hinreichend sind. Ist das nicht eine ebenso überraschende wie harmonische Lösung des allgemeinen Problems der Zerfällungskörper? Wie der Beweis an Hand meines Satzes I geht, liegt ja auf der Hand. Ich beweise zunächst, daß die Gradbedingung im Kleinen auch hinreichend ist, was ohne weiteres aus den p–adischen Methoden abgelesen werden kann. Dann folgt aus Satz I das Hinreichen auch im Großen.

Dieser Satz ist in mehrfacher Weise interessant und wichtig.

Einmal kann er zur Bestimmung der Zerfällungskörper von Gruppen linearer Substitutionen verwendet werden, insbesondere auf den Fall der endlichen Gruppen angewandt werden. Er zeigt dann, daß die Bedingung „zyklisch“ in meinem Beweis ganz unerheblich war (ich lasse sie daher jetzt auch ganz aus). Zu einer Verschärfung des Resultats führt er allerdings so ohne weiteres nicht. Nicht einmal eine vernünftige Abschätzung des Exponenten h vermag ich zu geben. Man muß dazu wohl irgendwie an die Diskriminante der einzelnen irreduziblen Darstellungen heran. Die Frage nach einer Minimalbasis des Gruppenrings ist wohl noch ungelöst. Die erzeugenden Idempotente der Zerlegung in einfache Bestandteile (aus den Charakteren gebildet) bringen jedenfalls gewisse Nenner herein. Ich möchte vermuten, daß das die einzige Reduktion ist, die die natürliche Basis des Gruppenrings erfährt, daß man also nach Wegdivision dieser Faktoren bereits die Diskriminante hat.

Ob das so ist, ist für die in Rede stehende Frage vermutlich unerheblich. Hauptsache ist dafür, *daß* sich jedenfalls die Diskriminante noch in angebbarer Weise reduzieren läßt. Man muß nun weiter ungefähr folgendes zeigen: Je höher für irgendeinen Charakter der Grad des Charakterkörpers (Zentrums des betr. Bestandteils) ist, umso höher ist auch die auf diesen Bestandteil bezügliche Reduktion der Diskriminante umso niedrigerer sind also die aus der Diskriminante abzulesenden p–Indizes für die $p \mid n$. Denn nur, wenn so etwas gilt, kann man *trotz* des sich drunterschiebenden Charakterkörpers mit dem *festen* Körper der n–ten Einheitswurzeln auskommen. Vielleicht ist die Diskriminantenreduktion für den einzelnen Bestandteil geradezu durch die Charakterkörperdiskriminante ausdrückbar? Ich könnte mir so etwas denken, habe aber die Sache nicht weiter verfolgt, und will das auch nicht tun, da mir jetzt ganz andere Dinge vorschweben.

Der obige Satz ist nämlich ganz besonders wichtig weil er in gewissem Sinne das lange gesuchte Zerlegungsgesetz der allgemeinen (nicht–abelschen) Zahlkörper darstellt. Das ist vorerst mehr Programm als Realität. Ich denke dabei an eine Art verallgemeinerte Klassenkörpertheorie. Während aber in der abelschen Klassenkörpertheorie das „Körpergeschehen" durch Idealnormbildung in die Idealgruppe des Grundkörpers abgebildet und dort invariantenmäßig beschrieben wird, denke ich hier an eine Abbildung und invariantenmäßige Beschreibung des Körpergeschehens in die *Gruppe der normalen Divisionsalgebren* über dem Grundkörper, also in Ihr ureigenstes Kind. Existenz– und Eindeutigkeitssatz dieser „Klassenkörpertheorie" lassen sich leicht formulieren und durch die Existenz gewisser zyklischer Körper beweisen. Jedem Körper wird (anstelle einer Idealgruppe) die Gruppe der von ihm zerfällten normalen Divisionsalgebren zugeordnet. Mein obiger Satz ist dann der Zerlegungssatz dieser Klassenkörpertheorie. Im zyklischen Spezialfall wird die Gruppe der zerfällten Algebren durch die Klassen *zyklischer* Faktorensysteme, d. h. durch die Klassen nach der Gruppe der *Zahl*normen beschrieben. Und meine neue Klassenkörpertheorie geht hier zwar nicht in die klassische Klassenkörpertheorie über, die mit *Idealnormgruppen* arbeitet, wohl aber in eine ihr äquivalente, die das Körpergeschehen durch *Zahlnormgruppen* beschreibt. Der Existenzsatz dieser etwas andersartig ausgesprochenen Klassenkörpertheorie steht im Spezialfall der quadratischen Körper in Teil II meiner (sehr obscuren) früheren Arbeit „Über die Einzigkeit der beiden Fundamentalsätze der elementaren Zahlentheorie" (Crelle **155**, 1926), wo ich zeige, daß das Normenrestsymbol im wesentlichen durch seine Produktbedingung (Rez. Ges.) festgelegt ist, – d. h. eben daß zu jeder Einteilung von der formalen Art der Zahlnormklassen (dort genauer präzisiert) auch wirklich ein sie durch Zahlnormbildung erzeugender Körper gehört.

Doch nun genug von diesen Fantasien, die natürlich noch sehr durchdacht und ausgeführt sein wollen.

Ihre Formulierung des Zyklizitätssatzes mit dem Einbettungsproblem verstehe ich leider noch nicht, da ich das Einbettungsproblem noch nicht verstehe. Dazu wird es jetzt aber hohe Zeit, und ich will diese Woche wirklich darangehen, Ihre zweite Arbeit genau zu studieren. Bis jetzt waren mir — Sie werden es verstehen und verzeihen — die eigenen Gedanken drängender.

Mit herzlichen Grüßen

stets Ihr

Hasse

1.29 05.12.1931, Brauer an Hasse

Dr. Richard Brauer

Königsberg i. Pr., den 5. 12. 31
Loewestr. 2

Sehr geehrter Herr Professor,

Herzlichen Dank für die Mitteilung der Adresse von A.A. Albert. Beiliegend schicke ich Ihnen die zweite Korrektur ein. Eventuell könnte man in 7. bei der Gruppe A aller Algebren (einige Zeilen vor Satz 4) auf meine Notiz im Jahresbericht der D.M.V. **38**, S. 47 (kursiv) hinweisen; es ist mir aber nicht wichtig.

In der Arbeit ist durch Sie zwischen je zwei Abschnitten der Fertigstellung etwas Wesentliches und Schönes hinzugekommen. Satz 5 habe ich früher einmal mit ganz anderen Mitteln zu beweisen versucht, im Anschluß an eine Bemerkung in meiner Arbeit in der M.Z. 28, wo ich eigentlich zufällig auf die Untergruppe der Gruppe aller Faktorensysteme hinweise, die einen festen Körper als Zerfällungskörper besitzen, das ist genau R. Ich habe den Versuch aber bald aufgegeben, weil ich merkte, daß ich keinen vernünftigen Ansatz hatte.

Mit den ergebensten Grüßen
Ihr
R. Brauer.

1.30 30.03.1932, Brauer an Hasse

Dr. RICHARD BRAUER KÖNIGSBERG i. Pr., LOEWESTR. 2 30. 3. 32.

Sehr geehrter Herr Professor!

Für die Übersendung Ihres Manuskripts danke ich Ihnen sehr; ich habe die Arbeit mit stärkstem Interesse und größter Freude gelesen; es ist fabelhaft, wie einfach alles geht. Wenn es Ihnen recht ist, würde ich gern hier im Sommer im Kolloquium über Ihre Arbeit sprechen. Ich weiß allerdings noch nicht ganz, wie es sich machen läßt, da ich sehr weit ausholen müßte. — Von den Einzelheiten in Ihrer Arbeit haben mich am stärksten die Ergebnisse und Beweismethode von (6.5) interessiert.

An Kleinigkeiten möchte ich bemerken, daß die Ausdrucksweise in (1.3): „Die Erweiterung auf K bewirkt eine Reduktion der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}_K$" vielleicht das Mißverständnis hervorrufen kann, daß $\mathfrak{G}_K$ die Algebrenklassengruppe zu K als Zentrum ist. In Wirklichkeit ist es $\mathfrak{G}_K$ nur eine Untergruppe. Ist z. B. Z der Körper der 5. Einheitswurzeln, K der quadratische Teilkörper, so entsteht $(2+\sqrt{5}, Z, S)$ bei K als Grundkörper aus keiner rationalen Algebra durch Erweiterung, wie man schon durch Betrachtung mod. den unendlichen Primstellen erkennt.

Der Satz in (2.5) ist übrigens eine unmittelbare Folgerung aus bekannten Tatsachen über verschränkte Produkte. Ist eine Algebra A als verschränktes Produkt eines Galoisschen Körpers Z mit dem Faktorensystem c dargestellt, ist Z' eine in bezug auf den Grundkörper Galoissche Erweiterung von Z, so kann man eine Algebra der Klasse von A als verschränktes Produkt mit Hilfe von Z' schreiben. Das Faktorensystem c' ist dabei durch $c'_{R,S,T} = c_{G,H,L}$ definiert, wo R, S, T Automorphismen von Z' und G, H, L die induzierten Automorphismen von Z sind. Die Bezeichnung ist dabei wie in meiner letzten Arbeit; ein Beweis steht in meiner Arbeit in der M. Z. **28**, §3; daß dabei von linearen Substitutionen und nicht von verschränkten Produkten die Rede ist, ist natürlich gleichgiltig; man kann übrigens auch den Satz direkt für verschränkte Produkte beweisen. Durch Spezialisierung auf den zyklischen Fall folgt sofort die fragliche Behauptung, man hat nur zu beachten, daß für die charakteristische Größe α gilt: $\alpha = \dfrac{1}{\prod_{\nu=0}^{n-1} C_{\mathcal{S}^\nu, \mathcal{S}^{\nu-1}, \mathcal{E}}}$.

Zu Ihrem Beweis möchte ich bemerken, daß unten auf S. 11 und auf S. 12 im Exponenten von P die Summanden in umgekehrter Reihenfolge zu schreiben sind; die Vertauschbarkeit ist nicht von vornherein gesichert und auch wohl garnicht richtig. Auf der ersten Zeile S. 12 ist ein Schreibfehler, auf der fünften Zeile habe ich gegen das „ersichtlich" Bedenken. Die Tatsache ist zwar richtig, ich sehe aber nicht, wie man sie ganz unmittelbar schließen kann. Uebrigens braucht man die betreffende Tatsache garnicht, wenn man bedenkt, daß die M_Z und M_u sicher eine zu (α^S, Z, S) homomorphe Algebra erzeugen und die erstere Algebra einfach ist.

In (3.3) soll doch wohl im Falle eines unendlichen p die Definition von e_P anders sein. Zu (0.1) gehört doch eigentlich außer den Sätzen in Ihrer Arbeit 5 die allerdings triviale Bemerkung, daß der Körper der $\big(N(p)^{m_p} - 1\big)$–ten Einheitswurzeln über k_p den Grad m_p hat.

Interessant schiene es mir, wenn man die Invarianten einer Algebra kennzeichnen kann, wenn diese als beliebiges verschränktes Produkt gegeben ist.

Mit der Schurschen Frage habe ich mich jetzt erst seit ganz kurzem wieder beschäftigt und bin noch nicht sehr viel weiter, es scheint mir aber garnicht sehr schwer zu sein.

Ich möchte Sie noch bitten, mir den auf mich entfallenden Kostenbeitrag für die Separata und Verschickung der gemeinsamen Arbeit mitzuteilen. Gleichzeitig möchte ich für ein mir übersandtes Separat von Siegel danken.

Mit den besten Grüßen

Ihr sehr ergebener

Richard Brauer.

Zu dem Anhang Ihrer Arbeit würde ich gerne fragen, ob man allgemein die Systeme homogener quadratischer Formen charakterisieren kann, für die das fragliche Prinzip gilt, ob außer den aus der Äquivalenzfrage stammenden Systemen noch andere derartige Systeme bekannt sind?

1.31 02.04.1932, Hasse an Brauer

MATHEMATISCHES SEMINAR DER UNIVERSITÄT MARBURG–LAHN, DEN 2. 4. 32

Lieber Herr Brauer!

Vielen Dank für die pünktliche Rücksendung des Ms. und noch vielmehr für Ihre sehr wertvollen Bemerkungen* dazu. Ich habe sie alle durch entsprechende Änderungen berücksichtigt.

Im einzelnen möchte ich folgendes dazu sagen:

1.) Sie haben natürlich recht, daß im allgemeinen die Erweiterungsgruppe G_K nicht mit der vollen Gruppe der Algebrenklassen über K als Zentrum übereinstimmt. In dem mich nachher speziell interessierenden Falle der p–adischen Erweiterung G_p ist dies allerdings doch der Fall.

2.) Daß der Satz (2.5), den ich mühsam aus Albert's letzter mir in Korrektur vorliegender Arbeit herausdestilliert hatte, in Wahrheit eine einfache Folge aus §3 Ihrer früheren Arbeit in M. Z. **28** ist, hat mich sehr überrascht. Sie haben natürlich völlig recht. Übrigens hatte auch Emmy Noether das wohl nicht bemerkt; denn Ihre Reaktion auf Satz (2.5) war, daß sie selbst sich inzwischen für ihre neue Führertheorie eine entsprechende Verallgemeinerung dieses Satzes auf beliebige verschränkte Produkte überlegt hätte. Natürlich war auch mir selbst klar, daß es sich da um eine allgemeine Tatsache über verschränkte Produkte handele, doch wollte ich ja in dieser Arbeit absichtlich nicht die allgemeine Theorie der verschränkten Produkte entwickeln, und so war es mir nicht der Mühe wert, den allgemeinen Fall zu entwickeln.

3.) Mit der Reihenfolge der Potenzen von S_0 im Exponenten von P haben Sie ganz recht, das war eine kleine Nachlässigkeit von mir.

4.) Ihre Bedenken gegen das „ersichtlich" sind unbegründet. Ich schließe so: Angenommen, es gäbe eine Relation

$$M_{Z_0} + M_u M_{Z_1} + \ldots + M_u^{n_0-1} M_{Z_{n_0-1}} = 0\,.$$

Setzt man in ihr die Definition $M_u = u_0 P$ ein, so folgt aus der linearen Unabhängigkeit der u_0–Potenzen von Z_0, daß alle Matrizen

$$P^{(v)} M_{Z_v} = 0 \qquad (v = 0,\, 1,\, \ldots,\, n_0 - 1)\,.$$

Hier bezeichnet $P^{(v)}$ die symbolische Potenz von P mit dem Exponenten $S_0^v + S_0^{v-1} + \ldots + S_0 + 1$. Wegen $|P| \neq 0$ haben auch alle diese symbolischen Potenzen Reziproke, sodaß auf $M_{Z_v} = 0$ für alle v geschlossen werden kann, w. z. b. w. — Aber natürlich ergibt sich dasselbe auch einfacher aus der Einfachheit von $(\alpha^S,\, Z,\, S)$.

5.) Daß der Körper der $N(p)^{m_p} - 1$–ten Einheitswurzeln über k_p den Grad m_p hat, habe ich doch aber explizit in (0.1) ausgesprochen!

6.) Die Definition von f_p und e_p in (3.3) ist wirklich so gemeint. Aber Artin hat mich bei seinen letzten Vorträgen in Göttingen überzeugt, daß es richtiger ist, den unendlichen Primstellen immer den Grad 1 zuzuordnen, dafür aber eine Verzweigungsordnung 1 oder 2, je nachdem sie reell oder komplex sind. Natürlich meine ich an der angegebenen Stelle die Relativbegriffe in bezug auf eine gegebene Primstelle p von k, die ich stillschweigend als reell vorausgesetzt habe. Ich habe nun diese Voraussetzung explizit hinzugefügt.

5.) Was die Kennzeichnung der Invarianten einer Algebra anbetrifft, die als beliebiges verschränktes Produkt gegeben ist, so ist das in der Tat eine sehr wichtige Frage. Leicht zu beantworten ist sie für alle nicht in der Diskriminante des betr. galoisschen Körpers aufgehenden Primideale: hier reduziert sich das Faktorensystem auf den zur Zerlegungsgruppe gehörigen zyklischen Ausschnitt, und man kann die Invariante durch die zugehörige Frobeniussubstitution des galoisschen Körpers ausdrücken. Dagegen habe ich keine Ahnung, wie die Sache für die Diskriminantenteiler läuft.

6.) Außer den aus Äquivalenzfragen entspringenden homogenen Systemen quadratischer Gleichungen kenne ich keine anderen, für die mein Fundamentalprinzip erwiesen ist. – Siehe dazu auch meine eben in den Math. Ann. erschienene Bemerkung zu der Wegnerschen Arbeit. (Separatum davon, und von der amerikanischen Arbeit, sandte ich gestern ab. Beim letzteren verzeihen Sie bitte die unzähligen Druckfehler sowie einige sachlichen Unvollständigkeiten; die Amerikaner haben einfach gedruckt, ohne die etwas verzögerte Rücksendung meiner Korrekturbogen abzuwarten, sodaß ich überhaupt keine Korrektur anbringen konnte.)

7.) Kosten sind für die Separataversendung nicht entstanden, d. h. das Marburger Seminar hat sie mit Dienstmarken und die ausländischen in bar getragen. Eine Verrechnung dieser Kleinigkeit zwischen den Seminaren Königsberg und Marburg kommt natürlich nicht in Frage („knif").

8.) Es wird mich sehr freuen, wenn Sie in Ihrem Kolloquium über meine Resultate berichten. Hoffentlich haben Sie bis dahin das n^h auf n oder noch tiefer heruntergedrückt.

9.) Die Geschichte des Siegelschen Separatums ist die: Als bereits alle Bogen des Hensel–Festbandes ausgedruckt waren, schrieb mir Siegel plötzlich, daß er nur 10 Separata seiner Arbeit wünsche. Da sie bereits in der Anzahl 100 gedruckt waren, konnte ich ihm diesen Wunsch, den er mit dem geringen Volumen seiner neuen Wohnung begründete, nicht erfüllen. So erhielt er 100. Mitte Januar erhalte ich eine Sendung aus Frankfurt, in der die zuviel gelieferten 90 Separata, jedes mit der gleichen handschriftlichen Widmung an mich und einer Ordnungszahl versehen lagen. Natürlich wußte ich nichts Besseres zu tun, als sie allen Interessenten zuzusenden. Bitte um Verbreitung dieser Geschichte in Königsberg!

Herzliche Grüße allerseits, Ihr

H. Hasse

1.32 17.04.1932, Brauer an Hasse

Dr. RICHARD BRAUER

KÖNIGSBERG i. Pr., den 17. 4. 32.
LOEWESTR. 2

Sehr geehrter Herr Professor,

Herzlichen Dank für Ihren Brief*. Durch den Punkt 4), der sich auf das „ersichtlich" bezieht, bin ich allerdings noch nicht überzeugt. Man hat doch die lineare Unabhängigkeit der ersten n (und nicht nur n_0) Potenzen von M_u in bezug auf die M_z zu zeigen. Beim Einsetzen von $M_u = u_0 P$ kommt man dann meiner Meinung nach auf eine s–gliedrige Relation, deren Inhalt besagt, daß die ersten s Potenzen von $P^{(n_0)}$ linear unabhängig sind. Man kann das auch direkt zeigen, es scheint mir doch aber etwas kompliziert zu werden. — Das Ganze ist ja jedenfalls nicht wichtig. Daß der Punkt 6) so gemeint war, war mir schon aus dem Zusammenhang klar gewesen. Ich wollte nur darauf hinweisen, daß die Definition leicht mißverstanden werden konnte.

Beiliegend sende ich Ihnen die Korrektur zurück; ich hätte von der Arbeit gern 200 Separate. Bei der ersten Arbeit hatte ich leider vergessen, die Anzahl der Separate anzugeben. Ich vermute, daß es jetzt schon zu spät ist. Sollte es aber noch gehen, so hätte ich auch gern 200 Separate davon, aber nur, falls es Ihnen keine besonderen Umstände macht.

Mit den ergebensten Grüßen

Ihr
Richard Brauer.

1.33 25.04.1932, Hasse an Brauer

MATHEMATISCHES SEMINAR
DER UNIVERSITÄT

MARBURG–LAHN, DEN 25. 4. 32

Lieber Herr Brauer!

Mit Ihrem Einwand* gegen meinen Beweis der linearen Unabhängigkeit scheinen Sie tatsächlich recht zu haben. Ich werde also die Sache bei der Korrektur richtig stellen.

Die Korrektur Ihrer Schiefkörper–Arbeit habe ich gestern gelesen und noch ein paar kleine Druckfehler, die Sie hatten stehen lassen, herausgebracht. Ich lasse Ihnen also davon 200 Separata herstellen. Die erste Arbeit ist leider bereits ausgedruckt, so daß es für die Herstellung von mehr Separata zu spät ist.

Neulich hatte ich einen Brief von A. A. Albert, in dem er Ihnen einen Fehler in Zeitschr. **31** nachweist. Sie setzen dort:

$$A = B \times C$$

$$\begin{array}{rcl} B & = & (1,\, i,\, j,\, ij), \quad ji = -ij, \quad i^2 = u, \quad j^2 = b \quad \text{in } K \\ C & = & (1,\, x,\, y,\, xy), \quad yx = -xy, \quad x^2 = v, \quad y^2 = a \quad \text{in } K, \end{array}$$

wo $K = F(u,v)$ mit reellem F und unabhängigen Unbestimmten u, v.

Sie stellten fest, daß A eine Divisionsalgebra ist, wenn die Körper $K(\sqrt{a})$ und $K(\sqrt{b})$ verschieden sind. Albert hält Ihren Beweis für falsch und führt als Gegenbeispiel an:

$$a = -v\,, \quad b = -u\,, \quad \text{wobei dann gilt:} \quad (i+j)^2 = u + ij + ji - u = 0\,.$$

Er findet Ihren Fehler auf S. 747, wo Sie schließen, daß alle ξ_ν durch u teilbar sind. Er meint, Sie hätten dabei nicht beachtet, daß in den ξ_ν Irrationalitäten vorkommen, deren in keiner Weise beschränkt sei.

Albert führt dann aus, er habe nunmehr *zum ersten Mal in der Literatur* (Darauf scheint er einen gewissen Wert zu legen) durch eine Anwendung seiner Arbeiten bewiesen, daß es nicht zyklische normale Divisionsalgebren gäbe.

Vielleicht hat er Ihnen ja auch selbst geschrieben, ich wollte aber doch auf alle Fälle Ihnen von dem Inhalt seines Schreibens an mich Kenntnis geben.

Mit besten Grüßen

stets Ihr

H. Hasse

PS. MacDuffee schreibt mir:

> I wish to thank you, and also Professor Brauer and Noether, for sending me a reprint of your article „Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren“.
>
> This theorem certainly goes a long way toward clarifying one of the mysterious regions in the theory of linear algebras.

1.34 27.04.1932, Brauer an Hasse

Dr. RICHARD BRAUER

KÖNIGSBERG i. Pr., LOEWESTR. 2 den 27. 4. 32.

Sehr geehrter Herr Professor,

Herzlichen Dank für Ihren Brief*, vor allem für die Mitteilung von Alberts Schreiben. Albert selbst hat mir nicht geschrieben, sodaß es mir sehr angenehm war, seinen Einwand kennen zu lernen. Mein Beweis ist meiner Meinung nach vollständig in Ordnung. Mir ist aber bei der Konstruktion eine Ungenauigkeit unterlaufen, und darauf beruht wohl das Mißverständnis (ich nenne K den Körper, der aus dem Körper der rationalen Zahlen durch Adjunktion von zwei algebraisch unabhängigen Transzendenten u und v entsteht, und nehme dann zwei Zahlen a und b aus K mit irgend welchen besonderen Eigenschaften. Es soll heißen: *rationale Zahlen* a, b. Entstanden ist das Versehen wohl dadurch, daß ich bei u, v an Unbestimmte dachte und „Zahl" im Gegensatz dazu meinte. Ich gebe auch noch extra als Beispiel $a = 2$, $b = 3$ an). Mir scheint die Sache zu unbedeutend zu sein, als daß ich in der Zeitschrift eine Berichtigung geben müßte, da auch aus dem Zusammenhang hervorgeht, wie ich es meine. Der Fehler, den Albert anzunehmen scheint, ist gar zu blöde.

Besonders dankbar bin ich Ihnen für das Ausmerzen von Druckfehlern; ich glaubte wirklich die Korrektur gründlich gelesen zu haben.

Daß es nichtzyklische normale Divisionsalgebren gibt, wird Albert wohl tatsächlich zum ersten Mal bewiesen haben. Ich habe mich mit der Frage nicht weiter beschäftigt, nachdem ich im ersten Satz der Arbeit von Albert in den Annals of Math. **30**, S. 621 gelesen hatte, daß Cecioni derartige Beispiele angegeben hätte. Da keine Literaturangabe dort steht, konnte ich es nicht genauer nachprüfen. Aber damit muß ja Albert am besten Bescheid wissen, ich persönlich kenne keine Stelle in der Literatur. Ich selbst habe mich verschiedentlich bemüht, Beispiele von normalen Divisionsalgebren zu finden, die sich überhaupt nicht als verschränktes Produkt darstellen lassen.

Ich bin aber auf große Schwierigkeiten gestoßen, und zwar solche rechnerischer Natur. Trotzdem bin ich überzeugt, daß es derartige Beispiele gibt.

Mit den ergebensten Grüßen

Ihr

Richard Brauer

1.35 16.05.1932, Brauer an Hasse

Dr. Richard Brauer

Königsberg i. Pr., d. 16.5.32
Loewestr. 2

Sehr geehrter Herr Professor,

Beiliegend schicke ich Ihnen die Korrektur zurück, die hoffentlich jetzt in Ordnung ist. Ich bin Ihnen sehr dankbar, daß Sie mir die Revision noch einmal zugeschickt haben. Einerseits war es für mich sehr nützlich, Ihre Verbesserungen zu sehen; mit einigem, worauf es jetzt ankommt, wußte ich vorher nicht recht Bescheid. Andererseits habe ich jetzt noch beim Durchsehen einige Fehler gefunden. Die Anmerkung 29 auf S. 63 soll so lauten, wie sie gedruckt war. Wenn man die im relativ zyklischen Fall üblichen Bezeichnungen gebraucht, so meine ich: K besteht aus schwach-ambigen Idealen, K^n enthält ein stark-ambiges Ideal.

Es handelt sich bei dem Ganzen um die folgende nicht sehr tief liegende Bemerkung: Ist c ein zu einem Normalkörper über K gehöriges aus n-ten Einheitswurzeln bestehendes Faktorensystem, das dem Einheitssystem assoziiert ist, $c_{\alpha\beta\gamma} = k_{\alpha\beta}k_{\beta\gamma}$, so folgt $k^n_{\alpha\gamma} = k^n_{\alpha\beta}k^n_{\beta\gamma}$. Daraus ergibt sich nach Speiser $k_{\alpha\beta} = w_\alpha/w_\beta$, wo w eine Zahl des Normalkörpers bedeutet und durch die angehängten Indizes immer die konjugierten bezeichnet werden sollen. Ist $(w) = \mathfrak{a}^n\mathfrak{c}$, wo in $\mathfrak{c}$ kein Primideal in einer durch n teilbaren Potenz aufgeht, so folgt $\mathfrak{c}_\alpha = \mathfrak{c}_\beta$, $w_\alpha = k_{\alpha\beta}w_\beta$. Daher stimmt die Idealklasse K von $\mathfrak{a}$ mit ihren relativkonjugierten überein, ihre n-te Potenz enthält ein Ideal $\mathfrak{c}^{-1}$, das mit seinen relativkonjugierten übereinstimmt. Durch K sind die Zahlen $k_{\alpha\beta}$ bis auf Einheiten als Faktoren bestimmt; diese Einheiten müssen in der entsprechenden Weise algebraisch konjugiert sein. Geht man also von allen die Bedingung erfüllenden Idealklassen aus, so erhält man alle in Frage kommenden Zahlen $k_{\alpha\beta}$ und damit alle aus n-ten Einheitswurzeln bestehenden Faktorensysteme. (Übrigens erhält man außerdem noch gewisse andere leicht angebbare Systeme).

Mit nochmals bestem Dank und den ergebensten Grüßen
Ihr

Richard Brauer

Entschuldigen Sie bitte, daß ich Ihnen soviel Arbeit gemacht habe!

1.36 22.10.1933, Brauer an Hasse

Königsberg, d. 22.10.33

Sehr geehrter Herr Professor,

Für Ihren Brief und vor allem für Ihr freundliches Interesse für mich danke ich Ihnen herzlich. Meine Lage ist die folgende: Ich habe bereits im Sommersemester auf dringende Empfehlung des Ministers nicht mehr gelesen; im September wurde mir dann endgültig die venia entzogen. Meine hiesige Assistentenstelle wurde mir zum 31. 10. 33 gekündigt, das Gehalt bekomme ich bis zum 1. 2. 34 voll, bis zum 1. 4. 34 zu 3/4, falls ich keine andern Einnahmen aus Dienstverträgen u. s. w. habe.

Nun habe ich vor 14 Tagen durch Vermittlung von J. von Neumann und Veblen telegraphisch eine Einladung bekommen, bis zum Juni 1934 als visiting professor an die Kentucky-Univerität in Lexington zu kommen; ich bekomme für Überfahrt und Unterhalt 1500 Dollars. Ich habe die Einladung angenommen und will noch in dieser Woche von Königsberg abfahren. Wie weit mein hiesiges Gehalt dadurch betroffen wird, weiß ich noch nicht, da der hiesige Kurator zur Zeit verreist ist.

Ich bin verheiratet, habe zwei Kinder im Alter von $6\frac{1}{2}$ und $1\frac{1}{2}$ Jahren. Mein Gehalt belief sich bis zum 1. August auf etwa 250 RM (nach Steuerabzug), jetzt ist es ein wenig niedriger. Dazu kamen in früheren Semestern sehr erhebliche Kolleggelder. An sonstigen Einnahmen kommen noch dazu eine monatliche Summe von 100 RM, die mir meine Mutter aus meinem von ihr verwalteten väterlichen Erbteil zahlt. Ob sie dazu noch lange in der Lage sein wird, kann ich z. Zt. nicht übersehen. Schließlich habe ich noch einen Vertrag mit Springer über ein zweibändiges Buch über Algebra und Galoissche Theorie unter Verwendung der Schurschen Vorlesungen. Ich hoffe im nächsten Jahr daraus Einnahmen zu haben, falls ich in Amerika Zeit und Gelegenheit habe, an dem Buch zu arbeiten. Meine Frau und die Kinder muß ich hier zurücklassen.

Meinem Bruder, der Kriegsteilnehmer und Inhaber des Verwundetenabzeichen und des E.K. ist, ist die venia geblieben. Seine Assistentenstelle ist zunächst am 1. Juli zum 1. Januar vorsorglich genehmigt worden. Es ist

Verlängerung der Stellung beantragt worden, eine Entscheidung ist nach den letzten Nachrichten, die ich hatte, noch nicht gefallen, doch sieht mein Bruder seine Lage nicht pessimistisch an.

Meine Königsberger Stellung ist im Augenblick noch nicht besetzt. Eine Besetzung kann möglicherweise sehr schnell erfolgen; Prof. Szegö kommt morgen von der Reise zurück.

Zusammenfassend möchte ich sagen: Ich habe keine akuten finanziellen Sorgen. Schlimm ist für mich das Ungewisse meiner Zukunft und natürlich im Augenblick der Entschluß, Deutschland zu verlassen.

Indem ich Ihnen noch einmal auf das herzlichste danke, und indem ich hoffe, daß es Ihnen und Ihrer Familie recht gut geht, verbleibe ich mit den ergebensten Grüßen

Ihr Richard Brauer.

1.37 22.08.1934, Brauer an Hasse

Lexington, den 22.8.34

Sehr geehrter Herr Professor,

Zu Ihrer Berufung nach Göttingen möchte ich Ihnen (reichlich verspätet) herzlich gratulieren. Ich wünsche Ihnen, daß Sie Ihr neuer Wirkungskreis recht befriedigt. Gleichzeitig möchte ich Ihnen bestens für Ihre liebenswürdigen Zeilen danken; von Ihrem Angebot, im Crelle zu publizieren, werde ich sehr gern bei geeigneter Gelegenheit Gebrauch machen.

Ich habe hier das letzte Jahr hauptsächlich dazu benutzt, mich so einigermaßen in Amerika einzuleben. Die Leute hier sind riesig entgegenkommend und hilfsbereit, und das war dabei natürlich eine große Erleichterung. Das Gesicht einer amerikanischen Universität von der Größe und Lage von Lexington ist sicherlich anders als das einer deutschen Universität. Aber mehrere der Leute hier verfügen doch über großes wissenschaftliches Interesse; auch die Biliotheksverhältnisse sind nicht schlecht.

Für das nächste Jahr gehe ich als Assistent zu Weyl. Das ist natürlich wissenschaftlich wundervoll, und ich bin sehr froh darüber. Wir (d.h. meine Familie, die seit einiger Zeit hier ist, und ich) werden in kurzem nach Princeton übersiedeln. Auf den Betrieb dort bin ich sehr gespannt.

mit den besten Grüßen
Ihr
Richard Brauer

1.38 09.10.1934, Hasse an Brauer

H./Tr. 9. Oktober 34

Herrn

Dr. R. B r a u e r ,

Lexington (Ky) USA.

472 East Mainstreet.

Lieber Herr Brauer!

Herzlichen Dank für Ihren Glückwunsch* zu meiner Berufung nach Göttingen. Die Aufgabe, die mir hier gestellt ist, ist unendlich schwer.

Für Sie freue ich mich, dass Sie nächstes Jahr aus der mathematischen Provinz in die mathematische Grosstadt kommen. Ich wünsche Ihnen alles Gute dazu. Es soll mich jederzeit freuen, von Ihnen zu hören und über die Fortschritte Ihrer wissenschaftlichen Untersuchungen zu erfahren.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.39 08.01.1935, Hasse an Brauer

Prof. Dr. H. H a s s e.

Göttingen, den 8. Januar 1935.
Bunsenstr. 3–5

Herrn
Prof. Dr. R. B r a u e r,

472 East Mainstreet
Univ. of Kent.
L e x i n g t o n (Kent.)
USA.

Lieber Herr Brauer!

Ich trete heute an Sie mit der Bitte heran, an der Neuauflage des Bandes 1 der Enzyklopädie mitzuarbeiten und zwar den Artikel B 8: Algebra der hyperkomplexen Zahlensysteme zu übernehmen. (S. die Ihnen mit gleicher Post zugehenden Drucksachen) Es wird Sie interessieren zu wissen, dass wir die übrigen Artikel des Abschnittes B wie folgt vergeben wollen:

B 1	Schönhardt,	B 2	Sperner,	B 3	Perron,	B 4	Magnus,	B 5	Baer
B 6	E. Noether,	B 7	Krull,	B 9	Deuring,	B 10	〃 ,		
B 11	〃 ,	B 12	? ,		ferner	C 5	Hasse.		

Damit Sie einen ungefähren Anhalt haben über den Raum, der Ihnen dabei zur Verfügung steht, möchte ich Ihnen sagen, dass der Verleger ursprünglich an einen Umfang von 40 Bogen für den gesamten neuen Band gedacht hat.

Ich bitte Sie nun, mir möglichst bald zu schreiben, ob Sie den genannten Artikel übernehmen wollen und wenn dies der Fall ist, wie hoch Sie den Umfang in erster Annäherung veranschlagen würden und zu welchem Zeitpunkt Sie das fertige Manuskript einreichen könnten.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

Hasse

1.40 09.04.1935, Hasse an Brauer

Prof. Dr. H. Hasse. Göttingen, den 9. April 1935
Bunsenstr. 3–5

Herrn
Prof. Dr. Richard Brauer

472 East Mainstreet
University of Kentucky
L e x i n g t o n (Kent.)

Lieber Herr Brauer!

Herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief vom 3. Februar mit der Zusage Ihrer Mitarbeit an der Neuauflage der Enzyklopädie.

Die Abgrenzung des Stoffes zwischen Ihrem Artikel B. 8 und dem Deuringschen B. 9 ist in der Tat ziemlich willkürlich, da man viele Beweise der Strukturtheorie mit Hilfe der Darstellungstheorie macht. Ich hatte mir gedacht, dass Sie die Strukturtheorie soweit entwickeln, wie es bei Vermeiden von unnötigen Schwierigkeiten ohne Darstellungstheorie geht. Natürlich ist die reguläre Darstellung erlaubt. Man pflegt sie ja ganz im Anfang einzuführen. Auck können Sie die absolut irreduzible Darstellung normaler einfacher Algebren benutzen, z. B. zur Einführung des Begriffes von reduzierter Norm und Spur und des darauf gegründeten Begriffes der Diskriminante. Nötigenfalls können auch Verweise auf den folgenden Deuringschen Artikel gemacht werden. Diese Angleichung liegt natürlich später hauptsächlich in meinen Händen, wenn ich beide Artikel vor mir habe. Wir können uns aber die Arbeit erleichtern, weil Deuring aller Voraussicht nach bald nach Göttingen kommt und ich dann, während er an seinem Artikel arbeitet, laufend mit ihm Fühlung nehmen kann. Zunächst einmal scheint es mir erforderlich, dass von Ihnen beiden je ein ungefährer Dispositionsentwurf vorliegt, von Deuring habe ich einen solchen bereits eingefordert. Bitte senden Sie mir doch auch einen solchen unter Berücksichtigung der vorher gegebenen allgemeinen

Richtlinien. Natürlich würde es im Interesse der Sache gut sein, wenn Sie auch direkt mit Deuring in Verbindung träten.

Wegen des Abschlusses eines Vertrages wird Teubner in Kürze an Sie herantreten.

Ihre neue Arbeit zur Kleinschen Theorie der algebraischen Gleichungen lese ich augenblicklich mit grossem Interesse. Sie ist für mich hundertmal klarer als das von Tschebotareff zu demselben Problem in seinen Züricher Vortrag Gesagte und Veröffentlichte.

Mit herzlichen Grüssen

stets Ihr

Hasse

1.41 15.04.1935, Hasse an Brauer

Prof. Dr. H. Hasse.

Göttingen, den 15. April 1935.
Bunsenstr. 3–5

Herrn

Prof. Dr. R. B r a u e r ,

The Institute for Advanced Study
School of Mathematics
Fine Hall
P r i n c e t o n (N. J.)

Lieber Herr Brauer!

Unsere Briefe haben sich gekreuzt. Ich will Ihnen aber doch gleich antworten.

1.) Mit den Vorarbeiten an dem Enzyklopädie–Artikel mögen Sie ruhig schon beginnen. Ich bin gern einverstanden, dass Sie die Darstellung mehr systematisch aufziehen ohne allzu grosse Rücksicht auf die für die Beweise einzuhaltende Reihenfolge und die Beweise selbst. Die Methoden zu den Beweisen sollten allerdings doch kurz angegeben werden. Die Aufnahme der verschränkten Produkte in Ihren Artikel über Darstellungstheorie halte ich für unbedingt geboten. Sie gehören zweifellos methodisch primär in die Algebra der hyperkomplexen Systeme. In dem Artikel über Darstellungstheorie kann Deuring ja dann auf die Bedeutung der verschränkten Produkte und der Faktorensysteme für die Darstellungen kurz eingehen.

2.) Würden Sie ev. auch den Artikel B. 12 übernehmen? Und wie denken Sie über B. 11? Ginge es wohl an, B. 11 unverändert aus der 1. Auflage zu übernehmen, oder scheint Ihnen eine Modernisierung der Invariantentheorie notwendig und möglich? Bitte sehen Sie die Anfrage wegen B. 12 bis auf weiteres noch nicht als offiziell an. Ich weiss nicht, ob Hecke nicht inzwischen etwas anderes ins Auge gefasst hat. Sie hören bald endgültig von mir darüber.

3.) Ihre Anfrage wegen der zyklischen Körper der Charakteristik p vom Grade p^n, beantworte ich am einfachsten damit, dass ich Ihnen gleichzeitig als Geschäftspapier mein Konzept eines Briefes an Prof. Albert zuschicke; ich möchte Sie allerdings bitten, mir dieses Konzept möglichst bald wieder zurückzusenden, da es die einzigen Aufzeichnungen sind, die ich darüber habe.

4.) Ihre Ausarbeitung über Gruppen linearer Substitution, die ich damals ausführlich gelesen und in meinem Seminar durchgenommen habe, will ich gern im Crelle aufnehmen. Ich begrüsse Ihre Anregung dazu, nur würde ich vorschlagen, dass Sie die ganze Sache noch einmal überarbeiten, denn sicherlich hat Ihnen die Entwicklung der letzten 5 Jahre gezeigt, dass man manches wohl noch glatter machen kann. Auch würden gelegentliche Hinweise auf die Beziehungen der Begriffe und Sätze zu denen der Algebrentheorie den Wert des Ganzen erhöhen. Natürlich müssten Sie eine Einleitung über die besondere Art dieser Veröffentlichung voranschicken.

Mit herzlichen Grüssen

stets Ihr

Hasse

1.42 18.04.1935, Brauer an Hasse

Princeton, den 18. April 1935

Lieber Herr Hasse,

Sie werden Näheres über Emmy Noethers Tod erfahren wollen und ich möchte Ihnen berichten, was ich weiß. Am 2. April war sie zum letzten Mal hier, so frisch wie immer. Sie erzählte vergnügt von einem kleinen Ausflug mit einigen ihrer Schülerinnen, daß sie mehr aushielte und kräftiger sei als die jungen Mädchen. Als sie am Nachmittag in ihrem Seminar einen Beweis auf die nächste Stunde verschob, hätte es niemand glauben können, daß diese Stunde nie mehr sein würde. Am darauf folgenden Sonnabend schrieb sie, daß sie sich einer Operation unterziehen müsse und leider ein paar Male ihr Seminar ausfallen müsse, sie würde es aber im Mai, wie sie denke, fortsetzen können und hoffe, daß ihre Hörer noch alle da seien. Bei der Operation handle es sich um die Entfernung eines Myoms. Der Ton ihres Briefes schien anzudeuten, daß sie die Sache sehr leicht nahm. Sie schrieb auch noch über einige ganz nebensächliche Dinge, die sie nun nicht erledigen könne. Ob sie sich selbst Gedanken machte, weiß niemand. Sie wissen ja auch, daß Emmy nicht liebte zu zeigen, daß sie beunruhigt war. Natürlich waren ihre Freunde hier ziemlich besorgt.

Die Operation fand am 10. April statt und schien glatt von statten gegangen zu sein. Am nächsten Tag hatte sie zwar naturgemäß starke Schmerzen, erholte sich dann aber gut. Eine Bryn Mawrer Kollegin, die sie am Sonnabend früh besuchte, fand sie besonders vergnügt und optimistisch. Am Nachmittag wurden keine Besucher mehr hereingelassen, das Befinden hatte sich plötzlich stark verschlechtert. Worum es sich handelte, wissen wir hier nicht genau, die Erzählungen und Nachrichten aus Bryn Mawr geben kein klares Bild. Am Sonntag hieß es, daß eine Embolie vorliege, aber das stimmte mit anderen Erzählungen nicht überein. Es ist ja nun auch gleichgültig geworden. Sicher war am Sonntag der Zustand fast ganz hoffnungslos und Emmy hat sich sehr quälen müssen. Sie war aber höchstens bei halbem Bewußtsein. Am frühen Nachmittag ist sie dann gestorben. Ob sie sich selbst noch über die Nähe des

Todes klar geworden ist, läßt sich nicht sagen. Man darf hoffen, daß es nicht der Fall war.

Über das letzte Jahr hier ist zu sagen, daß Emmy sich sehr wohl gefühlt hat. Sie hatte sich ihre Sachen aus Göttingen zum großen Teil herüberkommen lassen und hatte sich riesig nett und behaglich eingerichtet. Bryn Mawr war stolz auf sie und suchte ihr alles ganz nach ihrem Geschmack einzurichten. Es bestand der Plan, eine dauernde Forschungsprofessur für sie zu begründen. Sie hatte einen Kreis von Schülerinnen, die mit allem Fleiß Klassenkörpertheorie mit ihr arbeiteten. Außerdem hatte sie hier in Princeton ein Seminar über Klassenkörpertheorie. Ein junges Mädchen hat gerade noch eine Dissertation bei ihr in Bryn Mawr fertig machen können, Miss Stauffer. Emmy hatte sie auch menschlich sehr in ihr Herz geschlossen. In Bryn Mawr und in Princeton hat Emmy viele Freunde gefunden.

Die Anerkennung, die sie so sehr allgemein fand, ist ihr nicht ganz gleichgültig gewesen. Besonders freute es sie, daß man in ihr nicht nur die einzigartige Mathematikerin feierte, sondern sie in jeder Beziehung ganz voll nahm. Sie selbst interessierte sich hier für viele Dinge außerhalb der Mathematik.

Das einzig Trübe war für Emmy das starke Heimweh nach Göttingen und ihren Freunden. Sie wollte im Sommer nach Göttingen fahren und beschäftigte sich schon viel in Gedanken mit dieser Reise. Sie sprach sehr viel von Ihnen. Ihr Interesse konzentrierte sich ganz stark auf Ihre Arbeiten über algebraische Funktionen, sie malte sich mit Vorliebe aus, wie Sie die Theorie gestalten würden. Daneben war sie auch natürlich an dem Werk ihrer andern Freunde und Schüler interessiert, besonders noch an Deuring. Jeder Brief aus Deutschland war eine sehr große Freude für sie. Bis in die letzten Tage hat sie sich damit beschäftigt, wie es mit dem Fortkommen und der Zukunft ihrer einzelnen Schüler aussehen würde. An alle hat sie in gleicher Weise wie früher gedacht.

Persönlich bin ich glücklich, daß ich diesen Winter in ihrer Nähe habe verleben können. Meine Frau und ich haben das Glück gehabt, ihr menschlich sehr nahe treten zu dürfen. Wir haben einen sehr lieben Freund in ihr verloren.

mit herzlichsten Grüßen
Ihr
Richard Brauer

Wegen vieler Fragen, die noch entstehen werden (wie wissenschaftlicher

Nachlaß) werde ich Ihnen noch schreiben. – Emmy Noethers Freunde in Deutschland sind doch wohl alle benachrichtigt? Es war nur an Sie telegrafiert worden.

1.43 30.06.1935, Brauer an Hasse

30. Juni 1935.

Lieber Herr Professor Hasse,

Hoffentlich sind Sie mir nicht böse, daß ich Ihnen nicht eher auf Ihren Brief geantwortet habe. Ich war in der letzten Zeit arbeitsmäßig besonders stark belastet, so daß ich zu allem nur mit starker Verzögerung gekommen bin.

Ich schicke Ihnen beiliegend eine vorläufige Disposition meines Encyklopädieartikels. Ich denke, den Artikel bis Mitte 1936 fertig stellen zu können; ich höre von Teubner, daß dies der in Aussicht genommene Termin ist. Die Länge des Artikels schätze ich auf 24 Seiten. Dabei habe ich für die 10 Abschnitte der Reihe nach die folgenden Seitenzahlen angesetzt: 2, $1^1/_2$, $1^1/_2$, 2, $3^1/_2$, $5^1/_2$, 2, $1^1/_2$, 3, $1^1/_2$. Für etwaige Abänderungsvorschläge oder Anregungen wäre ich Ihnen sehr dankbar.

Sie fragen mich nach meiner Meinung bezüglich B 11 und B. 12 an und ob ich bereit wäre, eventuell B. 12 zu übernehmen. Ich wäre dazu nur im äußersten Notfall bereit, d. h. wenn absolut niemand anderes den Artikel übernehmen würde. Die starke arbeitsmäßige Belastung, die ich oben erwähnte, wird nämlich mindestens bis Mitte nächsten Jahres andauern, sodaß ich keine neuen Verpflichtungen übernehmen möchte. (Diese Belastung kommt hauptsächlich daher, daß ich mit Springer einen Vertrag auf Herausgabe eines zweibändigen Buches über Algebra habe. Dazu kommt, daß für mich wieder ein Umzug, diesmal nach Toronto, und ein Einleben und Einarbeiten in neue Verhältnisse bevorsteht). Ein zweiter wesentlicher Grund für meine Abneigung, den Artikel zu übernehmen ist, daß ich gegen einen Teil der sehr umfangreichen Literatur auf diesem Gebiet eine Abneigung empfinde und also nicht der Mann bin, sachlich darüber zu berichten.

Eine gründliche Neubearbeitung von B. 12 erscheint mir unbedingt notwendig. Es wird aber sicher sehr schwer sein, jemanden zu finden, der diesen Artikel übernehmen kann und will. Van der Waerden ist wohl nicht dazu bereit?

Ich schicke Ihnen gleichzeitig die Kopie Ihres Briefes an A. A. Albert zurück. Ich konnte es leider nur flüchtig durchsehen; es scheint sehr interessant zu sein. Ich hatte von diesem Brief von Emmy Noether gehört. Sie hat Ihnen doch noch ein paar Bemerkungen dazu geschrieben. Was ich gemeint hatte, ist etwas anders. Frl. Stauffer, Schülerin von Emmy Noether, die gerade noch bei ihr promoviert hatte, will eventuell in dieser anderen Richtung etwas weiter arbeiten.

Ich habe jetzt Teile des Nachlasses von Emmy Noether hier. Viel ist leider nicht vorhanden. Sie hatten sich liebenswürdigerweise bereit erklärt, den Nachlass durchzusehen. Ich schicke Ihnen die beiden einzigen zusammenhängenden Sachen zu:

1) Ein vor einer Reihe von Jahren entstandenes Manuskript: Idealdifferentiation und Differente; ich denke etwa aus dem Jahr 1926. Dieses ist damals nicht veröffentlicht worden. Emmy wollte es jetzt umarbeiten und veröffentlichen. Verschiedene Randbemerkungen zeigen, in welcher Richtung sie sich die Umarbeitung dachte. Diese Bemerkungen finden sich hauptsächlich in dem 2. Exemplar; einige aber auch im 1. Ich schicke beide Exemplare ein. Meine persönliche Ansicht ist, daß man die Arbeit in der ursprünglichen Form veröffentlichen soll, auch die Sachen, die Emmy als überflüssig streichen wollte. In einem Anhang könnten dann von einem Bearbeiter die beabsichtigten Kürzungen, Aenderungen besprochen und auch Bemerkungen zugefügt werden. Ich hörte, daß Deuring mit dem Inhalt der Arbeit und Emmys Aenderungsabsichten genau vertraut ist. Er wäre dann wohl der gegebene, diesen Anhang zu schreiben. Sonst kämen wohl noch van der Waerden oder eventuell auch Grell in Frage. Wenn niemand anderes bereit ist, könnte im schlimmsten Fall auch ich die Abfassung dieses Anhangs übernehmen.* Als Zeitschriften würde ich entweder Math. Annalen, Crelle oder Annals of Math. vorschlagen.
*) *In diesem Fall bitte ich, mir die Manuskripte zurückzuschicken.*

2) Die Notizen für Emmys Seminar in Bryn Mawr und in Princeton über Klassenkörpertheorie. Mein Eindruck ist, daß vom Inhalt nichts zur Veröffentlichung in Frage kommt, da die Abweichungen von der vorhandenen Literatur nicht erheblich sind. Die einzige Ausnahme ist in der Einleitung vielleicht die Behandlung des Diskriminantensatzes auf hyperkomplexer Grundlage, die, wie mir Emmy sagte, unabhängig von ihr, Ihnen und Artin gefunden worden ist.

Ich habe hier in Princeton ein sehr interessantes und anregungsreiches Jahr hinter mir. Jetzt warten wir hier noch auf Einwanderungserlaubnis nach

Canada und wollen dann nach Toronto übersiedeln. Dort, hoffen wir, wird das nomadenhafte Leben, das wir in der letzten Zeit geführt haben, seinen Abschluß finden.

Mit den herzlichsten Grüßen

Ihr

Richard Brauer

1.44 23.07.1935, Hasse an Brauer

Prof. Dr. H. H a s s e .

Göttingen, den 23. 7. 35.
Bunsenstr. 3–5

Herrn

Prof. Dr. R. B r a u e r

The Institute for
Advanced Study, School of
Mathematics
Fine Hall

P r i n c e t o n (N. J.)

Lieber Herr Brauer,

besten Dank für Ihre beiden Briefe vom 30. Juni* und 4. Juli und die Zusendung des Materials aus dem Nachlass von Frl. Noether. Ueber dieses Material möchte ich heute noch nichts schreiben, da ich bisher noch nicht zur genaueren Durchsicht gekommen bin. Es ist auch wohl nicht *so* eilig.

Mit der vorläufigen Disposition Ihres Artikels bin ich gern einverstanden. Sie werden inzwischen den zu unterzeichnenden Vertrag vom Verlag bekommen haben, ausserdem auch einiges weitere für die Arbeit selbst in Frage kommende Material.

Was nun den Artikel B. 12 betrifft, so liegt es in der Tat so, dass wir garniemand Anderes haben, dem wir diesen Artikel übergeben könnten. Ich verstehe Ihre Abneigung sowohl was die sachlichen Gründe betrifft, als auch in Hinblick auf Ihre Belastung und Ihren Umzug durchaus. Trotzdem möchte ich Sie aber bitten, uns doch Ihre Kraft für diesen Artikel zur Verfügung zu stellen. Mit dem Termin sollen Sie nicht gedrängt sein. Der Artikel ist ja sowieso der letzte seines Abschnittes. Auch brauchten Sie ihn ja garnicht sehr ausführlich zu machen. Ich könnte mir denken, dass Ihre Abneigung gegen den Stoff erheblich zurückgeht, wenn Sie sich erst einmal mit der Sache liebevoll beschäftigt haben. Mir geht es jedenfalls immer so. Auch Herr Hecke schliesst sich meiner Bitte wärmstens an. Den Artikel B. 11 werden wir nun wahrscheinlich Schmeidler geben.

Auf den Emmy–Noether–Nachlass komme ich, wie gesagt, demnächst noch zurück.

Es freut mich zu hören, dass Sie in Toronto eine feste Anstellung bekommen haben und ich wünsche Ihnen dazu alles Gute. Sehen wir uns wohl nächstes Jahr in Oslo ? Das würde mich sehr freuen.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

Hasse

1.45 12.12.1935, Hasse an Brauer

Prof. Dr. H. Hasse.

Göttingen, den 12. Dezember 1935.
Bunsenstr. 3–5

Herrn

Prof. Dr. Richard Brauer

University of Toronto
Dep. of Mathematic

Toronto 5 USA.

Lieber Herr Brauer!

Ich habe Ihnen für eine Reihe von Briefen zu danken und möchte Sie zunächst um Entschuldigung bitten, dass ich erst heute antworte. In der Encyklopädiesache wird gegenwärtig noch über verschiedene Einzelheiten des Planes zwischen Verlag und Herausgebern verhandelt und es ist noch keine Einigung erzielt. Der Verlag will bis zur Klarstellung dieser Punkte weitere Verträge nicht schliessen, daher möchte ich Sie bitten, sich in dieser Sache noch etwas zu gedulden.

Ich habe heute das Material aus dem Nachlass von E. Noether Herrn Deuring übergeben, mit der Bitte, es Ihren Anregungen gemäss für den Druck vorzubereiten und zu ergänzen. Wegen des Diskriminantensatzes glaubt Deuring, dass gegenwärtig eine Publikation mit diesem Beweis von Grell in der Mathematischen Zeitschrift in Druck sei. Wenn, wie ich annehme, Grell dort E. Noethers Anteil an der Auffindung des Beweises gebührend hervorhebt, möchte ich glauben, dass eine nochmalige Veröffentlichung unter E. Noethers Namen überflüssig ist. Wir wollen zunächst einmal abwarten, wie diese Arbeit von Grell aussieht. Deuring hat übrigens noch ein anderes Manuskript von E. Noether über Galoissche Körper. Wir wollen auch dieses daraufhin prüfen, ob es zum Druck geeignet ist.

In der Hoffnung, dass Sie sich in Toronto gut eingelebt haben, bin ich

mit besten Grüssen

stets Ihr

Hasse

1.46 25.05.1936, Hasse an Brauer

Mathematisches Institut
der Universität

Göttingen, den 25. 5. 36
Bunsenstr. 3/5

Prof. Dr. H. Hasse.

Herrn Prof. R. B r a u e r

University of Toronto
Departm. of Mathemat. T o r o n t o 5

Lieber Herr Brauer,

im Anschluß an meinen Brief vom 12. 12. 35* möchte ich Ihnen heute mitteilen, daß inzwischen eine volle Übereinstimmung zwischen Herausgebern und Verlag über die Einzelheiten des Enzyklopädie–Planes erzielt worden ist. Der Verlag Teubner wird jetzt in Kürze an Sie wegen des Vertragsabschlusses herantreten.

In der Hoffnung, daß es Ihnen drüben gut geht

bin ich mit herzlichen Grüßen von Haus zu Haus

Ihr

Hasse

1.47 04.07.1936, Hasse an Brauer

Mathematisches Institut
der Universität
Prof. Dr. H. Hasse.

Göttingen, den 4. 7. 36
Bunsenstraße 3/5

Herrn Prof. R. Brauer
University of Toronto
T o r o n t o, Canada
Departm. of Mathematics

Lieber Herr Brauer,

herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief vom 17. Juni. Ich habe Teubner dazu ermächtigt, in Ihren Vertrag als Termin für die Artikel B 8 und B 12 den 1. 11. 36 und 1. 1. 37 einzusetzen. Für den Artikel B 12 habe ich als Umfangsvorschlag 2 Bogen gemacht. Dieses scheint mir im Hinblick auf den leider sehr stark eingeschränkten Gesamtumfang das Maximum, was ich für den Artikel B 12 zur Verfügung stellen kann. Hoffentlich kommen Sie damit aus.

Wegen der in Ihrer Disposition enthaltenen Zusätze „falls nicht in andern Artikeln behandelt" setzen Sie sich wohl zweckmäßig mit den Verfassern dieser andern Artikel direkt ins Einverständnis. Ich nehme an, daß die meisten von diesen Dingen in Ihren eigenen Artikel hereinmüssen. Besonderen Nachdruck würde ich auf die §§ 7 und 9 legen.

Über die technischen Einzelheiten (Unterteilung der Artikel, Zitate usw.) wird Sie das allgemeine Richtlinienblatt unterrichten, das der Verlag Ihnen zusenden wird. Bei den Literaturangaben kommt es keinesfalls auf pedantische Vollständigkeit an, sondern es ist im Gegenteil eine kritische Auswahl des wirklich Wichtigen und Bedeutenden erwünscht.

Mit herzlichen Grüßen, auch an Ihre verehrte Gattin,

stets Ihr sehr ergebener

Hasse

1.48 21.09.1936, Hasse an Brauer

Mathematisches Institut
der Universität

Göttingen, den 21. 9. 36
Bunsenstraße 3/5

Prof. Dr. H. Hasse.

Herrn Prof. R. Brauer
University of Toronto, Departm. of Mathematics
T o r o n t o , Canada

Lieber Herr Brauer,

auf Ihre beiden Fragen möchte ich Ihnen ganz kurz sagen, daß es nichts ausmacht, wenn Sie unter Erhaltung der Gesamtlänge den Artikel B 8 etwas länger und B 12 etwas kürzer machen. Auch bin ich gern mit der von Ihnen vorgeschlagenen Abänderung des Titels von B 12 einverstanden.

Auch mir tut es leid, daß ich Sie in Oslo nicht getroffen habe. Ich würde Ihnen gern ausführlicher schreiben, bin aber durch die Arbeit an meinem Buch über Zahlentheorie mit meiner Zeit sehr knapp.

Herzlichst
Ihr
Hasse

1.49 23.08.1937, Hasse an Brauer

Mathematisches Institut
der Universität

Göttingen, den 23. 8. 37
Bunsenstraße 3/5

Prof. Dr. H. Hasse.

Herrn Prof. Dr. Richard Brauer

91 Bernard Avenue
Toronto, Ont.

Canada

Lieber Herr Brauer,

haben Sie vielen Dank für Ihren freundlichen Brief in Enzyklopädiesachen. Leider haben wir noch keinen Autor für den Artikel 'Allgemeine Invariantentheorie' gefunden, und ich glaube auch kaum, daß dies in nächster Zeit geschehen wird. Hecke und ich haben uns gesagt, daß wir die Sache vorläufig zurückstellen wollen, vielleicht kommt man ganz ohne diesen Artikel aus. Jedenfalls scheint mir, daß alles, was für die moderne Algebra und Zahlentheorie von Bedeutung ist, in Ihrem Artikel über Invarianten linearer Gruppen endlicher Ordnung Platz hat. Vielleicht berücksichtigen Sie diese unsere Haltung bei der Abfassung dieses Artikels.

Was Ihren ersten Artikel über hyperkomplexe Zahlen betrifft, so ist es leider für eine vollständige Neubearbeitung jetzt etwas spät, besonders, wenn Sie damit erst Ende September beginnen können. Ich will Ihnen aber zur Beruhigung folgendes sagen: ich habe kürzlich zu meiner wesentlichen Entlastung und Hilfe bei der redaktionellen Zusammenstellung der Enzyklopädie–Neuauflage Herrn Eichler gewonnen, der mir von den Akademien und Teubner als Hilfskraft zur Verfügung gestellt ist. Herr Eichler wird die Arbeit an der Enzyklopädie Ende September aufnehmen und sich dann mit seiner ganzen Kraft damit beschäftigen. Ich würde es für wünschenswert halten, wenn Sie Herrn Eichler weitgehende Vollmacht für Änderungen und auch

Zufügung kleinerer Ergänzungen gäben, die Ihnen dann bei der Korrektur zur Durchsicht vorliegen. Herr Eichler ist gerade in die Algebrentheorie sehr gut eingearbeitet, und es erspart gewiß Zeit, wenn wir die Sache wie angegeben handhaben. Bitte richten Sie ruhig alle inhaltlichen und auch formalen Zuschriften, die die Enzyklopädie betreffen, weiter an mich, nur seien Sie mir nicht böse, wenn ich sie in der Hauptsache dann durch Eichler erledigen lasse [1], da meine eigene Zeit durch die Arbeit an meinem Buch über Zahlentheorie stark besetzt ist. Sie könnten ja die Gesichtspunkte, nach denen Sie Ihren Artikel über hyperkomplexe Zahlen verbessert wissen wollen, einfach hierher mitteilen, und auch die inzwischen erschienenen Arbeiten, die Sie erwähnt wissen wollen.

Mit herzlichen Grüßen, auch an Ihre Gattin,

stets Ihr

Hasse

[1] Siehe Kapitel „Weiteres ...“

1.50 07.10.1937, Eichler an Brauer

Mathematisches Institut
der Universität

Göttingen, den 7. Oktober 1937.
Bunsenstraße 3/5

Herrn Prof. Dr. R. Brauer,

Toronto.

Sehr geehrter Herr Professor,

Herr Professor Hasse beauftragte mich, Ihren Brief vom 24. September zu beantworten.

Ich danke Ihnen, dass Sie es mir gestatten wollen, an Ihrem Artikel Änderungen vorzunehmen, falls solche im Interesse des Gesamtbildes der Enzyklopädie notwendig scheinen sollten. Selbstverständlich bin ich gerne bereit, mit Ihnen vor dem Druck darüber zu korrespondieren. Ich werde auch bestrebt sein, etwaige Änderungen auf ein möglichst geringes Mass zu beschränken, da die Selbständigkeit der einzelnen Autoren nicht angetastet werden darf. Einstweilen hatte ich mit Ihrem Artikel B 8 noch nichts zu tun, da erst andere Artikel in Druck kommen sollen; ausserdem habe ich meine Tätigkeit erst vor wenigen Tagen begonnen.

Was Ihren Artikel B 12 betrifft, so ist daran gedacht worden, einen Schüler I. Schurs namens W. S p e c h t zu bitten, die für Ihren Artikel B 12 notwendigen Grundlagen aus der allgemeinen Invariantentheorie kurz zusammenzufassen und Ihrem Artikel als B 11 voranzustellen. So ist wohl zu hoffen, dass Sie mit dem Ihnen von Teubner zur Verfügung gestellten Raume auskommen können. Herr Specht wird natürlich erst dann seine Arbeit beginnen können, wenn er Ihren Beitrag B 12 gelesen hat.

Die Arbeit aus dem Nachlass von E. Noether befindet sich in Händen ihres Bruders. Herr Professor Hasse bittet Sie deshalb, sich an Herrn Noether wenden zu wollen.

Mit den besten Grüssen bin ich

Ihr sehr ergebener

M. Eichler.[1]

[1] Vermerk auf der Rückseite: „S. Springer — Hasse Arbeit aus dem Nachlass von Emmy Noether".

1.51 08.11.1937, Hasse an Brauer

Mathematisches Institut
der Universität

Göttingen, den 8. 11. 37
Bunsenstraße 3/5

Prof. Dr. H. Hasse

Herrn Prof. Rich. Brauer
Department of Mathematics
The University T o r o n t o, Canada

Lieber Herr Brauer,

Ich habe kürzlich zusammen mit Herrn Eichler Ihren Artikel B 8 durchgesehen. Ich freue mich sehr, daß Sie eine so schöne Darstellung gegeben haben. Heute möchte ich an Sie hauptsächlich wegen der folgenden Frage schreiben:

Wir haben bei unserm Entwurf der Gesamtdisposition die damals noch nicht so stark algebraisierte Theorie der Lieschen Gruppen und Lieschen Ringe beiseite gelassen. Nun haben Sie ja in Ihrem Artikel wenigstens ganz kurz darauf hingewiesen. Es scheint uns aber notwendig, daß das doch etwas ausführlicher geschieht. Ebenso müßte dann in dem Deuringschen Artikel B 9 die Darstellungstheorie der Lieschen Ringe mit ihren ziemlich abschließenden einfachen Ergebnissen gebracht werden. Ich wollte Sie nun fragen, ob Sie damit einverstanden sind, wenn wir dies in Form zweier kurzer Anhänge zu den Artikeln B 8 und B 9 durch Herrn Zassenhaus–Hamburg machen lassen, der auf diesem Gebiet besonders beschlagen ist. *Oder wollen Sie diesen Anhang selbst machen.*

Noch eine kleine Bemerkung: Mir scheint es richtiger, die amerikanische Bezeichnung 'Rang einer Algebra' für den kleinstmöglichen Grad (Grad des allgemeinen Elementes) zu vermeiden und vielmehr durch 'Grad der Algebra' zu ersetzen, wie das ja bei uns üblich ist. Das Wort 'Rang' hat von der linearen Algebra her die allgemein übliche Bedeutung: Anzahl der linear unabhängigen Elemente. Ich würde daher das, was Sie 'Ordnung einer Algebra' genannt haben, als 'Rang' bezeichnen, wie das auch bei uns üblich ist, und 'Ordnung' für seinen gruppentheoretischen Sinn freihalten.

Ihren anderen Artikel B 12 werde ich in den nächsten Tagen mit Herrn Eichler zusammen durchgehen. Die Arbeiten an der Herausgabe schreiten augenblicklich sehr gut fort. Bald wird schon das erste Einzelheft erscheinen.

Ihr Artikel B 8 kann natürlich erst erscheinen, wenn Deurings Manuskript vorliegt. Hoffentlich kommt es bald.

Herzliche Grüße,

Ihr

Hasse

Durchschlag an Deuring

1.52 26.06.1939, Brauer an Hasse

Toronto, den 26. 6. 39.

Lieber Herr Hasse,

Wie Sie wahrscheinlich wissen, habe ich von Teubner die Manuskripte meiner beiden Artikel für die Enzyklopädie zurückerhalten, da sich Teubner nicht in der Lage sieht, sie zu drucken. Er hat mir die Hälfte des mir zustehenden Honorars gezahlt.

Mein Vertrag mit Teubner sah eine Reihe von Eventualfällen vor, in denen Teubner die Vertragserfüllung hinauszuschieben berechtigt war. Das jetzt von Teubner gewählte Verhalten hat keinerlei rechtliche Grundlage im Vertrage. Sie werden verstehen, wie schwer ich durch den Vertragsbruch von Teubner in jeder Beziehung geschädigt worden bin, insbesondere da ich den zweiten Artikel nur unter Widerstreben um der Sache willen übernommen habe. Ich möchte Sie als Herausgeber der Enzyklopädie bitten, meine Rechte als Mitarbeiter dem Verlage gegenüber zu vertreten und speziell Teubner zur Zahlung der zweiten Hälfte des mir zustehenden Honorars zu veranlassen.

Ich bedaure sehr, daß ich Sie in dieser unerfreulichen Angelegenheit behelligen muß. Ich habe aber alle Verhandlungen mit Ihnen geführt und ich habe das Vertrauen, daß ich bei Ihnen Verständnis für mein Recht finden werde.

Mit den ergebensten Grüßen

Ihr

Richard Brauer

1.53 25.07.1939, Hasse an Brauer

Mathematisches Institut
der Universität

Göttingen, den 25. 7. 1939.
Bunsenstraße 3/5

Herrn

Prof. Dr. Richard Brauer

Department of Mathematics

The University of Toronto

T o r o n t o (Ont.)

Lieber Herr Brauer!

Ihren freundlichen Brief vom 26. Juni* habe ich erhalten, und mir daraufhin ein Rechtsgutachten über den Fall ausstellen lassen, das ich Ihnen im Original beilege. Sie werden verstehen, dass es mir auf Grund dieses Gutachtens unmöglich ist, Ihren Anspruch gegenüber dem Verlag Teubner zu vertreten, wie sehr ich auch persönlich diesen Anspruch verstehe.

Mit freundlichem Gruss!

Ihr sehr ergebener

Hasse

1.54 03.06.1947, Hasse an Brauer

3. Juni 1947

Lieber Herr Brauer,

Nachdem es jetzt wieder möglich ist, Drucksachen nach u. von Amerika zu schicken, habe ich eine grosse Bitte an Sie, nämlich dass Sie mir von Ihren während des Krieges erschienenen Arbeiten soweit noch vorhanden Sonderabdrucke zukommen lassen. Ich hörte kürzlich, dass es Ihnen gelungen sei, die Schursche Vermutung über die Darstellungskörper endlicher Gruppen voll zu beweisen. Sie können sich denken, wie ich gerade an diesem schönen Ergebnis interessiert bin und dass ich gerne den Beweis im einzelnen kennen lernen möchte.

Was ich selbst während des Krieges veröffentlicht habe, lasse ich Ihnen gleichzeitig zugehen. Es ist allerdings nicht sehr viel. Ich hoffe, bald mehr senden zu können, nämlich zwei umfangreiche Arbeiten über Klassenzahl und Einheiten abelscher Zahlkörper, die ich in den letzten drei Jahren geschrieben habe. Blaschke hat mir jetzt endlich eine Möglichkeit eröffnet, diese Arbeiten drucken zu lassen.

Ich habe, wie Sie wohl gehört haben werden, in den letzten zwei Jahren viel Unerfreuliches erlebt. Wenn es Sie interessiert, schreibe ich Ihnen gerne einmal etwas Näheres darüber. Seit einem halben Jahr haben mir nun die Berliner – vor allem Erhard Schmidt – eine neue recht erfreuliche Wirkungsmöglichkeit eröffnet. Allerdings bedeutet das bis auf weiteres eine Trennung von meiner Familie, die ich in Göttingen zurücklassen muss, bis die Verhältnisse klarer und ernährungsmässig besser werden. Wir leben dort in recht engen und bescheidenen Verhältnissen, nachdem unser Haus mit dem wesentlichen Teil unserer Möbel von der Besatzungstruppe beschlagnahmt wurde.

Ich hoffe, es geht Ihnen und den Ihren gut. Bitte empfehlen Sie mich Ihrer Gattin, an die ich mich von Königsberg her noch gut erinnere.

Mit herzlichen Grüssen Ihr

H. Hasse

1.55 19.06.1950, Brauer an Hasse

UNIVERSITY OF MICHIGAN
ANN ARBOR
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

19. Juni 1950

Lieber Herr Hasse,[1]

Vor einigen Monaten erhielt ich von der Schriftleitung der Mathematischen Nachrichten eine Aufforderung, eine Arbeit für ein Widmungsheft für Erhard Schmidt einzureichen. Ich erlaube mir, Ihnen für diesen Zweck die einliegende Arbeit zu schicken. Ich hoffe, daß sie geeignet erscheint, und daß die vielen Verbesserungen nicht stören. Da ich gerade auf einer Reise bin, konnte ich sie nicht noch einmal abschreiben.

Herzlichen Dank für die Separate, die Sie mir gesandt haben. In der Hoffnung, daß es Ihnen gut geht,

Mit den besten Grüßen
Ihr
Richard Brauer

[1] Randvermerk von Hasse: ,,Empf. best. – 26. 6. 50"

1.56 26.06.1950, Hasse an Brauer

Dr. HELMUT HASSE
o. Prof. d. Mathematik a. d. Universität Berlin

Direktor des Forschungsinstituts für Mathematik
der Deutschen Akademie der Wissenschaften

(1) BERLIN-ZEHLENDORF, den 26. 6. 50
ROTHERSTIEG 3

Lieber Herr Brauer,

Mit bestem Dank bestätige ich den Erhalt Ihres Ms. für das Erh. Schmidt Geburtstagsheft (bzw. Band) der Math. Nachr., zugleich auch im Namen meiner Mitherausgeber.

Ich habe mir erlaubt, einige Schreibfehler sowie die folgenden sachlichen Unstimmigkeiten zu verbessern:

S. 6. in der Formel für $\rho(\Omega)$ muß $2^{r_1(\Omega)}(2\pi)^{r_2(\Omega)}$ statt $2^{r_1(\Omega)+r_2(\Omega)}$ stehen.

S. 6, drittletzte Zeile muß mit $s-1$ multipliziert statt durch $s-1$ dividiert werden.

S. 8, die letzte Type von §2 muß ersichtlich $\wedge$ statt Ω heißen.

S. 10, drittletzte Zeile muß „Index“ statt „Ordnung“ stehen.

Fußnote 14 muß „zweite Gleichung (11a)“ (statt (11b)) zitiert werden.

In Arch. d. Math. **1** (1948), 42–46 habe ich den Spezialfall der kubischen Körper (mit anderer Zielsetzung) behandelt; ausführliche Darstellung erscheint in 3 Wochen im Jubiläumsband der Deutschen Akademie d. Wissensch. zu Berlin.

Auch ich danke Ihnen für die Zusendung Ihrer Arbeiten.
Mit besten Grüßen

Ihr H. Hasse

1.57 1950, Brauer an Hasse, Postkarte

(Postkarte)

Lieber Herr Hasse,

Besten Dank für Ihren Brief. Natürlich haben Sie mit Ihren Bemerkungen recht, und ich bin Ihnen für die Verbesserungen sehr dankbar.

Mit besten Grüßen

Ihr

Richard Brauer

1.58 30.12.1958, Hasse an Brauer

H. Hasse — Hamburg 13, Rotenbaumchaussee 67
Mathematisches Seminar, den 30. 12. 1958

Lieber Herr Brauer,

Dadurch, dass Sie nach Ihrem Vortrag beim Mittagessen so placiert wurden, dass unsere algebraisch interessierten jungen Leute Gelegenheit bekamen, sich mit Ihnen zu unterhalten, und dass ich dann wegen des Geburtstags meiner Frau an dem Nachmittagsausflug nicht teilnehmen konnte, hat sich für mich leider keine Gelegenheit ergeben, mit Ihnen mehr als ein paar kurze Worte zu sprechen. Das hat mir umsomehr leid getan, als ich aus den wenigen Worten, die Sie zu mir sagten, eine ganz besondere Herzlichkeit herausfühlte. Ich bin Ihnen dafür aufrichtig dankbar, wurde mir doch daraus klar, dass ich Ihr Schweigen auf meinen Brief von 1946 falsch ausgelegt und Ihnen dadurch in Gedanken unrecht getan habe. Vielleicht haben Sie aber doch ein wenig Verständnis dafür, dass ein solches Missverständnis möglich war, wenn Sie an Ihre eigene Situation vor dem Kriege zurückdenken.

Es war sehr freundlich von Ihnen zu sagen, dass Sie von mir gelernt haben. Für mich gehört die Erinnerung an die Zeit des Schiefkörperkongresses in Marburg und die sich im Anschluss daran entwickelnde Zusammenarbeit mit Emmy Noether und Ihnen zu den schönsten Erinnerungen aus meiner mathematischen Laufbahn. Seitdem habe ich Ihre immer grösseres Ausmass annehmenden mathematischen Forschungsergebnisse mit steigender Bewunderung verfolgt und vor allem auch meine Schüler immer wieder nachdrücklich darauf hingewiesen diese schönen Dinge zu studieren und Anregungen aus ihnen zu schöpfen.

Mit herzlichen Grüssen und Empfehlungen an Ihre Gattin, die wiederzusehen mir eine grosse Freude war, bin ich

Ihr sehr ergebener

1.59 08.01.1959, Brauer an Hasse

Paris, den 8. 1. 59

Lieber Herr Hasse,[1]

Ihr Brief* erreichte mich hier. Ich möchte Ihnen herzlich danken; ich habe mich sehr über ihn gefreut. Es tat mir auch leid, daß sich keine Gelegenheit ergab, mich etwas länger mit Ihnen zu unterhalten. Es war sehr nett, daß Sie trotz des Geburtstags Ihrer Frau zum Mittagessen blieben, so hat meine Frau wenigstens das Vergnügen gehabt, neben Ihnen zu sitzen.

Für mich bedeutet die Zeit der Zusammenarbeit mit Ihnen und Emmy Noether eine der schönsten Erinnerungen meines mathematischen Lebens, und ich werde nie vergessen, was ich Ihnen verdanke.

Mit den herzlichsten Grüßen, und in der Hoffnung, daß wir uns doch wiedersehen werden

Ihr

Richard Brauer

[1] Briefkopf „29, Rue Cassette–Paris (6^e) **Hotel Paris–Dinard**".

1.60 05.02.1961, Hasse an Brauer

5. Februar 1961

Lieber Herr Brauer,

Unter den Gratulanten zu Ihrem 60. Geburtstag möchte ich nicht fehlen, wenn es mir auch leider nicht möglich gewesen ist, Ihnen aus diesem Anlaß eine Arbeit zu widmen.

Mit berechtigtem Stolz dürfen Sie auf das zurückblicken, was Sie in dem nun zu Ende gekommenen Lebensabschnitt erreicht haben. Ihren zahlreichen hochinteressanten und bedeutungsvollen Ergebnissen zur Gruppentheorie, insbesondere Darstellungstheorie, zur algebraischen Zahlentheorie, Theorie der Algebren und allgemeinen Ringtheorie gilt meine höchste Bewunderung, das müssen Sie sich heute schon sagen lassen. Ich bin sicher, daß Ihr einstiger Lehrer I. Schur von ähnlichen Gefühlen der Bewunderung erfüllt wäre, wenn er Ihr bisheriges Lebenswerk überschauen würde, und daß er stolz auf einen Schüler wäre, der auf der von ihm selbst beschrittenen Bahn so viel weiter gelangt und so viele schöne Neuentdeckungen gemacht hat. Daß ich einmal mit Ihnen und unserer gemeinsamen Lehrmeisterin E. Noether zusammen an die Öffentlichkeit treten durfte, gehört zu meinen schönsten Lebenserinnerungen.

In meine herzlichen Glückwünsche zu allem, was Sie geleistet haben, möchte ich auch Ihre verehrte Gattin mit einbeziehen, die gewiß einen nicht geringen Anteil daran hat, daß Sie zu solch großen Leistungen inspiriert und auch, wenn das Schicksal hart mit Ihnen verfuhr, befähigt blieben.

Mögen Ihnen die mathematische Muse auch weiterhin hold sein, und möge Ihnen viel Erfolg in Ihrer Lehrtätigkeit und viel Glück in Haus und Familie beschert sein. Das wünscht Ihnen in alter freundschaftlicher Verbundenheit

Ihr

H. Hasse

1.61 03.03.1961, Brauer an Hasse

Harvard University
Cambridge 38, Mass.
Department of Mathematics
2 Divinity Avenue

3. März 1961

Lieber Herr Hasse

Sie haben mir mit Ihren liebenswürdigen Zeilen* zu meinem Geburtstag eine große Freude bereitet, und ich möchte Ihnen für Ihren Brief herzlich danken. Mir kommt es unwirklich vor, daß ich 60 bin, aber schließlich ist es 35 Jahre her, daß ich durch Sie mit der Klassenkörpertheorie bekannt geworden bin. Daß ich in Zusammenarbeit mit Ihnen und Emmy Noether ein wenig dazu beitragen konnte, ist auch mir eine der schönsten Erinnerungen, und ich werde die Aufregung der Tage, in denen die Arbeit entstand, nie vergessen.

Auch meine Frau hat sich über Ihre Zeilen sehr gefreut. Wir haben im letzten Jahr öfter als Sie es ahnen an unsere Unterhaltung in Hamburg gedacht. Meine Frau hat vor einem Jahr einen Herzanfall gehabt. Glücklicherweise ist die Heilung sehr gut verlaufen und sie kann beinah alles wie vor Ihrer Krankheit machen, nur ein wenig langsamer und ruhiger. Das war Ihr Rat in Hamburg gewesen, alles etwas leichter zu nehmen.

Mit herzlichen Grüßen

Ihr

Richard Brauer

1.62 04.11.1964, Hasse an Brauer

Herrn
Prof. Dr. Richard Brauer
34 Göttingen
Mathematisches Institut
der Universität

4. November 1964

Lieber Herr Brauer,

wie ich erfahren habe, hat man Ihnen für das Wintersemester 1964/65 die Gauß–Professur in Göttingen übertragen. Wir Hamburger Mathematiker würden es auf das lebhafteste begrüßen, wenn Sie uns in dieser Zeit hier in Hamburg besuchen und mit einem Gastvortrag erfreuen könnten. Unser mathematisches Kolloquium findet immer Dienstags nachmittags von 16–17 Uhr statt. Bisher sind außer dem 10. und 24. November noch alle Dienstage frei. Für Ihre Reise– und Aufenthaltskosten können wir Ihnen einen Betrag von DM 200.– zur Verfügung stellen.

Mit der Bitte um eine tunlichst baldige Antwort grüßt Sie herzlichst

Ihr

H. Hasse

1.63 10.11.1964, Brauer an Hasse

26. 1. freigehalten
aber ev. durch Tausch
auch 19. 1.[1]

34 Göttingen, den 10. 11. 64.
Math. Inst.
Bunsenstr. 3–5

Lieber Herr Hasse,

Besten Dank für Ihren Brief*. Es ist sehr liebenswürdig, mich zu einem Vortrag nach Hamburg einzuladen, und an und für sich würde ich natürlich gern kommen. Ich hoffe aber, Sie werden verstehen, wenn ich Ihnen jetzt noch keine bestimmte Antwort gebe. Ich bin im Augenblick sehr stark mit einer Arbeit beschäftigt, und dies sind dann auch gerade die Dinge, über die ich am liebsten vortragen würde. Nun ist aber die Untersuchung noch nicht abgeschlossen, und ich bin auch nicht einmal sicher, ob ich durchkommen werde. Wenn ich weiterkomme, würde ich wie gesagt gern darüber vortragen.

Ich bleibe bis zum 1. 2. 65 hier. Darf ich Ihnen um Weihnachten noch einmal schreiben? Sehe ich dann meinen Weg klarer, und ist dann noch ein Termin bei Ihnen frei, so ließe sich vielleicht ein Vortrag im Januar einrichten.

Mit herzlichen Grüßen

Ihr

Richard Brauer

[1] Offenbar von Hasse aufgeschriebene Notiz.

1.64 24.11.1964, Hasse an Brauer

Herrn
Prof. Dr. Richard Brauer
34 Göttingen
Bunsenstr. 3/5

24. November 1964

Lieber Herr Brauer,

herzlichen Dank für Ihre grundsätzliche Zusage*. Ich kann durchaus verstehen, daß Sie im Augenblick durch Forschung in Anspruch genommen sind und erst den Abschluß Ihrer Untersuchungen abwarten möchten. Vorsorglich habe ich mir erlaubt, für Sie den 26. Januar als Vortragstermin freizuhalten, möchte aber bemerken, daß bei rechtzeitiger vorheriger Nachricht auch durch einen Tausch dafür gesorgt werden kann, daß Sie am 19. Januar vortragen können.

Wir hoffen alle sehr, daß Sie sich doch zu einem Besuch bei uns und einem Gastvortrag entschließen werden. Bitte, geben Sie auch deshalb rechtzeitig vorher Nachricht, damit wir Ihnen eine Hotel- oder Pensionsunterkunft verschaffen können. Es wird genügen, wenn Ihre Nachricht bis zum Ende des Jahres hier vorliegt.

Mit herzlichen Grüßen

Ihr

1.65 24.12.1964, Brauer an Hasse

Göttingen, den 24. 12. 64.

Lieber Herr Hasse,

Besten Dank für Ihren Brief*. Ich habe mich nach einigem Schwanken nun doch entschlossen, Ihre liebenswürdige Einladung dankend abzulehnen. Meine Arbeit ist doch nicht so vorangegangen, wie ich gehofft hatte, und der Vortrag, den ich im Sinn hatte, ist damit ins Wasser gefallen. Ich möchte auch die Unterbrechung der Arbeit, die die Reise bedeuten würde, vermeiden. Ich bin heute nicht mehr ganz so jung, wie ich mich noch vor ein paar Jahren fühlte, und empfinde die Anstrengungen wissenschaftlicher Reisen stärker.

Ich hoffe, in den nächsten Jahren öfter, wenn auch auf kürzere Zeit in Europa zu sein, und vielleicht ergibt es sich dann, daß ich Sie besuchen kann.

Mit den besten Wünschen für ein frohes Fest und herzlichen Grüßen

Ihr

Richard Brauer

1.66 27.02.1971, Brauer an Hasse

Belmont, Mass.

den 27. Februar 1971 [1]

Lieber Herr Hasse,

Für Ihre liebenswürdigen Glückwünsche zu meinem Geburtstag möchte ich Ihnen herzlich danken; ich habe mich sehr darüber gefreut. Ich staune, daß Sie sich an das Datum erinnern, und ich fürchte, daß ich es meinerseits an dergleichen Aufmerksamkeit habe fehlen lassen. Es ist nun zu spät, Ihnen nachträglich zu Ihrem 70$^{\text{ten}}$ Geburtstag zu gratulieren. Ich will mich aber bemühen, die Glückwünsche zu Ihrem 75$^{\text{ten}}$ Geburtstag nicht zu vergessen.

Die schönen Tage unserer Zusammenarbeit vor 40 Jahren stehen mir noch deutlich vor Augen. Sie bedeuten für mich einen Höhepunkt meiner wissenschaftlichen Tätigkeit. Wie traurig daß Emmy Noether diese Zeit nur so kurz hat überleben dürfen.

Es hat meine Frau und mich besonders gefreut, im vorigen Jahr Ihre Enkelkinder kennen zu lernen. Man hört jetzt in allen Ländern so viel Klagen über die junge Generation. Da ist es dann doch eine Freude zu sehen, daß es in der heutigen Jugend so prächtige Menschen gibt.

Wie lange bleiben Sie noch in San Diego und in Amerika ? Hoffentlich haben Sie noch schöne Tage vor sich.

Mit den besten Wünschen und herzlichen Grüßen

in Dankbarkeit

Ihr

Richard Brauer

[1] Ein offenbar von Hasse angebrachter Vermerk: „Fragen: ob Frühj. 1972 willk. — handschr. 6. 3. 71 erl.“

1.67 09.04.1971, Brauer an Hasse

Belmont, den 9. 4. 71

Lieber Herr Hasse

Ich habe Ihnen noch nicht für Ihre freundlichen Zeilen gedankt. Leider wird ein Zusammensein für einige Zeit nicht möglich sein, da unsere Wege divergieren. Dies ist mein letztes Jahr hier vor der Emeritierung. Dazu habe ich die letzten sechs Wochen Urlaub und werde auf sechs Wochen im Mai und June zu Vorträgen in England sein. Ich plane zwar im Herbst hier im Ruhestand zu leben. Ich werde dann aber im zweiten Semester in Aarhus, also sozusagen bei Ihnen um die Ecke unterrichten, gerade wenn Sie nach Amerika kommen. Ich werde aber nicht verfehlen, das hiesige Kolloquiumskomité auf Ihre Reise aufmerksam zu machen.

Es ist leicht möglich, daß wir auch später noch einmal nach Aarhus gehen, und vielleicht können wir ein Zusammensein auf eine derartige Gelegenheit verschieben.

Ich entnehme Ihrem Brief, daß Sie vorhaben, via Asien nach Europa zurückzukehren. Wir haben vor 12 Jahren diese Reise in der umgekehrten Richtung gemacht und sehr genossen. Hoffentlich haben Sie eine recht angenehme Reise

Mit herzlichen Grüßen

Ihr

Richard Brauer

Kapitel 2

Register