

Die Korrespondenz

Helmut Hasse/Erich Bessel–Hagen

tk Hasse an Bessel–Hagen 21.11.26–5.5.33

tk Bessel–Hagen an Hasse 29.11.26–29.6.35

tk Weiteres Material zu Hasse/Bessel–Hagen

t – fertig transkribiert, *k* – nach Tippfehlern durchgesehen

Version vom 08.12.2006
Letztmalig geändert am 08.12.2006

Quelltext: hasbes_061208.tex
übersetzt am 18. Juni 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Die Korrespondenz Hasse/Bessel–Hagen	4
1.1	Vorbemerkung	4
1.2	21.11.1926, Hasse an Bessel–Hagen, Postkarte	5
1.3	29.11.1926, Bessel–Hagen an Hasse	6
1.4	23.12.1926, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte	7
1.5	26.01.1927, Bessel–Hagen an Hasse	8
1.6	02.02.1927, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte	9
1.7	08.02.1927, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte	10
1.8	23.02.1927, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte	11
1.9	11.05.1927, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte	12
1.10	07.06.1927, Bessel–Hagen an Hasse	13
1.11	10.06.1927, Bessel–Hagen an Hasse	15
1.12	27.06.19??, Bessel–Hagen an Hasse	16
1.13	08.07.1927, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte	17
1.14	16.07.1927, Bessel–Hagen an Hasse	18
1.15	25.07.1927, Bessel–Hagen an Hasse	19
1.16	05.09.1927, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte	20
1.17	14.10.1927, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte	21
1.18	14.11.1927, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte	22
1.19	14.11.1927, Bessel–Hagen an Hasse	23
1.20	08.01.1928, Bessel–Hagen an Hasse	25
1.21	17.01.1928, Bessel–Hagen an Hasse	27
1.22	30.01.1928, Bessel–Hagen an Hasse	29
1.23	06.02.1928, Bessel–Hagen an Hasse	31
1.24	15.03.1928, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte	33
1.25	20.04.1928, Bessel–Hagen an Hasse	34
1.26	24.04.1928, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte	36

1.27	11.08.1928, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte	37
1.28	29.08.1928, Bessel–Hagen an Hasse	38
1.29	06.10.1928, Bessel–Hagen an Hasse	40
1.30	11.12.1928, Hasse an Bessel–Hagen, Postkarte	42
1.31	23.04.1929, Bessel–Hagen an Hasse	43
1.32	02.05.1929, Bessel–Hagen an Hasse	48
1.33	10.05.1929, Bessel–Hagen an Hasse	50
1.34	30.05.1929, Hasse an Bessel–Hagen	52
1.35	31.05.1929, Bessel–Hagen an Hasse	53
1.36	31.05.1929, Bessel–Hagen an Hasse	54
1.37	16.06.1929, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte	57
1.38	15.07.1929, Bessel–Hagen an Hasse	58
1.39	25.07.1929, Hasse an Bessel–Hagen, Postkarte	60
1.40	11.10.1930, Bessel–Hagen an Hasse	61
1.41	07.12.1930, Bessel–Hagen an Hasse	64
1.42	04.01.1931, Bessel–Hagen an Hasse	65
1.43	03.11.1931, Bessel–Hagen an Hasse	67
1.44	03.12.1931, Hasse an Bessel–Hagen	69
1.45	13.02.1933, Hasse an Bessel–Hagen	70
1.46	20.03.1933, Bessel–Hagen an Hasse	71
1.47	05.05.1933, Hasse an Bessel–Hagen, Postkarte	74
1.48	20.06.1935, Bessel–Hagen an Hasse	75
1.49	29.06.1935, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte	76
1.50	Undatiert, Bessel–Hagen an Hasse	77
2	Weiteres Material zu Hasse/Bessel–Hagen	80
2.1	05.01.1928, Bessel–Hagen Sen. an Hasse	81
2.2	22.04.1928, Beilage, von Bessel–Hagen	82
2.3	Undatiert, Beilage, von Bessel–Hagen	86
2.4	18.06.2002, Vermerk von Roquette	89
3	Register	90

Kapitel 1

Die Korrespondenz Hasse/Bessel–Hagen

1.1 Vorbemerkung

[...] steht als Platzhalter für Text, der nicht oder nicht eindeutig zu entziffern war.¹

□□□ steht für ausgestrichene, aber lesbare Passagen.²

1. erreichbar mit `\xxx`
2. erreichbar mit `\boxes`

1.2 21.11.1926, Hasse an Bessel–Hagen, Postkarte

(Postkarte)¹

Halle, den 21. XI. 26

Lieber Herr Bessel–Hagen!

Nach den Briefen, die mir Hilbert schrieb, soll also nun tatsächlich die ganze Theorie *lückenlos* in die Annalen kommen. Ich möchte Ihnen heute folgenden Vorschlag zur Durchführung dieses Projektes machen: 1.) Das Opus erscheint unter Ihrem Namen mit einem geeigneten Zusatz über die Quellen (Takagi, mein D. M. V.–Bericht, meine u. auch Artins Aufzeichnungen). 2.) Ich sende Ihnen demnächst (für etwa 3 Wochen brauche ich sie noch selbst) meine Aufzeichnungen zum genauen Studium zu, dem Sie bis zu den Osterferien unter möglichster Konzentration auf die Ihnen zufallende Aufgabe obliegen werden. 3.) Im Laufe der Osterferien erscheine ich in Göttingen, oder wir richten — aus besonderem Fonds — einen Pendelverkehr Göttingen–Allendorf ein, und bespreche mit Ihnen das Nähere. 4.) Sollten Sie früher schon so weit sein, daß Sie die Ausarbeitung beginnen wollen, so wenden Sie sich jedenfalls vorher an mich, da mir noch manche Verbesserungen eingefallen sind, z. B. die Aufnahme der \mathfrak{p}_∞ in die Führer u. das Zerlegungsgesetz für diese \mathfrak{p}_∞ , sowie manches andere. — In Berlin hat sich übrigens eine Arbeitsgemeinschaft zum Studium meines Berichts aufgetan. Das ist doch sehr schön! Ich schreibe z. Zt. fleißig am zweiten Teil. Ich komme da mit dem üblichen „additiven“ Kongruenzbegriff schwer durch, definiere also „multiplikativ“

$$\alpha \equiv \beta \pmod{m}, \quad \text{wenn} \quad \frac{\alpha}{\beta} \equiv 1 \pmod{m}$$

für *ganz beliebig* (nicht notwendig zu m prime) α, β und endliches oder unendliches m . Das wirkt dann sehr erlösend, vor allem bei den Normenresten.

Mit besten Grüßen Ihr

H. Hasse.

1. Randvermerk von Roquette: *Aus dem Nachlass Bessel–Hagen von Neuenschwandner*

1.3 29.11.1926, Bessel–Hagen an Hasse

Göttingen, d. 29. Nov. 1926

Lieber Herr Professor!

Da ich infolge einer Erkältung in der letzten Woche einen etwas benommenen Kopf hatte und nicht recht Dispositions- und entschlußfähig war, antworte ich Ihnen erst heute auf Ihre Karte. Dagegen, daß das Opus unter meinem Namen erscheint, habe ich etwas Bedenken, da ich doch vermutlich nichts als die äußere Redaction beisteuern werde; aber das ist schließlich auch cura posterior und darüber können wir uns einigen, wenn die Ausarbeitung fertig ist. Schwieriger ist die Frage des „wann“. Ich habe nämlich die Absicht, mit Siegel während der Osterferien eine Reise nach Griechenland zu unternehmen, sodaß die ganzen Ferien drauf gehen werden und ich auch vorher einige Zeit zu Vorbereitungen (wie z. B. zum Erlernen der neugriech. Sprache) brauchen werde. Trotzdem scheint es mir, wenn Sie einwilligen, das Richtige, daß ich mich *möglichst bald* an die Arbeit mache, deren Umfang ich vorläufig noch nicht übersehe und versuche, bis zu den Osterferien möglichst weit zu kommen. Der Rest müßte dann im Sommer gemacht werden, wo ich unter allen Umständen sehen will, eine Vorlesung zu halten, die keine Arbeit macht. Wenn Ihnen aber ein so langes Warten unbequem ist, will ich Ihnen selbstverständlich nicht im Wege stehen, irgend welche andere Dispositionen zu treffen; ich würde mich allerdings sehr freuen, die Ausarbeitung machen zu können und sollte denken, bis Ostern wenigstens einiges schaffen zu können.

Der „multiplicative“ Congruenzbegriff schien auch mir im vorigen Semester für die Hilbert'sche Vorlesung der geeignete Ausgangspunkt, um zu verstehen, wie man zur Classeneinteilung der Ideale mod \mathfrak{f} gelangt; über tiefere Consequenzen davon habe ich aber nie nachgedacht.

Mit herzlichsten Grüßen

Ihr E. Bessel–Hagen.

1.4 23.12.1926, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte

(Postkarte)

Berlin, d. 23. 12. 26.

Lieber Herr Hasse!

Heute früh erhielt ich wohlbehalten die Sendung Ihrer fünf Hefte, für die ich Ihnen bestens danke. Ich werde sehen, möglichst noch während der Weihnachtsferien einen Teil durchzuarbeiten. Wenn ich an die Niederschrift gehen will, werde ich Ihnen rechtzeitig vorher Mitteilung machen.

Mit besten Grüßen und guten Wünschen zum Fest

Ihr E. Bessel–Hagen.

1.5 26.01.1927, Bessel–Hagen an Hasse

Göttingen, d. 26. Jan. 1927

Lieber Herr Professor!

Heute möchte ich Ihnen etwas ausführlicher auf Ihren Brief vom 18. antworten, nachdem ich Gelegenheit hatte, heute vormittag mit Geh. Rat Hilbert zu sprechen. Hilbert wünscht dringend, in die Annalen eine lückenlose und glatt lesbare Darstellung der Classenkörpertheorie zu bekommen, auch wenn Sie noch den Teil I a herausbringen. Er sagte sogar, wenn Sie Ihre Darstellung den Annalen nicht geben wollten, würde er die alten Arbeiten von Takagi abdrucken. Da wird es doch besser sein, wenn wir bei dem alten Plane bleiben. Im übrigen, meinte Hilbert, rühren die Teubner'schen Bedenken aus der erbitterten Feindschaft her, die Teubner gegen die Annalen hege, seitdem er sie sich habe aus den Händen winden lassen.

Gestern erhielt ich von de Gruyter eine erste Sendung Correcturen Ihres 2^{ten} Algebrabandes, aber mitten drinnen mit Cap. III beginnend. Ist das in Ordnung, oder hat die Setzerei versäumt, mir das Frühere zu schicken. Im letzteren Falle würde ich Sie bitten, bei der Setzerei Nachlieferung an mich zu beantragen, selbst wenn die Correcturen des vorangehenden schon erledigt sein sollten. Es ist doch angenehmer, zu lesen, wenn man weiß, was vorangeht. Soll ich Ihnen die von mir gelesenen Correcturen laufend zusenden, oder kann ich einen größeren Posten aufstapeln lassen, um immer mehr gleichzeitig vor Augen zu haben?

Frl. Noether hat mich gebeten, Ihnen mitzuteilen, daß der schöne kurze Beweis für den Satz über die symmetrischen Functionen, den sie Ihnen in Göttingen erzählte, 1896 von Mertens im Colleg vorgetragen worden wäre. Ob Mertens etwas darüber gedruckt hat oder ob er auf eine noch ältere Tradition zurückgeht, hat sie nicht in Erfahrung gebracht.

Mit besten Grüßen

Ihr E. Bessel–Hagen.

1.6 02.02.1927, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte

(Postkarte)

Göttingen, d. 2. Febr. 1927

Lieber Herr Hasse!

Besten Dank für Ihre Karte! Ich habe die Fahnen 18–35, die ich bisher erhalten habe, bereits einmal durchgelesen, und werde, sowie ich mehr Material von der Druckerei erhalte, mit dem Lesen fortfahren, sodaß ich hoffe, daß meinetwegen keine Verzögerung entstehen wird.

Mit Ihrer Stellungnahme zum Hilbert'schen Plan bin ich von mir aus natürlich durchaus einverstanden.

Mit besten Grüßen

Ihr E. Bessel–Hagen.

1.7 08.02.1927, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte

(Postkarte)

Göttingen, d. 8. Febr. 1927

Lieber Herr Professor!

Soeben erhalte ich den Schluss der Fahnen (36–52); es fehlen mir noch zwi-
schendurch die §§7. (Symmetrische Functionen) und 13 (konjugierte Stamm-
körper im Wurzelkörper). Ist das ein Versehen der Druckerei, oder haben Sie
diese Paragr. etwa zur Kürzung gestrichen? Im gegenwärtigen Zustand ist es
etwas schwierig, die Blöcke für die Verweise auf Satz- und Definitionsnum-
mern richtig auszufüllen.

Im Übrigen scheint die Druckerei keine Type für † (teilt *nicht*) zu besitzen,
denn sie druckt consequent dafür | oder setzt einen Block. Ebenso mangelt
es sehr an K und Λ -Typen. Ich teile Ihnen dies schon mit, damit Sie, wenn
Sie wünschen, schon jetzt deswegen an die Druckerei schreiben können und
eventuell Zeit einsparen.

Mit besten Grüßen

Ihr E. Bessel–Hagen.

1.8 23.02.1927, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte

(Postkarte)

Göttingen, d. 23. Febr. 1927

Lieber Herr Hasse!

Endlich bin ich soweit, daß ich Ihnen die Correcturen absenden kann; das wesentliche hatte ich schon vor 10 Tagen fertig, wollte aber noch Einzelnes zum zweiten Mal ansehen und fand vorige Woche keine Zeit mehr dazu. Die Satznumerirung habe ich nun doch (ungefähr, ohne Garantie) durchgeführt. Ich hatte sie mir anfangs für mich selbst mit Blei soweit möglich hergestellt, um selbst die Beweise klar aufzufassen was nur geht, wenn die benutzten Sätze Namen haben und habe, wo die alten Bleistiftnummern da waren, nun diese einfach umgerechnet. Sachlich habe ich nur sehr wenige Bemerkungen gegeben, da ich mit dem Ganzen völlig einverstanden bin und um zu einer strengeren Kritik fähig zu sein, das Ganze noch einmal lesen müßte, was wohl zu lange dauern würde. Auch meine Bemerkungen nehmen Sie nicht zu ernst; bei genauerer Überlegung würde ich vielleicht manche zurückziehen, ich habe sie mitunter nur [...] ¹ hingeschrieben.

Anfang nächster Woche verreise ich auf 2 Monate nach Griechenland, kann Ihnen daher während der Ferien nicht weiter helfen; wenn aber noch Anfang Mai Correcturen im Gange sind, bin ich zu jeder Hilfe gern bereit.

Beste Grüße

Ihr E. Bessel–Hagen.

1. 'flüchtig'?

1.9 11.05.1927, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte

(Postkarte)

Göttingen, d. 11. Mai 1927

Lieber Herr Hasse!

Ich bin erst gestern von meiner ganz wundervoll verlaufenen Reise zurückgekehrt und möchte gleich Ihre Anfragen beantworten. Was die Algebra betrifft, so habe ich vom Verlage vorgefunden zwei Exemplare 2. Bogencorrectur u. 1. Exemplar 1. Bogencorrectur. Ich bin gern bereit, die 2. Bogencorrectur noch einer Durchsicht zu unterziehen, falls es nicht zu spät ist ^{*)}. Für Ihre Bemerkungen auf meinen Fahnen danke ich Ihnen sehr, ich werde sie aufmerksam durchlesen.

Hinsichtlich der Correcturen des Berichtes, Teil I a wage ich nicht, Ihnen im Augenblick ein Versprechen abzugeben. Im Princip bin ich gern bereit, Ihnen dabei behilflich zu sein, aber ich überschaue noch nicht recht, was ich hier an Arbeit vorfinden werde und muß mich überhaupt erst aus der inneren Bewegung, in die mich die griechische Reise versetzt hat, zur nüchternen Gedankenwelt zurückfinden, was einige Zeit beanspruchen wird. Ich bitte daher, mir noch einige Tage Bedenkzeit zu gestatten, falls Ihnen die Correcturen nicht sehr eilig sind.

Ich werde die Algebrabogen gleich zu lesen beginnen und bitte Sie nur, falls ich Ihnen zu spät komme, es mir mitzuteilen, damit ich dann mich nicht umsonst zur Eile gedrängt fühle.

Mit besten Grüßen

Ihr E. Bessel–Hagen.

^{*)}. Ich würde dazu etwa eine knappe Woche Zeit brauchen.

1.10 07.06.1927, Bessel–Hagen an Hasse

Göttingen, d. 7. Juni 1927

Lieber Herr Hasse!

Heute früh erhielt ich Ihren Brief mit dem für mich ehrenvollen Anerbieten, bei dem mathematischen Unterricht der Universität Halle mitzuwirken. Ich kann Ihnen nicht auf der Stelle eine verbindliche Zusage geben, da ich gerne noch mit meinen Freunden und mit Herrn Prof. Courant, der bis Donnerstag verreist ist, Rücksprache nehmen und auch selber in Ruhe alles Für und Wider überdenken möchte. Aber schon jetzt möchte ich Ihnen meinen herzlichsten Dank für das große Vertrauen aussprechen, das Sie in mich setzen, und Ihnen mitteilen, daß ich dem Plane sehr geneigt gegenüber stehe. Was mich besonders lockt, ist der Umstand, daß in Halle meine Mitwirkung am Vorlesungsbetrieb gewissermaßen wesentlich sein wird und daß ich eine gewisse Verantwortung dafür haben werde, während ich mich hier, bei der großen, jährlich um durchschnittlich zwei wachsenden, Zahl der habilitierten Mathematiker, etwas als zehntes Rad am Wagen fühle. Ganz besonders würde ich mich freuen, mich mit Ihnen öfter über zahlentheoretische Fragen unterhalten zu können; hier habe ich ja niemanden, der die Zahlentheorie bis in die Einzelheiten kennt.

Die finanziellen Hilfsmittel, die Sie in Aussicht stellen, werden ja hoffentlich für ein Leben mit bescheidenen Ansprüchen ausreichen. Ich bin nicht darüber unterrichtet, wie hoch ein Privatdocentenstipendium ist und ob Halle etwa zu den besonders teuren Städten rechnet; aber ich nehme an, Stipendium+Colleggelder werden zum Leben genügen. Die Notgemeinschaft dürfte kaum bereit sein, mir etwas zu zahlen, da sie mir bereits seit 1924 ein „Forschungsstipendium“ gezahlt hat und bei der letzten Verlängerung, die Courant nur mit einiger Mühe erreichte, ausdrücklich vermerkte, daß eine weitere Verlängerung nicht in Frage käme. Es wäre mir, falls aus der Sache etwas werden sollte, ferner erwünscht, daß das Privatdoc. Stipendium gleich auf längere Zeit bewilligt würde, damit ich nicht von Semester zu Semester vor dem Risiko stehe, daß es mir gestrichen wird und ich mich dem Nichts gegenüber befinde.

Ich bin sehr gern bereit, gelegentlich nach Halle zu fahren und bitte gegebenen Falles mir nur eine Zeit mitzuteilen, die Ihnen und Herrn Prof. Jung gut paßt.

Mit den besten Grüßen

Ihr E. Bessel-Hagen.

1.11 10.06.1927, Bessel–Hagen an Hasse

Göttingen, d. 10. Juni 27

Lieber Herr Hasse!

Nachdem ich mir noch einmal alles habe durch den Kopf gehen lassen und mit Herrn Prof. Courant und anderen mir nahe stehenden Menschen gesprochen habe, kann ich bei dem besten Willen nichts finden, das gegen eine Übersiedelung nach Halle spräche. Ich bin also, was mich betrifft, sehr gerne bereit, Ihrem Anerbieten Folge zu leisten, wenn das Ministerium Ihnen das Privatdocentenstipendium bewilligt, und ich freue mich schon sehr bei dem Gedanken an die auf größere Basis gestellte und verantwortungreichere Lehrtätigkeit, die mich in Halle erwartet.

Sie werden gewiß so freundlich sein, mir mitzuteilen, wenn von mir zu der Angelegenheit noch Schritte zu erledigen sind. Die Umhabilitation wird wohl keine Schwierigkeiten machen.

Indem ich Ihnen und Herrn Prof. Jung nochmals meinen herzlichsten Dank ausspreche, verbleibe ich mit besten Grüßen

Ihr E. Bessel–Hagen.

1.12 27.06.19??, Bessel–Hagen an Hasse

Göttingen, d. 27. Juni

Lieber Herr Hasse!

Nach gut überstandener Fahrt habe ich die Sachen fertig gemacht, die ich Ihnen anbei sende. Ich habe auch für Herrn Prof. Jung Separata beigelegt und ebenfalls für Sie selbst einen Abdruck der Arbeit über die Erhaltungssätze, die Sie nach meiner Buchführung noch nicht erhalten haben. Ich bitte darum, daß Sie in Gedanken ein Exemplar von Bd. 3 der Gesammelten Math. Abhandl. von Klein zu den eingereichten Arbeiten legen, der eigentlich das Hauptstück sein sollte.

Die Abel'schen Relationen stehen bei Fricke für ungerades n in folgender Form:

Für irgend ein λ der Zahlenreihe $0, 1, 2, \dots, n-1$ gilt

$$(5) \quad \sum_{\mu=0}^{n-1} \varepsilon^{2\lambda\mu} \frac{\wp_{\lambda\mu} - e_2}{\wp'_{\lambda\mu}} = 0$$

$$(7) \quad \sum_{\mu=0}^{n-1} \varepsilon^{2\lambda\mu} \frac{\wp_{\lambda\mu} - e_1}{\wp'_{\lambda\mu}} = 0 ;$$

Dagegen ist für zwei verschiedene λ, λ' stets:

$$(6) \quad \sum_{\mu=0}^{n-1} \varepsilon^{2\lambda'\mu} \frac{\wp_{\lambda\mu} - e_2}{\wp'_{\lambda\mu}} \neq 0$$

$$(8) \quad \sum_{\mu=0}^{n-1} \varepsilon^{2\lambda'\mu} \frac{\wp_{\lambda\mu} - e_1}{\wp'_{\lambda\mu}} \neq 0$$

Durch Combination von (5) u. (7) gelangt man zu den beiden mit ihnen gleichwertigen Gleichungen

$$(9) \quad \sum_{\mu=0}^{n-1} \varepsilon^{2\lambda\mu} \frac{1}{\wp'_{\lambda\mu}} = 0 \quad \sum_{\mu=0}^{n-1} \varepsilon^{2\lambda\mu} \frac{\wp_{\lambda\mu}}{\wp'_{\lambda\mu}} = 0 .$$

Nochmals recht herzlichen Dank für die liebe Aufnahme, die ich in Ihrem Hause fand, und Ihnen und Ihrer Frau Gemahlin die herzlichsten Grüße.

Ihr E. Bessel–Hagen.

1.13 08.07.1927, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte

(Postkarte)

Göttingen, d.8. Juli 1927

Lieber Herr Hasse!

Ich schicke jetzt die Correcturen Ihres Berichtes I a an Sie ab, obwohl ich noch stark am Anfange stecken geblieben bin, entsprechend unserer Verabredung. Ich habe übrigens zu dem bisher gelesenen nur wenig zu vermerken gehabt.

Gestern erhielt ich von Prof. Jung die Mitteilung, daß die Facultät meiner Umhabil. zugestimmt hat, mit der Aufforderung, Themata für die Antrittsvorlesung einzusenden. Dies habe ich soeben getan. Sie können, ganz wie es Ihnen lieb ist, einen Termin für die Antrittsvorles. festsetzen; nur hätte ich gerne anderthalb bis zwei Wochen Spielraum zur Praeparation, nachdem ein Thema gewählt ist.

Mit besten Grüßen, auch an Ihre Frau Gemahlin

Ihr E. Bessel–Hagen.

1.14 16.07.1927, Bessel–Hagen an Hasse

Göttingen, d. 16. Juli 1927

Lieber Herr Hasse!

Ich bin mit dem von Ihnen vorgeschlagenen Termin sehr einverstanden, würde vielleicht aber den Freitag vorziehen, wenn es für Sie ganz gleich ist. Auch daß Sie das Fermat–Thema vorschlagen wollen, ist mir sehr angenehm, da mir die Vorbereitung dazu unter den drei Vorschlägen am wenigsten Zeit kosten wird.

Dürfte ich Sie noch um eine Freundlichkeit bitten, nämlich beiliegendes Wohnungsinserat an die Geschäftsstelle irgend einer gut gelesenen Hallenser Zeitung zu adressieren. Vielleicht meldet sich jetzt schon jemand und ich könnte mir dann in zwei Wochen etwas ansehen. Ich wäre Ihnen für den Dienst sehr dankbar.

Mit herzlichsten Grüßen, auch
an Ihre Frau Gemahlin

Ihr E. Bessel–Hagen.

1.15 25.07.1927, Bessel–Hagen an Hasse

Göttingen, d. 25. Juli 27.

Lieber Herr Hasse!

Wenn es Ihnen recht ist, werde ich am Donnerstag mit dem späteren Zuge (19³⁰) in Halle eintreffen. Es wäre mir lieb, wenn für den Vortrag ein Raum gewählt wird, der unmittelbar vorher nicht benutzt wird, damit ich einige Figuren vorher an die Tafel zeichnen kann und mich damit während des Vortrages nicht aufzuhalten brauche. Von Halle aus werde ich dann auf kurze Zeit nach Berlin zu meinen Eltern fahren.

Empfehlen Sie mich bitte Herrn Prof. Jung und übermitteln Sie ihm meinen Dank für seine Mitteilung neulich.

Mit besten Grüßen an Sie und Ihre Frau Gemahlin

Ihr E. Bessel–Hagen.

1.16 05.09.1927, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte

(Postkarte)

Göttingen, 5. Sept. 1927

Lieber Herr Hasse!

Ich muß Ihnen gestehen, daß ich diesmal Ihre Correcturen nicht angesehen habe, da ich augenblicklich sehr intensiv in der Arbeit an dem Zahlentheoriereferat für das Pascal'sche Repertorium stecke und mich möglichst wenig davon abziehen lassen will. Ich bitte daher, nicht auf Correcturen meinerseits zu rechnen. Ich beginne auch schon, mich etwas auf meine Vorlesung im Winter vorzubereiten, finde aber den Stil, in dem die Geometer schreiben scheußlich; niemals klar formulierte Voraussetzungen u. Behauptungen; es müßte doch möglich sein, Geometrie ebenso exact und praecis darzustellen, wie Landau z. B. in seinen Vorlesungen die Zahlentheorie behandelt.

Mit den herzlichsten Grüßen an Sie und Ihre Gemahlin

Ihr E. Bessel–Hagen.

1.17 14.10.1927, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte

(Postkarte)

Halle 14. Oct. 27, 20³⁹ Uhr.

$$\sum_{\substack{\kappa+\lambda+\mu=0 \\ \kappa\lambda\mu\neq 0}} \frac{1}{\kappa\lambda^2\mu^3} = \sum_{\lambda=\mu} + \sum_{\lambda\neq\mu}$$

$$\sum_{\lambda=\mu} = \sum'_{\lambda=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(-2\lambda)\lambda^2\lambda^3} = -\frac{1}{2} \sum' \frac{1}{\lambda^6} = [\dots]$$

$$\sum_{\lambda\neq\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\kappa+\lambda+\mu=0 \\ \kappa\lambda\mu\neq 0 \\ \lambda\neq\mu}} \left(\frac{1}{\kappa\lambda^2\mu^3} + \frac{1}{\kappa\mu^2\lambda^3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\dots} \frac{1}{\kappa\lambda^2\mu^2} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{\lambda\neq 0 \\ \mu\neq 0 \\ \lambda\neq\pm\mu}} \frac{1}{\lambda^3\mu^3} = 0$$

w. z. b. w.

1.18 14.11.1927, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte

(Postkarte)

Halle, d. 14. Nov. 27.

Lieber Herr Hasse!

Ihre Karte enthält des Rätsels Lösung, die Identität heißt, wenn ich mich soeben nicht verrechnet habe

$$(1 - cx)^{-\frac{a}{c}} \cdot (1 - cx)^{-\frac{b}{c}} = (1 - cx)^{-\frac{(a+b)}{c}}$$

Es bleibt nur noch zu präzisieren, welchen Sinn die Potenzen bei complexen Exponenten haben sollen und ob u. wie weit die Binomialreihe gilt. Das dauert nur eine Viertel Stunde, die Karte soll aber vor der nächsten Leerung in den Kasten.

Beste Grüße

Ihr E. B.–H.

1.19 14.11.1927, Bessel–Hagen an Hasse

Halle, d. 14. Nov. 1927.

Lieber Herr Hasse!

Was ich Ihnen heute früh schrieb, stimmt noch nicht ganz, d. h. nur für $c = 1$, sonst liefert es eine andere auch recht nette Formel. Es hat mich aber auf den richtigen Weg gebracht.

Ich definiere eine Function $\varphi(x, c)$ folgendermaßen: Es soll sein

$$(1) \quad x = \varphi^{c-1} - \varphi^c = \varphi^{c-1}(1 - \varphi)$$

und für $x = 0$ soll $\varphi = 1$ werden. Dadurch ist für hinreichend kleines $|x|$ φ als eindeutige reguläre Function von x erklärt; die Potenz φ^{c-1} ist ja bei $\varphi = 1$ regulär als Function von φ . Ich behaupte nun, es gilt

$$(2) \quad [\varphi(x, c)]^{-a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a \binom{ck+a}{k}}{ck+a} x^k .$$

Wenn dies bewiesen ist, besagt Allen's Formel nichts als

$$(3) \quad [\varphi(x, c)]^{-a} [\varphi(x, c)]^{-b} = [\varphi(x, c)]^{-(a+b)}$$

Zum Beweise von (2) benutze ich die *Lagrange'sche Umkehrreihe*. (Vgl. z. B. Hurwitz–Courant, 2. Aufl. S. 139, Formel 6). Der Kürze halber setze ich $1 - \varphi = \omega$, sodaß

$$(4) \quad x = \omega(1 - \omega)^{c-1}$$

Nach der Lagrange'schen Formel wird

$$\begin{aligned} [\varphi(x, c)]^{-a} &= (1 - \omega)^{-a} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left\{ \frac{d^{k-1}}{d\omega^{k-1}} \left[+a(1 - \omega)^{-(a+1)} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega(1 - \omega)^{c-1}} \right)^k \right] \right\}_{\omega=0} \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k!} \left\{ \frac{d^{k-1}}{d\omega^{k-1}} \left[+a(1 - \omega)^{-(a+1)} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega(1 - \omega)^{c-1}} \right)^k \right] \right\}_{\omega=0} \\ &= + \frac{a}{k!} \left\{ \frac{d^{k-1}}{d\omega^{k-1}} (1 - \omega)^{-kc-a-1+k} \right\}_{\omega=0} \end{aligned}$$

1.20 08.01.1928, Bessel–Hagen an Hasse

Berlin, d. 8. Jan. 1928.

Lieber Herr Hasse!

Von meinem Mißgeschick mit dem störrischen Zeh haben Sie inzwischen durch den Brief meines Vaters \blacktriangleright gehört. Es betrübt und ärgert mich wirklich sehr, daß ich mich in meinem ersten Semester in Halle so schlecht einführe, und daß meine Zuhörer nun so um das betrogen werden, worauf sie Anspruch haben; denn allzuviel werde ich ja in der verbleibenden Zeit nicht erreichen. Hoffentlich haben die Studenten auch etwas Verständnis dafür, daß ich aus einer Zwangslage heraus die Vorlesungen ausfallen lassen muß, und nicht etwa eine Kleinigkeit zum bequemen Vorwand nehme, damit mein moralischer Credit bei ihnen nicht ganz untergraben wird. Ich wäre Ihnen sehr dankbar, wenn Sie mich auch bei Herrn Prof. Jung entschuldigten und ihm meine Grüße übermittelten.

Mein Befinden im Ganzen ist gut; nur muß ich noch auf der Chaiselongue liegen und nach Möglichkeit jedes Auftreten vermeiden. Etwa am Dienstag — wenn alles gut ist, seit der Operation ist der Verband noch nicht entfernt worden — soll dann die Hauttransplantation vorgenommen werden, von der mein Vater glaubt, sie wird notwendig sein; dann muß ich noch einige Tage im Bett liegen. Dieses dauernde Liegen und sich nicht bewegen dürfen bei sonst gutem Befinden ist sehr langweilig und macht mich etwas nervös.

Die Weihnachtstage in der Familie waren sehr nett und gemütlich; ich bin *so* glücklich, ein Elternhaus zu haben, in dem ich immer so viel Liebe und Verständnis finde, und das fühlt man in der Weihnachtswoche, wo die Pflichten des Alltages ruhen, besonders stark.

In letzter Zeit habe ich recht gründlich Waring's Problem studirt und werde wenigstens das Wichtigste davon noch vortragen können; muß dann aber natürlich darauf verzichten, vorher Zerlegung in Quadrate zu behandeln. Landau's Vorlesungen sind eine sehr nützliche Hilfe beim Praeparieren, aber paedagogisch völlig verfehlt und in den Einzelheiten wird der wahre Sachverhalt oft ganz entstellt. Darüber werden wir ja noch mündlich sprechen, falls es Ihnen nicht zu lange dauert, Ihre Besprechung bis zu meiner Rückkehr nach Halle zu verschieben.

Hoffentlich geht bei Ihnen im Hause alles gut.

Mit den besten Grüßen an Sie und die Ihren
Ihr E. Bessel-Hagen.

1.21 17.01.1928, Bessel–Hagen an Hasse

Berlin W. 15. Kurf. Damm 200

d. 17. 1. 28

Lieber Herr Professor!

Für Ihren freundlichen Brief vom 11. d. M. danke ich Ihnen vielmals. Wenn ich auch leider noch nicht imstande bin, Ihnen selbst zu schreiben, so möchte ich Ihnen doch über den Stand der Dinge hier berichten unter Inanspruchnahme der Güte meiner Mutter. Sobald der Zustand der Wunde an meiner Zehe es zuließ, d. h. am Donnerstag d. 12., hat mein Vater die Überpflanzung eines Hautläppchens aus dem Oberschenkel auf die Zehe vorgenommen. Aber leider ist der erhoffte Erfolg ausgeblieben. Erstens ist das Läppchen an der Zehe nicht angewachsen, so daß nun die natürliche Vernarbung der Wundfläche abgewartet werden muß. Zweitens ist aber auch aus unaufgeklärtem Grunde die Oberschenkelwunde, die durch einige Nähte geschlossen wurde, nicht glatt verheilt, sondern in entzündlichen Zustand mit Eiterbildung geraten, was mir einige Tage erhebliche Schmerzen und Fieber verursachte. Die Nähte mußten wieder entfernt werden, und auch hier ist nun mit langsamerer Heilung zu rechnen. Jetzt ist mein Befinden relativ gut, nur bin ich zu absoluter Bettruhe verdammt und der damit verbundenen Langeweile. Sie können sich vorstellen, wie unangenehm es mir ist, noch immer keinen Termin für meine Rückkehr nach Halle bestimmen zu können und hier zur Untätigkeit verdammt zu sein.

Gestern erhielt ich die Korrekturen unserer gemeinsam gelösten Aufgaben von W. Mayer. Da das Manuskript dabei lag, habe ich, so gut ich es im Bett konnte, die Korrekturen erledigt und lasse sie direkt an Bieberbach abgehen. Da nichts sachlich Wesentliches zu bemerken war, schien mir der Umweg über Ihre Adresse überflüssig, und ich hoffe, hierin Ihr Einverständnis zu finden.

Für die freundliche Absicht, mich zu besuchen, danke ich Ihnen nachträglich noch herzlichst. Ich kenne selbst zu genau die Schwierigkeiten, in einer fremden Stadt, noch dazu Berlin, bei kurzem Aufenthalte das Programm durchzuführen, als daß ich Ihnen auch nur den leisesten Vorwurf aus dem Nichtzustandekommen des Besuches machen könnte.

An Seine Spektabilität werde ich ein paar Zeilen schreiben, sobald ich wieder einige Bewegungsfreiheit habe. Ich hätte längst den schuldigen Besuch

gemacht, wäre nicht gleich zu Beginn des Semesters die dumme Fußgeschichte dazwischen getreten.

Mit der Bitte, mich Herrn Professor Jung und Ihrer Frau Gemahlin bestens empfehlen zu wollen, verbleibe ich mit herzlichem Gruße

Ihr sehr ergebener

E. Bessel-Hagen.

Darf ich mir unbekannter Weise in meines Mannes und meinem Namen auch eine Empfehlung gestatten?

Helene Bessel-Hagen

1.22 30.01.1928, Bessel–Hagen an Hasse

Berlin, d. 30. Januar 1928.

Lieber Herr Professor!

Für Ihre letzte Karte danke ich Ihnen herzlichst und möchte Ihnen einmal wieder berichten, wie es mit mir steht. Wie Sie sehen, geht das schon eigenhändig, ich liege jetzt nicht mehr im Bett, sondern angezogen auf einer Chaise longue. Erfreulicherweise sind jetzt von Tag zu Tag beim Verbinden deutliche Fortschritte zu sehen. Die Wunde von der Zehe wird von Tag zu Tag sichtbar kleiner und wird glatt und gut vernarben. Auch die Oberschenkelwunde bessert sich, sie ist nicht mehr entzündet und auch schon schmaler als anfangs; aber etwa 14 Tage wird es doch noch dauern, bis sie ganz verheilt ist; die Zehe wird früher fertig sein. Mein Vater behandelt mich aber auch mit ganz ausgesuchter Sorgfalt, um *alles* zu tun, was zu rascherer und glatterer Heilung beitragen kann.

Es ist mir sehr unangenehm, daß ich erst so spät nach Halle zurückkommen kann, und ich weiß noch gar nicht recht, was ich dann mit meinen Vorlesungen anfangen soll, wenigstens mit der Differentialgeometrie, in der in so kurzer Zeit kaum etwas zu erreichen ist. Ich überlege schon, ob ich auch meinen Hörern, die doch nun zu arg betrogen sind, einen Teil des Colleggeldes zurückerstatten muß.

In letzter Zeit habe ich mich hier dauernd mit Warings Problem beschäftigt und verstehe die Sache immer besser. Einiges kann ich, glaube ich, etwas vereinfachen; d. h. mein Abänderungsvorschlag scheint mir einfacher als die Darstellung in Landau's Vorlesungen.

Vor etwa drei Tagen bekam ich vom Decan eine Abschrift der Antwort, die vom Ministerium auf das Privatdocentenstipendiumgesuch erteilt wurde. Ich nehme an, Sie haben auch Kenntnis davon erhalten, sonst schicke ich Ihnen eine Abschrift der Abschrift, oder Sie lassen sich vom Decanat eine Abschrift anfertigen. Inhalt: Das Ministerium schiebt die Angelegenheit auf die Notgemeinschaft ab. Nicht sehr vertrauenerweckend klingt der Schlußsatz: „Im Bedarfsfalle wird geprüft werden, ob aus Mitteln der Unterrichtsverwaltung ein Stipendium gewährt werden kann“; wenn ich Sie recht verstand, war Ihnen doch damals sozusagen eines fest versprochen. Bei der Notgemeinschaft habe ich nun geringe Aussichten; denn vor einem Jahre erklärte sie an Courant kategorisch: „Eine weitere Verlängerung des Stipendiums kommt nicht

in Frage“, und jetzt ist in der Antwort an das Ministerium deutlich zu verstehen gegeben, daß sie höchstens dann das Stipendium verlängern würde, wenn meine bisherigen Arbeiten abgeschlossen seien und ich einen *neuen* Arbeitsplan vorlegte. Nun hat ja leider meine Erkrankung den Abschluss des Pascalreferates verzögert, und ich kann überhaupt nicht daran denken, im Sommer einen größeren „Arbeitsplan“ vorzunehmen, sondern muß eben alles alte fertig machen, um unbelastet in Bonn anfangen zu können. Da fällt es mir etwas schwer, der Aufforderung des Decans zu folgen, und einen Bericht über die Arbeiten des vergangenen Jahres nebst einem Plan einer neuen Forschungsarbeit einzureichen; jedenfalls möchte ich das nicht tun, ohne vorher Ihren Rat dazu gehört zu haben *). Vielleicht kann ich warten, bis wir mündlich darüber sprechen können; ich habe heute an Spectabilität geschrieben, um mich erstens für das Nicht-Besuchen zu entschuldigen, zweitens für sein Schreiben zu danken und darum zu bitten, mir etwas Zeit bis zur Einreichung meines Antrages zu gewähren.

Sonnabend besuchte mich Courant, der vorübergehend in Berlin war, und heute will mich Toeplitz besuchen, der auch für einige Tage hier ist. So bin ich doch nicht von aller Welt abgeschnitten.

Hoffentlich geht in Ihrem Hause alles gut. Mit den herzlichsten Grüßen an Sie und Ihre Frau Gemahlin und der Bitte, mich Herrn Prof. Jung zu empfehlen

Ihr E. Bessel-Hagen

*) In Frage kommt natürlich die Classenkörpertheoriedarstellung für die Annalen; ich möchte mich aber der Notgemeinschaft gegenüber nicht darauf festlegen, das im Sommer auszuführen. Außerdem ist das kein „Forschungs“-plan.

1.23 06.02.1928, Bessel–Hagen an Hasse

Berlin, d. 6. Febr. 1928.

Lieber Herr Hasse!

Besten Dank für Ihre beiden Briefe; der erste traf gerade ein, als ich selbst mit den Correcturen der Allen–Note beschäftigt war; so konnte ich gleich Ihre Verbesserungen eintragen und die Sache an Bieberbach abschicken. Hinsichtlich der Rückerstattung der Collegelder erteilte mir mein Bruder, mit dem ich neulich davon sprach, gerade den entgegengesetzten Rat, wie Sie in Ihrem Briefe, und begründete ihn vor allem damit, ich würde mir sonst die Studenten sehr verärgern. Natürlich möchte ich nicht gegen die Gepflogenheiten verstoßen, bin aber doch nicht ganz sicher, ob eine Rückerstattung wirklich nie geschieht, wenn ein Docent so viel hat ausfallen lassen müssen. Wenn ich nach Halle zurückkomme, kann ich mich ja noch einmal auf der Kasse erkundigen und im Zweifelsfalle auch den Decan entscheiden lassen.

Toeplitz riet mir, jetzt einen *vorläufigen* Bericht einzureichen, dem am 1. April (ca) ein zweiter folgen solle; so hätte ich die Zeit bis zum 1. April, um das Zahlentheoriereferat fertig zu machen, und könne dann etwas fertiges vorlegen, das keine „Vertröstung“ mehr sei. Das Arbeitsprogramm für die Verlängerung könnte ja dann sehr gut auf complexe Multiplication lauten, die ich als Fortführung meiner Untersuchungen über elliptische Modulfunctionen hinstellen könnte. Ohne Vorlegung von etwas wirklich Fertigem habe ich, glaube ich, bei der Notgemeinschaft keinerlei Aussicht. Ich hoffe sehr, nun mit Ihnen zusammen über die Fragen betreffend elliptische Modulf. u. singuläre Moduln arbeiten zu können; nun wird mir ja hoffentlich keine gesundheitliche Behinderung dazwischen fahren. Ob es gut ist, jemanden anzuführen, der sich über meine Arbeit an dem Pascal–Referat gutachtlich äußern kann, scheint mir zweifelhaft; natürlich nehme ich Ihr Anerbieten, dann Sie nennen zu dürfen, mit vielem Dank an.

Ihre Verwandtschaft mit der Familie Erman bereitet mir viel Vergnügen. Ich kenne und verehere *sehr* den hiesigen Aegyptologen Adolf Erman, der ein Vetter meines Vaters ist.

Mein Bein macht von Tag zu Tag sichtbare Fortschritte; ich hoffe daher noch immer, Anfang nächster Woche zurückzukehren. Versprechen kann ich freilich noch nichts, denn in solchen Dingen kann man nichts vorausberechnen.

Indem ich Ihnen noch einmal für Ihre freundlichen Ratschläge bestens danke, verbleibe ich mit besten Grüßen an Sie und die Ihren

Ihr E. Bessel-Hagen.

Meine Angehörigen lassen sich Ihnen gleichfalls bestens empfehlen.

1.24 15.03.1928, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte

(Postkarte)

Halle, 15. März 1928.

Lieber Herr Professor!

Wird für zwei beliebige von Null verschiedene ganze Zahlen a, b die Gauss'sche Summe definiert durch

$$G(a, b) = \sum_{n \pmod{b}} e^{\frac{2\pi i a}{b} n^2},$$

so gilt die Reciprocitätsformel

$$(*) \quad G(a, b) = \frac{1 + i \cdot \text{sign}(ab)}{4} \sqrt{\left| \frac{b}{a} \right|} G(-b, 4a),$$

insbesondere also für $a = 1, b > 0$

$$\begin{aligned} G(1, b) &= \sqrt{|b|} \cdot \frac{1+i}{4} \cdot (1 + i^{-b} + i^{-4b} + i^{-9b}) \\ &= \sqrt{|b|} \cdot \frac{(1+i)(1+i^{-b})}{2} \end{aligned}$$

d. h. $= (1+i)\sqrt{b}, \sqrt{b}, 0, i\sqrt{b}$, je nachdem $b \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$.

Das Citat für den Mordell'schen Beweis heißt:

„On a simple summation of the series $\sum_{s=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i s^2}{n}}$ “ (Messenger of Mathematics vol. 48 (1918), p. 54–56).

Mit besten Grüßen

Ihr E. B.–H.

1.25 20.04.1928, Bessel–Hagen an Hasse

Halle, d. 20. April 1928.

Lieber Herr Professor!

Besten Dank für Ihre Karte; ich hätte zwar auch so nicht vergessen, den Hinweis auf die Vorbesprechung zu geben, aber es ist ganz gut, daß Sie mich daran erinnern haben, daß es überhaupt Zeit ist, jetzt die Anschläge zu machen.

Auf Ihre Frage kann ich, nachdem ich heute den ganzen Tag darüber nachgedacht habe, noch keine Antwort geben. Ich denke immerzu, ich habe die Sache beinahe in der Hand, aber ich kann sie nicht ohne mehr Zeitaufwand ganz klar kriegen. In der Literatur fand ich bei Klein ein Citat auf die Hurwitz'sche Dissertation (Math. Annalen **18**); dort kommt folgende Formel vor

$$\frac{\sqrt[6]{\Delta'}}{\sqrt[6]{\Delta}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\omega_2^2}{\omega_2'^2} \cdot \frac{d\delta'}{d\delta} \cdot \frac{\delta^{\frac{2}{3}}(\delta-1)^{\frac{1}{2}}}{\delta'^{\frac{2}{3}}(\delta'-1)^{\frac{1}{2}}};$$

mit Strichen sind dabei die Größen bezeichnet, die einer Transformation n^{ter} Ordnung entsprechen. Ich besinne mich aber nicht mehr auf die Herleitung der Formel und auch nicht auf ihre Bedeutung; ich bin ihr heute nicht nachgegangen, weil meine Gedanken in andere Richtung wiesen.

Mir scheint, man soll das Schwergewicht der Untersuchung auf die Discussion der gruppentheoretischen Verhältnisse der Modulgruppe legen. Diese müssen doch verhältnismäßig leicht lehren, welches die *niedrigste* Potenz von $\frac{\sqrt[12]{\Delta(P)}}{\sqrt[12]{\Delta}}$ ist, die rational in j und $j(P)$ darstellbar ist. Das kann meinem Gefühl nach nur von der Restklasse von $p \pmod{12}$ abhängen. Nehmen wir z. B. an, (wie es bei $p = 13$ und überhaupt bei $p \equiv 1 \pmod{12}$ wirklich eintritt), daß schon $p \frac{\sqrt[12]{\Delta(P)}}{\sqrt[12]{\Delta}}$ rational durch j und $j(P)$ darstellbar ist, so würde ich in üblicher Weise bilden

□□□

$$\varphi = p \frac{\sqrt[12]{\Delta(P)}}{\sqrt[12]{\Delta}}$$

Γ_P sei die Untergruppe der Modulgruppe für die $PG_P = GP$, wo G_P in Γ_P , G Modulsustit. und Modulgruppe $= \Gamma_P R_1 + \Gamma_P R_2 + \cdots + \Gamma_P R_{\psi(P)}$. Dann

$\varphi(PG_P R_\nu) = \varphi(PR_\nu)$ und ich bilde

$$\sum_{(R_r)} \frac{\varphi(PR_r)}{j - j(PR_r)} = \text{rationale Function von } j;$$

$$[\dots] = \frac{H(j)}{\prod_{(R_r)} (j - j(PR_r))},$$

wo H ganz rational. u. s. w.

$$\varphi(P) = \frac{H(j(P))}{\text{Ableit. der Transformationsgl. für } j(P)}.$$

Nun denke ich, daß über die Coefficienten von H das q -Entwicklungsprincip Auskunft geben wird.

Durchgeführt habe ich noch nichts; entschuldigen Sie bitte die Unordnung des Vorangehenden; ich habe mich durch das Hin- und Herprobiren so nervös gemacht, daß eine geordnete Niederschrift mir nicht gelingt.

In den Ostertagen war ich in Berlin, sonst die ganze Zeit hier. An meinem Zahlentheoriereferat arbeite ich stramm und hoffe es in den Ferien noch fertig zu bekommen.

Mit vielen herzlichen Grüßen, auch an die Ihren,

Ihr E. B.-H.

1.26 24.04.1928, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte

(Postkarte)

Halle, d. 24. Apr. 1928.

Lieber Herr Hasse!

Vielen Dank für Ihren langen Brief; es freut mich sehr, daß wir ganz in der gleichen Richtung denken; da wird die mündliche Verständigung nachher umso leichter gehen. Auf Einzelheiten mag ich jetzt noch nicht eingehen; dazu muß ich das Ganze erst noch einmal gründlicher durchdenken und in den nächsten Tagen fehlt es mir etwas an Zeit, dies *systematisch* zu tun, da ich noch für das Semester etwas vorsorgen muß. Was mir im Moment noch nicht klar ist, das ist, was man mit $12p^{\text{ten}}$ Transformirten statt p^{ten} anfängt; wenn man die $12p^{\text{ten}}$ gebrauchen kann, ist natürlich die Einführung der Functionen $\sqrt[3]{j}$ u. s. w. überflüssig, sofern man nicht bei ihnen auf anderem Wege einsehen kann, daß sie im absoluten Classenk. liegen. Gerade $\sqrt[3]{j}$ wird doch viel von Weber verwandt, ich weiß aber nicht mit welchem Ergebnis. Die allgemeine von Ihnen am Schluss Ihres Briefes formulirte Frage gefällt mir sehr gut.

Ich freue mich sehr auf unser Wiedersehen; hoffentlich haben Sie sich recht gut erholt. Grüßen Sie bitte das Werratal und falls Sie auf der Rückreise in G. Station machen, diese viel geliebte Stadt.

Mit besten Grüßen

Ihr E. B.–H.

1.27 11.08.1928, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte

(Postkarte)

Halle a. S. 11. Aug. 28.

Lieber Herr Professor!

Heute nachmittag kam bei mir ein Paket mit 100 Sonderabdrucken der Binomialcoefficienten an. Vermutlich werden Sie die gleiche Sendung erhalten haben. Obwohl die Anzahl der Exemplare reichlich ist, scheint es mir überflüssig, daß wir an die selben Personen jeder schicken und möchte Sie daher bitten, einen modus procedendi vorzuschlagen. Was mich betrifft, werde ich wohl mit der Versendung warten, bis die Waring–Probl. Arbeit erscheint, die allerdings noch in Quarantäne liegt, d. h. noch nicht gesetzt ist; denn meine Kraitchik–Besprech. + der Allen Note ist mir für Versendung zu dürftig. — Das Arbeiten schmeckt mir jetzt *sehr* schlecht, es hilft aber nichts. Könnten Sie mir übrigens, falls Sie ihn auswendig wissen, den Titel des Vandiver’schen Referates schreiben, damit ich es mir von d. Bibl. verschaffen kann. — Neulich sah ich mir Ihre „Zerleg. in Primelemente“-Note genauer an. Die Behauptung, daß bei Z. P. E. Primhauptideal u. Primideal zusammenfallen, scheint mir nicht richtig. Im Ring $\mathbb{P}(x, y)$ ist (x, y) Primideal aber nicht Primhauptideal, wenn ich nicht irre. Mit besten Wünschen für die Ferien u. besten Grüßen an Sie u. Ihre Gemahlin Ihr E. B.–H.

1.28 29.08.1928, Bessel–Hagen an Hasse

Halle, 29. August 1928.

Lieber Herr Professor!

Besten Dank für Ihren Brief. Gestern habe ich die Frage meiner Nachfolgerschaft noch einmal mit Jung besprochen; er hat von sich aus keinen Kandidaten vorzuschlagen. Mir sind nach einigem Nachdenken noch die Namen Rogosinski, R. Brauer u. H. Hopf eingefallen. Ich weiß aber von keinem, ob er zu haben ist. Rogosinski hatte früher die Assistentenstelle in Königsberg, ob außerdem noch etwas, weiß ich nicht. Vielleicht würde er wechseln, da er schon sehr lange in K. sitzt und unser Lehrauftrag vermutlich nicht schlechter ist als seine dortige Stellung. Er ist verheiratet. Über R. Brauer wissen Sie mehr als ich. Wenn H. Hopf zu haben wäre, wäre das natürlich das beste. Mir ist beinahe so, als ob er vor seiner Amerikareise in Berlin außer Colleggeldern nichts hatte; wahrscheinlich haben aber die Berliner inzwischen diesen Zustand geändert. Wenn er in Berl. irgend eine Bezahlung erhält, ist es natürlich aussichtslos, ihn zu erhalten. Immerhin würde ich versuchen, das zu ermitteln. Damit ist aber meine Weisheit erschöpft.

Die Gauss'schen Summen habe ich auf folgende Endform gebracht: Es sei $b > 0$, $(a, b) = 1$, $b = 2^\alpha u$, $\alpha \geq 0$, u ungerade. Dann wird

$$G(a, b) \left(\text{d. i. } \sum_{h \pmod{b}} e^{\frac{2\pi i a}{b} h^2} \right) = i^\delta \cdot \frac{1 + i^{-b}}{1 - i} \left(\frac{\alpha}{u} \right) \sqrt{b},$$

wo $\left(\frac{\alpha}{u} \right)$ das Jacobische Symbol ist und

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \alpha = 0 \\ \text{beliebig} & \text{wenn } \alpha = 1 \\ \frac{\alpha-1}{2}u + \frac{\alpha^2-1}{4} & \text{wenn } \alpha \text{ gerade, } \alpha \geq 2 \\ \frac{\alpha-1}{2}u & \text{wenn } \alpha \text{ ungerade, } \alpha \geq 3. \end{cases}$$

Der Factor 2^α von b rührt also alles durcheinander. Eine verständige Deutung des i^δ habe ich nicht, vielleicht haben Sie eine mit den Begriffen der Classenkörpertheorie. Die Gemeinheit ist, daß i eine vierte u. nicht bloß eine zweite Einheitsw. ist, sodaß man mit Jacobi'schem bezw. Kronecker'schem Symbol allein nicht auskommt.

Flüchtigkeitsfehler im Pascal- oder Encyklopaediereferat gibt Jung ohne weiteres zu, hat aber keine Lust, sie zu berichtigen.

Sonstige Neuigkeiten habe ich nicht zu erzählen.

Viele herzliche Grüße Ihnen und den Ihren

Ihr E. B.-H.

1.29 06.10.1928, Bessel–Hagen an Hasse

Bonn, Lessingstr. 22, d. 6. Octob. 1928.

Lieber Herr Hasse!

Endlich finde ich Zeit, Ihnen ein par Worte zu schreiben und Ihnen vor allem noch einmal herzlichst für die so sehr freundliche Aufnahme in Allendorf zu danken; ich bitte Sie auch, bei Gelegenheit meinen Dank nochmals Ihren Eltern zu übermitteln. „Finde Zeit“ ist ein Euphemismus, denn die Unruhe der Packtage sind längst überwunden, nachdem sie es aber waren, setzte so schönes Wetter ein, daß ich gleich auszog, die prachtvolle Gegend kennen zu lernen, und wenn ich abends zurückkehrte, war die Lust zum Briefeschreiben auch nicht allzugroß. Gestern war ich zusammen mit einem Dr. Wegener, der eine Synthese von Astronom und Arithmetiker (Schüler von I. Schur) ist, bei herrlichem Sonnenschein auf dem Drachenfels (Siebengebirge) und habe den Rhein von oben bewundert. Es ist ein prächtiges Bild und durch die vielen Schiffe sehr belebt, Schlepper, die oft vier bis fünf lange Kähne ziehen, einer hinter dem anderen in ziemlich großen Abständen, der letzte wird oft über 500 m hinter dem Schlepper sein. Gottseidank stehen am Rhein keine Fabriken, die ebenso viel mal stärker riechen als Crölwitz¹ wie der Rhein breiter ist als die Saale; im Gegenteil, es ist sehr gute Luft. Die Stadt gefällt mir vorzüglich, über die schöne Lage der Universität an der Hofgartenwiese bin ich jedesmal wieder begeistert. In meiner Wohnung habe ich es mir auch schon recht behaglich eingerichtet.

Die Göttinger Tage habe ich vorwiegend zur Arbeit im Lesezimmer benutzt. Der Neubau des Institutes ist schon unter Dach und verspricht, innen sehr schön und praktisch zu werden. An Personalia ist nur zu melden, daß Grandjot in Paris ist und Frl. Noether im Winter nach Moskau gehen will.

Die Archimedesstelle, von der ich neulich sprach, steht in Bd. 1 der Heiberg'schen Ausgabe (Auflage von 1910) S. 10, 11 unter der Überschrift β' . Der Satz heißt: „Wenn zwei ungleiche Größen gegeben sind, so ist es möglich, zwei ungleiche Strecken zu finden, derart daß die größere Strecke zur kleineren ein kleineres Verhältnis hat als die größere Größe zur kleineren“. Ich glaube, das ist gerade, was Sie suchen. Der Wortlaut des Beweises ist wegen eines *namentlichen* Eukliditates verdächtig, stark überredigirt zu sein. Der Sinn des Beweises ist, modern ausgedrückt folgender:

1. undeutlich

Größere Größe heiße M
 Kleinere Größe heiße μ

Dann nehme ich von M eine dem μ gleiche Größe μ' fort, der Rest sei μ^* . Dann ist es möglich, ein solches ganzzahliges Vielfaches von μ^* zu bilden, das μ übertrifft, etwa $m\mu^*$. Ferner nehme ich irgend eine Strecke ZH an und verlängere sie um ein solches Stück HE , daß $ZH = m \cdot HE$. Dann $EZ : ZH$
 $\left(= m + 1 : m = (m + 1)\mu^* : m\mu^* = 1 + \frac{\mu^*}{m\mu^*}, m\mu^* > \mu, 1 + \frac{\mu^*}{m\mu^*} < \frac{\mu + \mu^*}{\mu} = \frac{M}{\mu} \right)$
 $< M : \mu$ wie verlangt. $\begin{array}{c} Z \qquad \qquad \qquad H \qquad \qquad \qquad E \\ | \text{-----} | \text{---} | \end{array}$

Zu mehr Auskunft über *Περί σφαιράς και κυλίνδρου* bin ich jederzeit bereit.

Ich wäre Ihnen sehr dankbar, wenn Sie mir nun, wo Sie wieder in Halle sind — oder sobald das der Fall sein wird — den Titel des Vandiver'schen Zahlkörperreferates mitteilten und die Publicationsserie, in der es erschienen ist.

Toeplitz ist noch nicht hier, wird aber morgen oder übermorgen eintreffen.

Mit vielen herzlichen Grüßen auch an Ihre Gemahlin und Ihr Töchterchen (Verzeihung! Ihre große Tochter, sie ist ja bald ein Jahr alt)

Ihr E. B.-H.

Wie hat sich die Angelegenheit mit Herrn Baer entwickelt?

1.30 11.12.1928, Hasse an Bessel–Hagen, Postkarte

(Postkarte)

Halle, 11. 12. 28.

Lieber Herr Bessel–Hagen!

Wir alle freuen uns außerordentlich, daß Sie uns Ihren Besuch in Aussicht stellen und wollen uns bemühen, Ihnen den Tag möglichst angenehm zu machen. So bittet Herr Baer Sie, gleich nach der Ankunft in seine Wohnung Hohenzollernstr. 10 zu kommen u. dort zu frühstücken (er möchte aber gerne die Ankunftszeit genau wissen — ich sagte vermutungsweise gegen 7^h — oder etwa schon 5^h?) Herr Baer will Sie dann den Vormittag über begleiten, weil er bis 12^h frei ist. Herr Jung bittet Sie dann zu Tisch. Um 4^h ist ferner eine außerordentliche Sitzung unseres neugegründeten mathem. Zirkels bei mir anberaumt, bei der wir uns freuen würden, wenn Sie uns — ganz anspruchslos — eine selbgeählte historische oder mathematische Miniatur erzählen würden. Abends darf ich Sie bitten, mit uns ganz einfach zu essen, und mir dann den Abend zu schenken, bis Sie zur Bahn müssen. Nun ist nur noch das Problem Behmann zu lösen, der bei unserem Zirkel nicht dabei ist. Sie treffen ihn jedenfalls bis 11^h in der Universität. Er sagte mir im übrigen, daß er den ganzen Nachmittag frei sei.

Bitte grüßen Sie Herrn Toeplitz bestens von mir.

Stets Ihr H. Hasse

P. S. Über Ihre Korrekturfragen können wir uns ja nun mündlich unterhalten.

1.31 23.04.1929, Bessel–Hagen an Hasse

Berlin W. 15. Kurfürstendamm 200

23. April 1929.

Lieber Herr Hasse!

Ihr Brief erreichte mich heute mittag hier, wo ich an der Hundertjahrfeier des archaeolog. Institutes und der Tagung der Gesellsch. f. antike Kultur teilnehme. Das ist nicht der einzige Grund meines Hierseins; ich wollte so wie so eine Woche nach Berlin, um im Elternhause „nach dem Rechten zu sehen“ und habe nur den Zeitpunkt meines Aufenthaltes so gelegt, dass ich die genannten Feierlichkeiten miterlebe. Bisher ist alles sehr schön und lohnend verlaufen; das neue Pergamon Museum hat mir großen Eindruck gemacht.

Leider kann ich Ihnen aus dem Stegreif nur unvollständige Antworten auf Ihre Fragen geben. Wo die Überlieferung der berühmten Inschrift über der Akademie beginnt, kann ich aus dem Kopf nicht sagen, hoffe aber, sowie mir in Bonn literarische Hilfsmittel zu Gebote stehen, leicht Näheres darüber ermitteln zu können. Sicherlich ist es antike Überlieferung, vielleicht aber, wie so viele Aussprüche berühmter Männer erfunden, um die Gesinnung möglichst treffend zu kennzeichnen. Doch will ich mich nicht in Vermutungen ergehen.

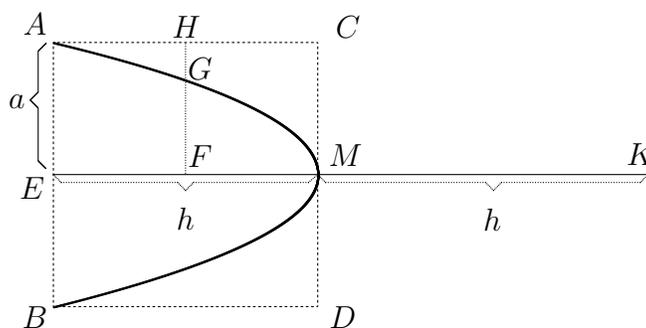
Mit dem von „Zeuthen entdeckten“ Archimedestext meinen Sie vermutlich die *ἑρσδος* (d. i. etwa „Methode“ als Kurztitel für „Methode unter Benutzung der Hebelgesetze geometrische Sätze aufzufinden“). Diese ist aber nicht von Zeuthen sondern von Heiberg entdeckt; genauer: Ein Bibliothekar aus Konstantinopel (der Neugriechen kürzt den langen Namen praktisch *Κωνσταντινούπολις* oder *Κ'πολις* ab) oder einer anderen südöstlichen Stadt teilte Heiberg mit, daß als untere Schrift eines Palimpsestes ein mathematischer Text aufgefunden sei. Heiberg stellte dann nach einigen Stichproben fest dass es sich um Archimedes handle. Die nähere Untersuchung der Handschrift ergab, dass sie außer einem Teil der bisher bekannten Schriften des A. einige bis dahin unbekannte enthalte, unter anderem die *ἑρσδος*. Alles steht in der 2. Aufl. der Heiberg'schen Archimedesausgabe, die *ἑρσδος* im zweiten Bande. Außerdem sind zahlreiche Übersetzungen erschienen, z. B. eine engl. von Heath, eine deutsche, ich glaube gemeinsam von Heiberg und Zeuthen, ich weiß aber nicht aus dem Kopf, ob als eigenes Werk oder in einer Zeitschrift (etwa *Bibl. Math.* 3. Folge).

Der Inhalt der $\nu\epsilon\varphi\omicron\delta\omicron\varsigma$ ist durchaus genetisch psychologisch. A. betont ausdrücklich, es seien keine Beweise, was er vorbrächte, sondern Plausibilitätsbetrachtungen, die einen erst zur Kenntnis der Theoreme führten; Exhaustionsbeweise hätten nachzufolgen. Den Nutzen solcher vorläufiger Erkenntnisse belegt er mit einem historischen Exempel: Den Satz Kegel = $\frac{1}{3}$ Cylinder mit gleich. Höhe u. gleich. Grundfläche habe zuerst Demokrit gefunden; bewiesen sei er aber erst durch Eudoxos. Trotzdem würde jedermann dem Dem. einen großen Anteil an der Entdeckung zusprechen.

Fortsetzung d. 24. April.

Heiberg datiert diese Schrift des Arch. sehr früh, Toeplitz und [...] dagegen aus mehreren Gründen spät, worauf ich jedoch nicht näher eingehen will. Der materielle Inhalt besteht aus Volumen- und Schwerpunktsbestimmungen von Rotationsparaboloid, Kugel, Rotationsellipsoid, zweischal. Hyperboloid, Segmenten davon u. s. w. Auch die Flächeninhaltsbestimmung des Parabelsegmentes wird wiederholt, ferner werden zwei teils krummflächig, teils ebenflächig begrenzte Körper behandelt, nämlich der Cylinderhuf, der entsteht, wenn man von einem geraden Kreiscylinder ein Stück abschneidet durch eine Ebene, die durch einen Durchmesser des Grundkreises gelegt ist und den Dachkreis berührt, und die Durchdringung zweier Kreiscylinder von gleichem Durchmesser, deren Axen sich rechtwinkelig kreuzen. Bei diesen Körpern war sowohl die mechanische Plausibilitätsbetrachtung wie der geometrische Beweis gegeben; doch von letzterem ist infolge Zerstörung der Handschrift nicht viel übrig.

Über die Art der Methode unterrichten am besten zwei Beispiele, die ich nur in äußerer Hinsicht (Ersetzung der Proportionenrechnung durch unsere Formelrechnung) vereinfacht vortrage. Es handele sich um das Volumen des Rotationsparaboloides mit Höhe h und Grundkreisradius a .



EMK sei ein Wagebalken, M sein Drehpunkt. AMB das Rotationsparaboloid, $ABCD$ ein Cylinder. Ich setze

$$FM = x, \quad FG = y, \quad FH = z$$

Dann ist

$$y = a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{h}} \quad \text{und} \quad z = a$$

Die Ebene FGH schneidet das Paraboloid in einem Kreise K_{par} und den Cylinder in einem Kreise K_{Cyl} und es wird

$$K_{par} : K_{Cyl} = y^2 : z^2 = x : h.$$

Aus dem Hebelgesetz folgt daher: Läßt man den Kreis K_{Cyl} an Ort und Stelle hängt aber den Kreis K_{par} im Punkte K auf, so besteht Gleichgewicht. Das selbe gilt für jeden beliebigen Schnitt senkrecht zum Wagebalken durch Cylinder u. Paraboloid. Daraus schließt A. (ohne Differentiale, d. i. kleine Scheiben einzuführen): Bleibt der Cylinder an Ort und Stelle der Länge nach auf den Wagebalken aufgespießt, so hält er Gleichgewicht dem Paraboloid, das mit seinem Schwerpunkt in K aufgehängt wird. Statt den Cylinder links der Länge nach aufzuspiessen, kann ich ihn auch in seinem Schwerpunkt, d. i. am Arme $\frac{h}{2}$ aufhängen. Also

$$\text{Volumen par.} : \text{Volumen}_{Cyl} = \frac{h}{2} : h,$$

$$\text{Volumen par.} = \frac{1}{2} \text{Volumen}_{Cyl}.$$

w. z. b. w.

Will ich den *Schwerpunkt* des $\square\square\square$ Paraboloides haben, so ersetze ich in der vorigen Betrachtung den Cylinder $z = a$ durch den Kegel $z = \alpha \frac{x}{h}$. Dann folgt

$$K_{par} : K_{Kegel} = y^2 : z^2 = h : x$$

und hieraus ähnlich wie oben

$$\text{Volumen par.} : \text{Volumen}_{Kegel} = h : \xi,$$

wo ξ die Entfernung des Schwerpunktes vom Scheitel. Also

$$\xi = h \frac{\frac{1}{3} \text{Vol. Cyl}}{\frac{1}{2} \text{Vol. Cyl}} = \frac{2}{3} h$$

w. z. b. w.

Dass Archimedes von den „Kreisen“ im Paraboloid, Kegel, Cylinder, ... redet und keine „Scheiben“ einführt, ist ein deutliches Zeichen seines Gefühls vom Wesen des Continuum. *Dieser* Teil der Überlegung ist natürlich leicht streng zu machen, indem man eingeschriebene und umgeschriebene Cylindersummen (ich meine die durch Rotation einer Treppenfigur



um die Axa entstehenden Körper) einführt und dann einen Exhaustionsbeweis nach den classischen griechischen Mustern führt. Das hat, wenn auch in anderer Form, Arch. an der Parabelquadratur gezeigt: in der so betitelten Schrift — die uns übrigens vermutlich nicht in ursprünglicher Fassung vorliegt — führt er den Ansatz mit dem Wagebalken mit einer Exhaustion für uns befriedigend streng durch; er selbst empfand aber offenbar die Hereinziehung der mechanischen Hebelgesetze als fremdartig und stand wohl auf dem Standpunct: „Wenn ich überhaupt mich um Strenge bemühe, dann will ich gleich ganz consequent verfahren und mit den Axiomen der Geometrie allein auskommen“. Jedenfalls findet sich sonst nirgends eine Andeutung, dass die Wagebalkenüberlegungen mit Exhaustion streng gemacht werden können, wenn man die Hebelgesetze als Axiome hinzunimmt.

In die Integralrechnungssymbolik übertragen liefert der Schwerpunkts- und Wagebalken-Überlegung folgende Umformung:

$$(*) \quad \int_0^h u(x) dx = \frac{\int_0^h x \cdot \frac{u(x)}{x} dx}{\int_0^h \frac{u(x)}{x} dx} \cdot \int_0^h \frac{u(x)}{x} dx = \xi \cdot \int_0^h \frac{u(x)}{x} dx,$$

wo u eine willkürliche Function ist, und ξ als Schwerpunktsabszisse gedeutet wird. Sind dann zwei der drei Grössen $\int_0^h u(x) dx$, ξ , $\int_0^h \frac{u(x)}{x} dx$ bekannt, so lehrt (*) die dritte finden. Indem man dies mit der trivialen Beziehung $\int (u + v) dx = \int u dx + \int v dx$ verbindet, erreicht man eine ganze Menge Relationen.

Herr Dieck ist, wenn ich den Namen nicht verwechsele, T. und mir wohlbekannt. Er (d. h. der den ich meine) hat ein, soviel ich weiß — ich schäme mich gestehen zu müssen, dass ich es noch nicht in den Händen gehabt habe — gutes mathematisches Lesebuch für mathematikbegeisterte Schüler höherer Classen und für Lehrer herausgegeben. Eine Besprechung findet sich, glaube

ich, in einem d. letzten Bände der D. M. V. Er war auch bei dem Bonner Osterferiencurs anwesend.

Ihren amerikanischen Report von Vandiver u. Wahlin erhalten Sie zurück, sobald ich wieder in Bonn bin. Ich wollte ihn noch vor meiner Abreise hierher absenden, wurde aber nicht mit der Erledigung aller solcher Packsorgen fertig.

Toeplitz geht es gottseidank nach seiner heftigen Lungenentzündung zu Ende des vorigen Semesters und Anfang der Ferien wieder gut, wenigstens so gut man es nach einer solchen Erschütterung des Körpers verlangen kann. Hoffentlich verträgt er schon die Semesterarbeit ohne Schaden; denn eine rechte Erholung, die er eigentlich gebraucht hätte, konnte er sich nicht leisten.

Mir geht es vorzüglich; allerdings habe ich mathematisch in letzter Zeit nicht viel gemacht, dagegen mich ziemlich eifrig in *Historicis* betätigt, im Sammeln der mathem. Fragmente, die wir in den letzten Jahrzehnten auf Papyrus wieder gewonnen haben. Leider ist es nicht sehr viel; trotzdem dauert die Sammelarbeit recht lange, weil alles sehr verstreut ist.

Durch Halle werde ich vor der Hand kaum kommen; vielleicht bietet sich während des Sommers eine Gelegenheit.

Hoffentlich geht es Ihnen und Ihrer Familie recht gut. Ihr Töchterchen ist sicherlich inzwischen ganz groß geworden. Grüßen Sie bitte die Ihren und die mathemat. Collegen recht herzlich und seien Sie selbst bestens begrüßt von

Ihren E. B.-H.

1.32 02.05.1929, Bessel–Hagen an Hasse

Bonn, d. 2. Mai 1929.

Lieber Herr Hasse!

Mit dem *μηδείς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω* habe ich nicht viel ausgerichtet. Ich habe nur bei Hankel ein Citat auf Tzetzes gefunden, das von den späteren Historikern abgeschrieben wurde. Tzetzes, „der nichtsnutzigste Byzantiner“ wie ihn Wil. gelegentlich nennt, lebte im 12^{ten} Jhd., war ein sehr gelehrtes Haus, und stopfte seine ganze Gelehrsamkeit und Belesenheit in ein Gedicht mit recht holprigen Versen, das unter dem Namen „Chiliaden“ citiert wird. Dort heißt es (Buch VIII, Nr. 249, Vers 971 ff.) unter der Überschrift *Περὶ τῆς ἐπιγραφῆς τῆς περὶ προθόρου[. . .] τοῦ Πλάτωνος τῆς μηδείς εἰσίτω ἀγεωμέτρητος* so:

*Πρὸ τῶν προθόρων τῶν αὐτοῦ γράψασ ὀπῆρχε Πλάτων.
Μηδείς ἀγεωμέτρητος εἰσίτου μου τὴν στέγην.
τουτέστι[. . .] ἄδικος μηδείς παρῆσερχέσθω τῆιδε.
ἰσότης γὰρ καὶ δίκαιόν ἔστε γεωμετρία.*

Vermutlich sind diese Verse für uns die einzige Quelle für die ganze Erzählung, sonst hätte wohl Hankel eine ältere citiert *). Natürlich hat Tzetzes die Sache aus einem alten Sammellexicon oder aus einer alten Erzählung genommen; es bleibt aber unklar was für eine Quelle das war und wann sie verfasst ist. So kann man ohne genauere philologische Studien nicht entscheiden, ob eine alte (auf die Wirklichkeit zurückgehende) Überlieferung vorliegt, oder eine geistreiche Erfindung. Auch der Wortlaut des Platon zugeschriebenen Türepigramms bleibt dunkel. Denn die Überschrift *Περὶ τῆς κτλ.* kann von Abschreibern (oder vielmehr deren Auftraggebern) hinzugefügt sein, und sollte sie von Tzetzes selbst herrühren, so ist damit auch noch nicht verbürgt, dass das Citat *μηδείς εἰσίτω ἀγεωμέτρητος* wörtlich gemeint ist. Die Fassung in den Versen rührt selbstverständlich von Tzetzes her und ist mit Rücksicht auf das Versmaß gewählt. Ich werde versuchen, dem Ursprung der ganzen Geschichte weiter nachzugehen, nur wird das einige Zeit dauern.

*) Bei Heiberg habe ich gar nichts darauf bezügliches gefunden; auch das läßt vermuten, daß Tz. die einzige Quelle für uns ist. Besäßen wir eine ältere und glaubwürdigere, so hätte sie Heiberg bei seiner immensen Belesenheit sicher gekannt und hätte sich sicher einen Hinweis darauf nicht entgehen lassen.

Heute habe ich auch Study aufgesucht, der reizend wie immer war. Sein Hamburger Vortrag ist nicht gedruckt, aber eine ziemlich ausgedehnte Auseinandersetzung mit Vaihinger fülle ein ganzes Capitel in d. 2. Auflage seiner realistischen Weltansicht und Lehre vom Raume (Vieweg, Braunsch. 1923). Im Übrigen hat Study mir erstens Grüße an Sie aufgetragen, zweitens solle ich Ihnen mitteilen, er sei ein „ganz böser Antiformalist“ und hielte es mit dem inhaltlichen Denken aber nicht mit dem Intuitionismus.

Heute haben hier die Vorlesungen begonnen. Über den Andrang habe ich noch keinen Überblick.

Mit vielen herzlichen Grüßen an Sie und die Ihren

Ihr E. B.-H.

1.33 10.05.1929, Bessel–Hagen an Hasse

Bonn, Lessing Str. 22,

10. Mai 1929.

Lieber Herr Hasse!

Ihren Durchschlag habe ich vor zwei Tagen flüchtig, soeben etwas genauer durchgesehen. Um ihn von Anfang bis zu Ende aufmerksam zu lesen, ist er mir freilich etwas zu lang, auch bin ich nicht philosophisch genügend geschult. Als ich Toeplitz, dem ich den Durchschlag morgen geben werde, davon erzählte, wurde er gleich sehr skeptisch und sagte, D's Philosophie sei ungenießbar und mit ihm sei gar nicht zu discutieren. Mein Eindruck beim Lesen war, das darf ich Ihnen wohl ehrlich schreiben, auch: Lohnt denn eine offensichtlich so törichte Ansicht eine so ausführliche Widerlegung? Verdient jemand, der so einfache Dinge nicht begreift, überhaupt als ernsthafter Gegner genommen zu werden? Einige Einzelbemerkungen, die ich mir beim Lesen gemacht habe, sende ich um Zeit zu sparen gleich auf den Conceptzetteln, auf denen sie entstanden sind. Falls Sie die *μηδεις ἀγεωμέτρητος εἰσίτω* Stelle doch beibehalten wollen, würde ich ohne jeden Umstand nur das Citat „Tzetzes, Chiliaden VIII, 972“ geben; denn eine überlieferungsgeschichtliche Discussion gehört nicht an diesen Ort. — Der Fund der Handschrift C des Archimedes liegt jetzt schon so weit zurück (ca. 1896), dass man kaum mehr von einem „neu aufgefundenen Text“ sprechen kann; vielleicht schreiben Sie statt „ , wie ... [. . .]“,: „ , wofür die mechanische Methode des Archimedes in seiner bekannten Schrift an Eratosthenes das glänzendste Beispiel ist,“. Eine Fußnote ist bei der Berühmtheit der Schrift kaum nötig. Der Titel, unter dem die Schrift überliefert ist, lautet: *Ἀρχιμήδους Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων Ἐρατοσθένην ἔφοδος*. Man citiert sie aber gewöhnlich kurz als *ἔφοδος*. Mit der Schrift ist meine erste Jugendsünde verknüpft, mein Schuldirektor, der meine Liebe sowohl zur Math. wie zur griech. Sprache kannte, regte mich an, statt einiger Schulaufsätze eine selbständige Arbeit über einen griechischen Mathematiker zu machen. Daraus wurde dann eine Besprechung der *ἔφοδος*; Einleitung, in der unverantwortlich naive Auffassungen der Differential- und Integralrechnung stehen — von der Möglichkeit einer logisch befriedigenden Begründung hatte ich eben noch keine Ahnung — , und Umsetzung des Textes aus der langatmigen Proportionensprache in die kürzere und für uns angenehmer zu lesende Formelsprache der analytischen

Geometrie, ferner mathematische Reconstruction des verlorenen Schlusses der Schrift. So kindlich die ganze Arbeit war, denke ich doch gerne an sie zurück.

Mit Dr. Wegner zusammen mache ich dies Semester ein Zahlentheorie-colloquium (Kreisteilungskörper) mit erfreulicher Beteiligung (ca. 10 Teilnehmer). Hoffentlich gelingt es uns, das Ziel, den Kroneckerschen Satz, zu erreichen.

Mit vielen herzlichen Grüßen,
auch an die Ihren

Ihr E. B.-H.

1.34 30.05.1929, Hasse an Bessel–Hagen

Halle 30. 5. 29.

Lieber Herr B±H!

Vielleicht interessieren Sie die beiliegenden Ergebnisse der hiesigen Philologen über das „*μηδέίς* ...“ Nach Einsichtnahme bitte ich um Rückgabe. — Morgen fahre ich zu Siegels Vorträgen nach Berlin. Nächste Woche spreche ich in Erlangen über Kummer’s ideale Zahlen vor dem Oberlehrer–Kolloquium. Kommen Sie im September nach Prag? Das wäre sehr nett. — Wie schön muß es jetzt am Rhein sein! Ich war eben 10 Tage in Allendorf, wo es auch zauberhaft war. Dort besuchte mich übrigens Suetuna aus Göttingen, den Sie sicher auch kennen. Er sprach jetzt besser deutsch, so daß wir viel von einander hatten.

Recht herzliche Grüße Ihr H. Hasse.

1.35 31.05.1929, Bessel–Hagen an Hasse

Bonn, Lessing Str. 22.

31. Mai 1929.

Lieber Herr Hasse!

Ihr Brief traf gerade ein, als ich meinen abgeschlossen hatte und auf dem Wege zur Universität in den Kasten zu fördern im Begriff war. Besten Dank. Es ist mir sehr erfreulich, die Citate der Neuplatoniker zu haben, damit ist der Spielraum doch schon etwas eingeeengt und man sieht, wo Tzetzes seine Weisheit hernahm.

Daß Siegel in Berlin vortragen wird, habe ich durch Hellinger, der neulich zu Besuch hier war, gehört; ich kenne aber die Themen noch nicht.

Was ich in den Ferien mache, weiß ich noch gar nicht. Dass ich nach Prag komme, glaube ich kaum; denn erstens sind Congresses recht kostspielig und zweitens habe ich etwas Angst vor Häufungspuncten von Mathematikern, weil ich mir dann immer so dumm vorkomme und das deprimierend wirkt. Vielleicht bietet sich aber eine Gelegenheit, uns sonst irgendwann zu treffen.

Hier ist es jetzt in der Tat herrlich. Wir hatten auch schon sehr schön warmes Wetter, das sich aber seit einigen Tagen wieder merklich abgekühlt hat. Jetzt scheint die Temperatur aber gottseidank wieder zu steigen. Es ist schade, dass ich nicht die Zeit habe, dauernd große Spaziergänge und Ausflüge zu machen, man möchte am liebsten den ganzen Tag die Natur genießen. Aber auch so bereitet es schon genug Freude, wenn jeder Gang zur Universität durch den schönen Hofgarten führt; welch ein Unterschied gegen die Friedrichstraße in Halle!

Mit herzlichsten Grüßen

Ihr E. B.–H.

1.36 31.05.1929, Bessel–Hagen an Hasse

Bonn, Lessing Str. 22.

31. Mai 1929.

Lieber Herr Hasse!

Erst heute komme ich zur Beantwortung Ihres Briefes vom 16., da ich in den Pfingstferien kein Mal in's Math. Seminar kam, um nach Literatur zu suchen. Inzwischen habe ich in Pringsheims Einleitung in die Zahlen- und Functionenlehre (od. so ähnlich) Bd 1, Cap. 1 eine recht befriedigende Darstellung gefunden.

Er geht von den ganzen positiven Zahlen aus, lehrt in diesen addiren u. multipliciren und, soweit möglich, subtrahiren u. dividiren. Dann setzt er an Stelle der pos. ganzen Zahlen Bruchsymbole bzw. Differenzensymbole. D. h. Wenn $\frac{a}{b} = c$ ist, bzw. $a - b = c$ ist, betrachtet er $\frac{a}{b}$ und $a - b$ als neue Zeichen, mit denen man nach bestimmten Regeln rechnen kann. Insbesondere ist festzustellen, wann $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ und $a - b = a' - b'$ ist. Sodann wird der Bereich dieser Bruch- und dieser Differenzensymbole erweitert, indem diejenigen hinzugenommen werden, die nach der ursprüngl. Deutung als Division od. Subtract. keinen Sinn haben, und es werden die alten Regeln auf den Bereich aller solcher formaler Bruch bzw. Differenzensymbole ausgedehnt, was glatt geht. Diese Darstellung scheint mir sowohl logisch einwandfrei wie auch psychologisch befriedigend.

Die weiteren Werke, in denen ich nachsehen wollte, sind Loewy's Algebra-buch, das nach meiner Erinnerung auch ganz unten anfängt und die berühmte Schrift Hankel's, in der er das Princip der Permanenz der formalen Gesetze zum ersten Male formuliert. Beide habe ich aber in unserem Seminar nicht gefunden.

Was den Unterschied zwischen Analysis und Synthesis betrifft, so nahm ich an, dass er den Philosophen viel geläufiger wäre als den meisten modernen Mathematikern. Vielleicht interessiert es Sie, einmal in Hankels Geschichte d. Math. im Alterthum u. Mittelalter zu sehen, pg. 137 ff., wo das Wesen der analyt. Methode sehr ausführlich besprochen wird.

Ihre Absicht, das Ansehen der Mathematik vor den Augen der Philosophie zu stärken, billige ich selbstverständlich auf das Äußerste, fürchte nur etwas, dass bei einsichtigen Philosophen das Gegenteil erreicht werden könnte, wenn sie so einfache Dinge mit einer solchen Breite behandelt finden. „Die

Philosophen“ sind doch nicht für die Entgleisungen des einen Herrn Dieck¹ verantwortlich. Sie kennen aber das Niveau der Philosophen und ihre Ansprüche besser als ich.

Kürzlich fiel mir zufällig ein Aufsatz Kroneckers über Abelsche Gleichungen, Berl. Monatsber. 1877, S. 845–851 in die Hände. Dort schreibt er über die Abelschen Gleich. über einem imaginär quadr. Körper:

„Ich habe schon im Monatsbericht vom Jahre 1857, S. 455 ff. die Natur der Gleichungen dargelegt, deren Wurzeln singuläre Moduln von elliptischen Functionen oder elliptische Functionen selbst sind, deren Moduln singulär und deren Argumente in rationalem Verhältnis zu den Perioden stehen. Nach obigen Ausführungen können dieselben kurz als Abelsche Gleichungen bezeichnet werden, deren Coefficienten keine andern Irrationalitäten als Quadratwurzeln ganzer Zahlen enthalten, und es ist zu vermuthen, dass die Gesamtheit solcher Gleichungen durch jene, die aus der Theorie der elliptischen Functionen hervorgehen, erschöpft wird.“

In unserer Sprechweise sind also *ausdrücklich* die Teilungsgleichungen mit aufgezählt. Hiernach wäre Ihr Text auf S. 41 Ihres Classenkörperberichtes Teil I zu berichtigen, falls nicht Kronecker an anderer Stelle sich so ausgedrückt hat, dass nur die singulären Moduln betrachtet werden. Ich war selbst über die Kronecker'sche Formulierung sehr überrascht.

Landau war so freundlich, mir ein Manuscript zur Ansicht zu senden, nach dem er jetzt über das Waring'sche Problem liest. Es ist eine neue Methode von Winogradoff, die folgenden Ansatz benutzt:

$I_N =$ Anzahl der Lösungen von $x_1^n + x_2^n + \cdots + x_r^n = N$ in ganzen $x_r > 0$.

$$P = N^{\frac{1}{n}}$$

$$\begin{aligned} I_N &= \sum_{0 < x_\nu \leq P} \int_0^1 e^{2\pi i y (x_1^n + x_2^n + \cdots + x_r^n - N)} dy \\ &= \int_0^1 S^r e^{-2\pi i y N} dy \end{aligned}$$

1. Name undeutlich

mit

$$S = \sum_{0 < x_\nu < P} e^{2\pi i y x^n}$$

Nun wird das Intervall $0 \dots 1$ durch Fareyreihe u. weitere Teilpuncte zerschnitten, in den Einzelintervallen S abgeschätzt indem y näherungsweise durch eine rat. Zahl ersetzt wird, u. s. w., wobei wesentlich die Bestandteile des Hardy-Littlewood'schen Beweises wiederzufinden sind. Das Ganze ist vielleicht etwas kürzer, aber weniger suggestiv als Hardy-Littlewood.

Mit den herzlichsten Grüßen an Sie u. die Ihren

Ihr E. B.-H.

1.37 16.06.1929, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte

Bonn, Lessing str. 22,
16. Juni 1929.

Lieber Herr Hasse!

Seien Sie bitte nicht böse, dass ich Ihren langen Brief vom 3. bis jetzt unbeantwortet ließ; die Zeit verfliegt mir im Umsehen und ich bin froh, wenn ich mit den laufenden Arbeiten des Semesters nicht in Rückstand komme. Für Ihren Brief meinen allerwärmsten Dank. Der Bericht über den Vortrag Siegels hat mich ausserordentlich interessiert. Ich kann mir lebhaft vorstellen, dass solch' ein Thema, von Siegel mit seiner imponierend überlegenen und doch klaren Art vorgetragen, einen überwältigenden Eindruck macht.

Ihre Mahnungen, doch nach Prag zu kommen, werde ich mir zum mindesten noch gründlich im Kopf herumgehen lassen; soweit dass ich jetzt schon „ja“ sage, bin ich noch lange nicht; aber meine Ablehnung ist doch etwas geschwächt.

Dass Sie täglich durch die Wüstenei der Wuchererstraße müssen, erregt in mir die stärksten Mitleidsgefühle. Wie ungerecht doch die Glücksgüter verteilt sind! Hier sind alle Wege so schön, dass man es gerne in den Kauf nähme, die halbe Woche durch die schlimmsten Gegenden Halle's zu wandern, wenn man sich dadurch das Recht erkaufte, die andere Hälfte der Woche hier zu sein. Und ich genieße ohne solchen Kaufpreis die ganze Woche die Pracht hier, während Sie unverdient die ganze Woche durch die Wüste stapfen müssen. Wie gerne gäbe ich Ihnen etwas von der Schönheit des Weges zur Univ. etwas ab, wenn es möglich wäre!

Herzlichste Grüße Ihnen, Ihrer Familie und den mathem. Collegen

Ihr E. B.–H.

1.38 15.07.1929, Bessel–Hagen an Hasse

Bonn, Lessing Str. 22,

15. Juli 29.

Lieber Herr Hasse!

Endlich will ich Ihnen für Ihren lieben Brief vom 24. 6. danken. Die Zeit vergeht dieses Semester so rasch, dass ich es kaum merke, und zum Briefeschreiben komme ich fast überhaupt nicht. Vor einer Woche hatten wir Besuch des Mathem. Seminars aus Münster hier, Behnke mit vielen Studenten. Am Montag war Scholz auch herübergekommen und trug sehr interessant über den Grund zur Zweiteilung Postulate und Axiome am Anfang des Euklid vor. Die Vorbereitung unserer Studenten auf die Vorträge, die sie den Münsterern vorsetzen sollten, machte viel Mühe. Ich hatte aber die Freude, dass der Hauptanteil aus dem zahlentheoret. Colloquium von Wegner mit mir bestritten wurde. Ein Vortrag, dass in der Progression $nx + 1$ unendl. viele Primzahlen existieren (elementar mit Kreisteilung) und zwei, die zusammen bewiesen, dass jede Abelsche Gleichung 3. Grades Wurzeln hat, die aus Einheitswurzeln rational zusammengesetzt sind.

Für Ihre Kroneckercitate besten Dank. Ich finde es bei Kroneckers Schreibweise immer sehr schwer, genau zu wissen, was er wirklich bewiesen hat und was er nur geahnt hat, d. h. wo er den einzuschlagenden Weg gesehen hat ohne alle Einzelheiten durchzugehen.

Ihre nicht vorhandenen $n \neq 1, 3$ -dimensionalen Kugelwellen regen mich sehr auf. Ich sehe der Erscheinung noch gar nicht auf den Grund und kann mich des Gefühls nicht erwehren, dass da irgend etwas nicht in Ordnung ist, d. h. dass der physikal. Ansatz $u = \varphi(r)F(r - ct)$ irgendwie nicht dem entspricht was man sucht. Ich sehe aber noch nicht, wo der Haken liegt. Ich werde aber weiter mit dem Problem spielen, wenn ich Zeit habe.

In nächster Zeit hoffe ich endlich dazu zu kommen, die Sonderabdrucke meines Zahlentheorieartikels und der Waring–Arbeit zu senden, die schon einige Zeit hier liegen, da ich zum Versand einfach nicht gekommen bin. Ich habe Ihnen zum Dank für Ihre so wertvolle Hilfe ein Exemplar mit Durchschuss zur Aufnahme von Notizen binden lassen.

Mit herzlichsten Grüßen an Sie und die Ihren

Ihr E. B.–H.

P. S. Da gerade Bd. **160** von Crelle im Erscheinen ist, könnte ihm nicht wieder wie früher bei den Bänden $\equiv 0 \pmod{10}$ ein Gesamtinhaltsverzeichnis für die letzten 10 Bde (bezw. diesmal für die letzten 20 od. 30?) mitgegeben werden? Das erleichtert doch das Aufsuchen von Arbeiten, von denen man nur ungefähr weiß, wo sie stehen, sehr)

1.39 25.07.1929, Hasse an Bessel–Hagen, Postkarte

(Postkarte)

Halle, 25. 7. 29.

Lieber Herr Bessel–Hagen!

Recht herzlichen Dank für die Dedikation Ihres Pascal–Referates. Mit dem durchschossenen Exemplar wollen Sie wohl verhindern, daß es mir geht wie Fermat: „... cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet“, wenn ich beim Durchblättern Ihres Buches irgendein schönes Theorem finde? Hoffentlich wird das der Fall sein. — Haben Sie Bieberbachs Besprechung des Pascal–Bandes in der D. L. Z. gelesen? — Auch für das Waring–Separatum besten Dank! Wir treiben hier fleißig hyperkomplexe Arithmetik. Schade daß Sie nicht dabei sind. Beste Grüße

Ihr H. Hasse.

1.40 11.10.1930, Bessel–Hagen an Hasse

Baden–Baden, Pension Haus Rössler, Bismarck Str. 11.

d. 11. October 1930.

Lieber Herr Professor!

Über Ihren Brief, der gestern hier eintraf, habe ich mich riesig gefreut. In der langen Zwischenzeit seit unserem letzten Briefwechsel habe ich wohl oft an Sie gedacht und mir vorgenommen, Ihnen zu schreiben; da aber die ärztliche Behandlung mir fast alle Zeit stahl, ist es bei dem frommen Vorsatz geblieben. Ich habe seit dem Juni noch eine sehr böse Zeit durchgemacht; infolge des zu langen Liegens im Gypsverband, noch dazu in unnatürlicher Stellung, waren Hüftgelenk und Knie des rechten Beines völlig versteift und setzten dem Wiederbeweglichwerden den hartnäckigsten Widerstand entgegen. Die ärztliche Wissenschaft, die an Methoden ungleich ärmer ist als unsere so viel schönere Mathematik, kennt bisher zur Erreichung des Zieles des Beweglichmachens keinen anderen Weg als den primitiven der Anwendung brutaler mechanischer Gewalt. So wurde ich zwei und ein halb Monate lang unter Erzeugung unsäglicher Schmerzen täglich in der Charité einer Folterkur unterzogen, die natürlich das Nervensystem sehr angriff. Einige Male ist die Bewegungskur, um noch stärkere Gewalt anwenden zu können, in Narkose vorgenommen worden. Erreicht ist wenigstens, daß ich das Bein zum Gehen benutzen kann; aber die Beweglichkeit ist noch sehr gering; ich kann das Knie noch lange nicht zu einem rechten Winkel biegen und auch das Bein in der Hüfte nur sehr wenig beugen, was z. B. das Sitzen erschwert. Auch kann ich mit den Händen den rechten Fuß nicht erreichen, sodass ich mir z. B. den rechten Schuh nicht alleine an- und ausziehen kann. (Für Strümpfe u. Hosen helfe ich mir mit Haken). Aber endlich, Mitte September, entließ mich Sauerbruch aus seiner Behandlung; freilich soll ich mich nachher in Bonn weiter behandeln lassen. So sind am 20. Sept. meine Eltern mit mir hierher zur Erholung gefahren, die wir alle drei sehr nötig hatten. Das Glück führte uns in eine vorzügliche Pension, wo wir sehr gut aufgehoben sind und eine sehr reichliche, vorzügliche und gut bekömmliche Verpflegung erhalten, die zu der Erholung sehr beiträgt. Baden–Baden ist ein ganz entzückender Ort; prachtvolle kräftige Luft, wundervolle Wälder an den Berghängen und eine üppige, an seltenen und ungewöhnlich kräftig entwickelten Pflanzen reiche Vegetation in den Privatgärten um die Villen und in den öffentlichen Anlagen. Große

Wege kann ich ja noch nicht zu Fuß machen; aber eine Elektrische ermöglicht es, die kleinen Strecken, die ich (mit Stöcken) gehe, stets in schöne Natur zu legen. Auch das Wetter war ganz befriedigend, letzte Woche freilich hat es sehr viel geregnet, vorher aber waren an fast jedem Tag eine Reihe schöner Stunden; auch hatten wir einige sehr schöne Tage. Wir drei haben uns schon recht gut erholt; allerdings könnte ich bei meinem stark reducirten Zustand (wie Siegel es ausdrücken würde) gut zwei Monate Erholungszeit an einem dazu so geeigneten Ort gebrauchen. Mitte nächster Woche begleiten mich meine Eltern nach Bonn (Adresse nach wie vor Lessing Str. 22), um mir bei dem Wiedereinleben dort behilflich zu sein.

Ich möchte versuchen, allen entgegenstehenden Schwierigkeiten zum Trotz, im Winter meine Tätigkeit wieder aufzunehmen. Die erste Zeit werde ich wohl mit Privatfuhrwerk zur Univers. fahren müssen, denn der Weg, der für normale Menschen 1/4 Stunde dauert, ist mir noch zu weit, und eine Verbindung durch Elektrische besteht nicht. Andererseits würde ich sehr ungerne meine Wohnung wechseln, weil sie nicht nur sehr hübsch ist, sondern erfahrungsgemäß meine Wirte dort mit größtem Entgegenkommen für mich sorgen. Noch dazu wohnen im Nachbarhause gute Freunde, die sich auch meiner in jeder Weise annehmen werden. Vielleicht werde ich mir für die Vorlesung nach dem Vorbilde von Weierstrass einen Anschreiber dressieren müssen, falls es mich zu sehr anstrengt, die ganze Stunde an der Tafel zu stehen. Für mich liegen die Schwierigkeiten eben jetzt in lauter Kleinigkeiten, von denen der gesunde Mensch überhaupt nicht ahnt, dass dort Probleme liegen können.

Ich werde auf Vorschlag von Toeplitz vierstünd. über „Differential- und Integralgleichungen der Math. Physik“ lesen, ein herrliches Gebiet, zu dem ich aber noch *sehr* viel lernen muß, um die Vorlesung anständig halten zu können. Ich habe schon in Berlin in der geringen Mußezeit, die mir übrig blieb, begonnen mich vorzubereiten, war aber durch die Schwerfälligkeit und Mangelhaftigkeit der Literaturbeschaffung oft behindert. Von der Preuß. Staatsbibl. in Berl. ist ja nichts zu bekommen, entweder „verliehen“, oder „steht im Lesesaal“, oder, falls nach 1925 erschienen, „noch nicht zugänglich“. Immerhin habe ich mich in den Gedankenkreis des Gebietes einigermaßen eingelebt und schon eine Disposition und eine Reihe von Einzelheiten fertig. — Ausserdem hält natürlich wie immer Toeplitz mit mir zusammen ein Mathematisch-Historisches Colloquium ab, in dem wir voraussichtlich Pappos lesen werden.

Auf Ihren Reciprocitätsgesetzbericht bin ich sehr neugierig. Hoffentlich vergeht nicht gar zu viel Zeit bis zu seinem Erscheinen. Ihre Ausführungen

über die Strahlclassenkörperdiskriminanten habe ich mit Vergnügen gelesen und wünsche, dass die noch fehlenden Fälle sich glatt erledigen. Ich zweifle, ob ich bei dem erhöhten Aufwand an Zeit und Kraft, den mich die Trivialitäten des täglichen Lebens kosten, bald wieder zu intensiverer mathematischer Arbeit, nach der ich mich *sehr* sehne, kommen werde. Vielleicht fällt bei der Vorbereitung auf die Vorlesung etwas ab; denn mir scheinen in der Math. Physik viele principiell wichtige Fragen (z. B. „wie sind die Probleme zu formulieren, damit sie eine *eindeutig* bestimmte Lösung haben“) noch ungeklärt oder nur mangelhaft geklärt.

Hoffentlich geht es Ihnen und Ihrer Familie recht gut und haben Sie auch etwas zu Ihrer Erholung in den Ferien getan.

Mit vielen herzlichen Grüßen an Sie und die Ihren

Ihr E. B.-H.

1.41 07.12.1930, Bessel–Hagen an Hasse

Bonn, Lessing Str. 22.

7. Dec. 1930

Lieber Herr Professor!

Haben Sie vielen Dank für die Übersendung Ihres Reciprocitätsgesetzberichtes und Ihrer anderen Sonderabdrücke. Ich habe bisher leider noch nicht die Zeit gefunden, mehr als flüchtig hineinzusehen, da ich zu meiner Vorles. über mathematische Physik sehr viel „lernen“ muß und die Vorbereitung zum Histor. Seminar auch viel Zeit verschlingt. Ich freue mich aber schon sehr auf die Lecture.

Herr Heegner hat sich inzwischen direct mit mir in Verbindung gesetzt und wird mich wohl in den Weihnachtsferien in Berlin aufsuchen. Hoffentlich gelingt auf mündlichem Wege die Verständigung.

Nun habe ich noch eine sehr unbescheidene Bitte auf dem Herzen. Ich möchte mir gerne den Neuabdruck der Steinitz–Arbeit zulegen. Dürfte ich Sie wohl bitten, mir ein Exemplar zum Autorenpreis zu beschaffen, vorausgesetzt, daß das Ihnen keine Umstände macht?

Mein gesundheitliches Befinden macht weiter Fortschritte. Die Gelenke sind freilich noch wenig beweglich, aber Kraft und Sicherheit beim Gebrauch des Beines nehmen monoton zu.

Viele herzliche Grüße

Ihnen u. den Ihren

Ihr E. B.–H.

1.42 04.01.1931, Bessel–Hagen an Hasse

Berlin, den 4. Januar 1931.

Lieber Herr Professor!

Haben Sie vielen Dank dafür, daß Sie mir ein Exemplar von Ihrer und Baers Ausgabe der Steinitzchen Abhandlung durch den Verlag haben überreichen lassen. *So* war meine Bitte eigentlich nicht gemeint gewesen, und ich hoffe, daß Sie durch die Übersendung weder Unkosten gehabt haben noch sonst in der Freiheit, Exemplare an von Ihnen ausgesuchte Adressaten zu senden, beschränkt worden sind. Jedenfalls freue ich mich über den Besitz des schönen Buches ausserordentlich und danke Ihnen vielmals für Ihre Liebenswürdigkeit.

Während der Ferien war Herr Heegner dreimal bei mir, und wir haben lange über seinem Manuscript gebrütet, ohne aber zu einem Ende gekommen zu sein. Herr H. hat früher Mathematik studirt und hat jetzt eine (nicht sehr hervorragende) Stellung bei der Firma „Telefunken“. Er ist ein schüchtern, körperlich schwächlich aussehender Mensch, der offenbar im Stillen neben seiner Berufstätigkeit seinen mathematischen Gedanken nachgeht — was ich aller Anerkennung wert finde — Seine Collegen in der Firma sollen, wie ich von meinem Vetter, der in der Patentabteilung der Firma eine der ersten Stellen innehat, gehört habe, Herrn Heegner den „drahtlosen Christus“ nennen. Bei der Unterhaltung zeigt sich, daß Heegner entschieden mathematisches Talent und auch beachtliche Kenntnisse besitzt; aber es fehlt ihm noch die Fähigkeit, seine Gedankenreihen zu formen und für andere verständlich auseinanderzusetzen. Das ist bei seiner völligen Isolirung von wissenschaftlich arbeitenden Mathematikern und bei seiner schüchternen vielleicht etwas zum Sonderling neigenden Veranlagung kaum zu verwundern. Ich glaube, er hat sich in die Materie tief hineingebohrt und sieht nun vieles ganz klar, was für andere eines umständlicheren Beweises bedarf. Mir scheinen aber alle seine Betrachtungen Hand u. Fuß zu haben und durchaus nicht im Leeren hängende Phantasien zu sein. Ich fände es schade, wenn die mathemat. Fähigkeiten, die Herr Heegner zweifellos hat, aus äußeren Gründen nicht recht zur Entfaltung kämen; aber es ist nötig, daß ein oder mehrere Mathem. sich seiner annehmen und ihm weiterzuhelfen versuchen. Aus eigener Kraft wird er seine Isolirung kaum überwinden. Für das erste habe ich mit ihm verabredet, daß er zunächst die auf sein allgemeines algebraisches Problem bezügl.

Paragrafen seiner Arbeit verständlich zu redigieren versucht und mir dann schickt. Schriftlich wird ja die Verständigung noch schwerer sein als mündlich; ich hoffe aber doch, daß es allmählich gelingt, zur Klarheit zu kommen. Auch Siegel, mit dem ich über den Fall sprach, erbot sich in sehr netter Weise, H. behilflich zu sein, wenn H. an ihn schriebe oder ihm Manuscripte zur Begutachtung vorlegte.

Das Fest habe ich im Elternhause sehr behaglich und unter dem freudigen Eindruck des großen in den letzten Monaten erreichten gesundheitlichen Fortschritts verlebt. Morgen fahre ich nach Bonn zurück. Am 2. Januar feierte mein Vater seinen 75. Geburtstag; wir finden aber alle, daß er sehr viel jünger aussieht als es die meisten Menschen in diesem Alter tun, und freuen uns über diesen Tatbestand sehr.

Hoffentlich haben Sie mit Ihrer Familie auch recht angenehme Weihnachtsferien gehabt.

Mit den besten Wünschen zum neuen Jahr und den herzlichsten Grüßen an Sie und die Ihrigen

Ihr E. B.-H.

1.43 03.11.1931, Bessel–Hagen an Hasse

Bonn Lessingstr. 22, den 3. Nov. 1931.

Lieber Herr Hasse!

Auf Ihren lieben Brief mit der freundlichen Einladung antworte ich erst heute, weil ich gerne die Rückkehr von Toeplitz abwarten wollte, der letzte Woche in Berlin war, um seine Ansicht betreffs der Wahl des Vortragsstoffes anzuhören. Vor allem also sehr herzlichen Dank für Ihre Einladung, die ich natürlich sehr gerne annehme, vorausgesetzt, dass Ihnen das Wenige, das ich zur Zeit anbieten kann, ausreicht. Als Termin möchte ich, um noch etwas Zeit zur Vorbereitung zu gewinnen, darum bitten, keinen zu frühen zu erhalten; da Sie gerne ein Wochenende im November haben möchten, schlage ich daher das letzte in den November fallende Wochenende vor. Die Zugverbindungen von hier nach Marburg scheinen nicht sehr zahlreich zu sein, wenn man nicht den überflüssigen Umweg über Frankfurt machen will. Wenn es Ihnen daher g a n z gleich ist, würde ich Sonnabend vormittag vorziehen, da ich dann eventuell am Freitag mittag noch lesen kann; allerdings würde ich dann erst ziemlich spät abends in Marburg eintreffen. Ich werde das Kursbuch aber noch genauer studieren; vielleicht finden sich noch andere Möglichkeiten.

Für das Thema mache ich Ihnen zwei Vorschläge. Der erste ist, dass ich über die Geschichte der Formel für die Berechnung des Flächeninhaltes eines Dreiecks aus seinen Seiten berichte. Ich bin mit der Untersuchung der Angelegenheit allerdings bisher noch zu keinem Abschluss gekommen und kann daher nur etwas Unfertiges bieten; ich glaube aber, das schadet nicht allzuviel: Die genaue Auseinandersetzung der Problemlage und der noch vorhandenen Schwierigkeiten scheint mir allein schon interessant genug zu sein. Freilich gehört der Gegenstand ganz der Elementarmathematik an. Das ist mein einziges Bedenken bei dem Vorschlag dieses Themas, ob der Kreis Ihrer Colloquiumszuhörer geneigt sein wird, etwas anzuhören, bei dem von moderner Mathematik nichts vorkommt. Der zweite Vorschlag, den ich aber selber viel weniger empfehlen möchte, ist eine elegantere Beweisanordnung eines Satzes von Bohr, den Bohr seinerzeit als Hilfsmittel zur Theorie der Dirichlet'schen Reihen aufgestellt hatte. Der Satz handelt davon, ein passendes System hinreichender Voraussetzungen für die Folge a_1, a_2, a_3, \dots aufzustellen, damit für *jede* Folge u_1, u_2, u_3, \dots , für die $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ im k -fachen Cesàroschen Sinne summierbar ist, auch die Reihe $a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \dots$ im k -fachen Cesàroschen Sinne summierbar ist.

Der Bohrsche Beweis rechnet in naiv-natürlicher Weise mit iterirten partiellen Summationen darauf los, was aber recht mühsam und wenig durchsichtig ist. Auf Anregung von Toeplitz habe ich die Sache mit Matrices viel eleganter und durchsichtiger, wenn auch kaum kürzer, gemacht. Also eine an sich unbedeutende und wenig aufregende oder Spannung hervorrufende Sache, die mir daher zum Vortrag weniger geeignet erscheint und die ich Ihnen nur deshalb mitgenannt habe, damit ein modernes Thema da ist, falls Ihnen das Thema aus der Geschichte der Elementarmathematik nicht zusagen sollte. Weiter habe ich leider im Augenblick nichts auf Lager.

Schreiben Sie mir doch bitte noch, auf wieviel Vortragszeit ich mich ungefähr einrichten soll.

Gesundheitlich geht es mir jetzt sehr gut; ich habe im October noch viele Spazirgänge und Ausflüge an unserm herrlichen Rhein gemacht. Hoffentlich geht es Ihnen und den Ihren auch gut.

Mit vielen herzlichen Grüßen an Sie und Ihre
Familie und nochmaligem sehr herzlichen Dank für die Einladung

Ihr E. B.-H.

1.44 03.12.1931, Hasse an Bessel–Hagen

Marburg–Lahn, den 3. 12. 31

Lieber Herr Bessel–Hagen!

Hoffentlich sind Sie inzwischen in den Besitz unserer Abrechnung gekommen. Haben Sie noch mehr Auslagen gehabt, dann schreiben Sie es bitte offen.

Eben las ich Ihre Besprechungen der beiden Arbeiten von U. Wegener im letzten Heft des Zentralblatt. Das veranlaßt mich, Sie auf den Umstand hinzuweisen, daß die weitere Arbeit des Herrn Wegener in *Annalen* **105**, S. 628–631, Zur Arithmetik der Polynome, einen sehr schlimmen Fehler enthält: Satz II und somit auch Satz II' gelten nur für *irreduzible* Polynome (oder höchstens für solche, die nur zwei irreduzible Faktoren haben). Der Fehler ist auf S. 630 ganz unten unterlaufen, wenn der für zwei Faktoren geführte Beweis ohne weiteres als auch für mehr Faktoren (durch eine triviale Induktion) gültig vorausgesetzt wird. Das ist aber nicht der Fall, weil drei Körper sehr wohl zu je zweien teilerfremd in bezug auf den Grundkörper sein können, während doch jeder im Kompositum der beiden andern enthalten ist. Beispiel: Drei voneinander abhängige Quadratwurzeln (aus d_1 , d_2 und d_1d_2).

Ich wollte Ihnen das nur für alle Fälle rechtzeitig mitteilen, da anzunehmen ist, daß Sie auch das Referat *dieser* Arbeit zu schreiben haben. Andernfalls bitte ich Sie um die Freundlichkeit, Herrn Neugebauer entsprechend zu orientieren.

Herrn Wegener selbst habe ich natürlich auch schon in Kenntnis gesetzt, und wir geben gemeinsam eine Berichtigung heraus. Ihr Vortrag hat hier allgemein sehr gefallen, und besonders auch den Herrn Kollegen „von der anderen Abteilung“ Spaß gemacht.

Herzliche Grüße und nochmals besten Dank für Ihr Kommen, Grüße ferner auch an die anderen Bonner Herren,

stets Ihr

Hasse

1.45 13.02.1933, Hasse an Bessel–Hagen

Marburg–Lahn, den 13. 2. 33

Lieber Herr Bessel–Hagen!

Sie haben das Wahlformular mißverstanden, wohl auf Grund einer ungeschickten Anordnung der Vorschläge. Die Namen Hasse–Weyl bedeuten nur die Unterschriften des Vorstandes des vorschlagenden Verbandes (D. M. V.), Bieberbach fehlt dabei, weil er selbst einer der Vorgeschlagenen ist. Der Wahlvorschlag für die reine Mathematik lautet (letzte Spalte): *Bieberbach, Carathéodory, Hecke*. Das sind ja auch die bisherigen Mitglieder.

Es hat mich sehr gefreut, bei dieser Gelegenheit mal wieder von Ihnen zu hören. Ihr Kolloquium mit Becker muß ja sehr interessant sein. Ich werde mich im nächsten Semester auf ähnliche Bahnen begeben, indem ich mit Frank und Mahnke ein Aristoteles–Seminar über Mathematik und Philosophie bei Aristoteles abhalten werde.

Wissen Sie übrigens, daß der indische Hardy–Schüler *Chowla* auf elementar–analytischem Wege die Gaußsche Vermutung bewiesen hat, wonach es nur endlich viele imaginär–quadratische Zahlkörper der Klassenzahl 1 gibt? Ich finde das sehr erstaunlich, ich meine daß der Beweis elementar–analytisch geht, nicht die zu erwartende Tatsache selbst.

Herzliche Grüße allerseits

Ihr

Hasse

1.46 20.03.1933, Bessel–Hagen an Hasse

Bonn, Lessingstr. 22, 20. März 1933.

Lieber Herr Hasse!

Da ich mich letzte Woche sehr in eine Betrachtung einer Frage der Mechanik verbiestert hatte, kam ich erst gestern dazu, über Ihren Modulbrief nachzudenken. Zunächst weiß ich nichts zu helfen und fürchte, daß man mit $\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\omega} j(\omega)$ nichts anfangen kann. Für diesen Ausdruck gelten noch die folgenden Formeln (s. *Fricke*, Ellipt. Funkt. Bd. 1, S. 316–317, Formeln (4), (9), (11), (12))

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\omega} j(\omega) &= \frac{2^5 \cdot 3^3}{\pi i} \frac{d}{d\omega} \delta(\omega) = \frac{2^5 \cdot 3^3}{\pi i} \left[-\frac{\omega_2^2}{2\pi i} D_\eta(\delta) \right] \\
 &= \frac{2^4 \cdot 3^3 \cdot \omega_2^2}{\pi^2} \cdot \left[-2 \cdot 3^2 \frac{g_2^2 g_3}{\Delta} \right] \\
 \text{(a)} \qquad \qquad \qquad &= -\frac{2^5 \cdot 3^5 \cdot \omega_2^2}{\pi^2} \cdot \frac{g_2^2 g_3}{\Delta},
 \end{aligned}$$

wobei D_η ein Zeichen für den Differentiationsprozess

$$D_\eta = \eta_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2} = -6g_3 \frac{\partial}{\partial g_2} - \frac{1}{3} g_2^2 \frac{\partial}{\partial g_3}$$

ist. $[\eta_1, \eta_2]$ in der Bedeutung $\eta_i = \frac{\sigma'}{\sigma}(u + \omega_i | \omega_1, \omega_2) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u | \omega_1, \omega_2)$. $\frac{g_2^2 g_3}{\Delta}$ ist bei homogenen Modulsstitutionen invariant, hat aber den Homogenitätsgrad -2 , der durch das nicht-invariante ω_2^2 compensiert wird. Formel (a) wird in Anbetracht des Nenners π^2 nicht das geeignete Hilfsmittel sein, um zu zeigen, daß im singulären Fall eine ganze algebraische Zahl herauskommt. Sollte dies überhaupt richtig sein, so würde Formel (a) ulkige Darstellungen für π^2 liefern.

Jedenfalls kann man $J_{p^2}(j, j)$ auf elementar-algebraischem Wege mit der Function $J_p(x, y)$ verknüpfen. Ob damit etwas gewonnen ist, weiß ich nicht.

Ich setze wie Sie

$$P_\nu = \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}; \quad \nu = 0, 1, \dots, p^2 - 1$$

$$P'_\nu = \begin{pmatrix} p & \nu \\ 0 & p \end{pmatrix}; \quad \nu = 1, \dots, p - 1$$

$$P'' = \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und außerdem

$$Q_\nu = \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & p \end{pmatrix}; \quad \nu = 0, 1, \dots, p - 1$$

$$Q_\infty = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann wird

$$P_{\kappa p + \lambda} = Q_\kappa Q_\lambda; \quad \kappa = 0, 1, \dots, p - 1; \quad \lambda = 0, 1, \dots, p - 1$$

$$P'_\nu = Q_\nu Q_\infty; \quad \nu = 1, \dots, p - 1$$

$$P'' = Q_\infty Q_\infty$$

Hieraus folgt, wenn zur Abkürzung

$$j = j(\omega); \quad j_\nu = j(Q_\nu(\omega)) \quad (\nu = 0, 1, \dots, p - 1, \infty)$$

gesetzt wird, identisch in x :

$$(b) \quad J_{p^2}(x, j) = \frac{J_p(x, j_0) \cdot J_p(x, j_1) \cdots J_p(x, j_{p-1}) \cdot J_p(x, j_\infty)}{(x-j)^{p+1}}$$

Der Nenner auf der rechten Seite ist nur scheinbar, da $\frac{J_p(x, j_\nu)}{(x-j)}$ für $\nu = 0, \dots, p - 1, \infty$ je ein Polynom p^{ten} Grades in x ist. Setzt man $x = j$ ein, so entsteht

$$(c) \quad J_{p^2}(j, j) = J'_p(j, j_0) \cdot J'_p(j, j_1) \cdots J'_p(j, j_\infty),$$

wo $J'_p(x, y)$ die Bedeutung $\frac{\partial}{\partial x} J_p(x, y)$ hat. Aber von hier an weiß ich nicht weiter, da ich in dem Ansatz $J_p(x, y) = (x^p - y)(x - y^p) + p\mathcal{P}(x, y)$ über das Polynom $\mathcal{P}(x, y)$ nichts weiß. Meine Versuche, weiter zu rechnen, sind immer stecken geblieben.

Für Ihren sehr interessanten Brief vom 27. Febr. danke ich Ihnen noch nachträglich vielmals. Schade, daß Chowla noch nicht richtig ist. Hoffentlich läßt sich die Lücke füllen oder der falsche Hilfssatz von Titchmarsh durch etwas anderes ersetzen.

Toeplitz ist zur Zeit in Berlin, hat aber leider von seinem Aufenthalt dort nur wenig, da er sich wieder einen Bronchialkatarrh geholt hat und liegen muss.

Hoffentlich geht bei Ihnen alles gut. Mit vielen herzlichen Grüßen an Sie und Ihre Frau Gemahlin

Ihr E. B.-H.

1.47 05.05.1933, Hasse an Bessel–Hagen, Postkarte

(Postkarte)¹

Marburg, 5533

Lieber Herr Bessel–Hagen!

Das unendliche Galoissche Feld zu p ist der algebraisch–abgeschlossene Körper zum Primkörper von p Elementen, oder also der Vereinigungskörper aller endlichen zu p gehörigen Körper. Siehe Steinitz §§16,17.

Für Ihre Auskunft über die Teilerdeterminante besten Dank. Herzlichen Gruß

Ihr

Hasse

1. Randvermerk von Roquette: *Aus dem Nachlass Bessel–Hagen von Neuenschwandner*

1.48 20.06.1935, Bessel–Hagen an Hasse

Erich Bessel–Hagen
Bonn Goethestr. 6.

1935 Juni 20

Lieber Herr Hasse!

Anfang Juli, d. h. etwa vom 7. bis zum 20. beabsichtige ich, mich mit meinen Eltern im Harz zu treffen. Ich habe nun in Erwägung gezogen, auf der Hinreise die Fahrt in Göttingen zu unterbrechen, und möchte daher, um ein ungefähres Programm machen zu können, Sie darum bitten, mir zu schreiben, ob Sie voraussichtlich dann (also in den Tagen etwa vom 4. bis 6. Juli) in Göttingen sein werden. Natürlich würde ich Sie sehr gern einmal wiedersehen. Sie können sich kaum vorstellen, wie ich mich über die Hoffnung freue, Sie vielleicht in absehbarer Zeit in unserem Kreise hier zu haben, und wie ich mich umgekehrt davor fürchte, dass etwas dazwischen kommen könnte. Wir werden uns sicher vielerlei zu erzählen haben.

Mit herzlichsten Grüßen an Sie und Ihre Familie

Ihr

E. B.–H.

1.49 29.06.1935, Bessel–Hagen an Hasse, Postkarte

(Postkarte)

Bonn, d. 29. Juni 1935.

Lieber Herr Hasse! Besten Dank für Ihren Brief! Ich bin erst heute dazu gekommen, mein Reiseprogramm ungefähr zu entwerfen. Wenn alles so geht, wie ich möchte, werde ich Donnerstag u. Freitag in G. sein, d. h. Mittwoch abend ankommen und Sonnabend vorm. weiterfahren. Ob ich es so mache, hängt noch davon ab, ob die von mir zusammengestellte Route für Ferienfahrkarten zulässig ist oder nicht, was ich erst erfragen muss. Ich kann mir gut denken, dass Sie nach Semesterschluss noch sehr beschäftigt sind, und will Ihnen selbstverständlich da nicht noch zur Last fallen, würde mich aber natürlich doch sehr freuen, wenn ich Sie für kurze Zeit wiedersehen und mich mit Ihnen unterhalten dürfte. Am einfachsten scheint es mir, ich rufe Sie an, wenn ich in G. bin, damit Sie die Zeit so bestimmen können, wie es für Sie am bequemsten ist. Ich habe in diesen Tagen in G. ausser dem Wiedersehen einiger Bekannter nichts vor, kann mich also ganz nach Ihnen richten. Sollte Ihre Arbeitslast aber so gross sein, dass Ihnen ein Besuch dazwischen gar zu unbequem ist, so sagen Sie mir dann ruhig ab! Ich werde das zwar mit Betrübnis, aber mit Fassung ertragen.

Mit herzlichsten Grüssen an Sie und die Ihrigen

Ihr

E. B.–H.

1.50 Undatiert, Bessel–Hagen an Hasse

Braunlage i. Harz, Haus Klavehn, Am Jermerstein 17.

Lieber Herr Hasse!

Über Ihre Aufgabe zur additiven Zahlentheorie habe ich noch viel nachgedacht, bin aber leider kein bisschen weitergekommen. Eine allgemeine Formel aufzustellen scheint mir hoffnungslos.

Es sei $N_p(m)$ = Anzahl der Zerfällungen von m in p verschiedene positive Summanden und $M_p(m)$ = Anzahl der Möglichkeiten, die Zahl m aus den Summanden $1, 2, \dots, p$ (jeder beliebig oft genommen) additiv zusammenzusetzen. Dann ist

$$(1) \quad N_p(m) = M_p\left(m - \frac{p(p+1)}{2}\right).$$

Beweis: Entweder durch unmittelbares Betrachten der Zerfällungen (A), oder analytisch (B).

Ad (A): Aus $m = a_1 + a_2 + \dots + a_p$ ($1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_p$) folgt

$$m - \frac{p(p+1)}{2} = (a_1 - 1) + (a_2 - 2) + \dots + (a_p - p);$$

dies sind p Summanden, unter denen auch gleiche vorkommen können. Sind die verschiedenen unter diesen Summanden y_1, y_2, \dots, y_k und ihre Häufigkeiten x_1, x_2, \dots, x_k , so ist

$$m - \frac{p(p+1)}{2} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_k y_k,$$

wo alle $x_i \leq p$ sind. Dies ist also, wenn ich jetzt die x als Summanden u. die y als Häufigkeiten lese, einer der in $M_p\left(m - \frac{p(p+1)}{2}\right)$ abzuzählenden Möglichkeiten. Umgekehrt u. s. w.

Ad (B): $N_p(m)$ = Coeff. von $t^p x^m$ in $F(t, x) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + tx^n)$.

Es ist

$$F(t, x) = (1 + tx) \cdot F(tx, x),$$

also wenn $F(t, x) = 1 + \varphi_1(x) \cdot t + \varphi_2(x) \cdot t^2 + \dots$ gesetzt wird,

$$\varphi_\nu(x) = x^\nu \varphi_\nu(x) + x \cdot x^{\nu-1} \varphi_{\nu-1}(x)$$

$$\varphi_\nu(x) = \frac{x^\nu}{1 - x^\nu} \varphi_{\nu-1}(x)$$

$$\varphi_p(x) = \frac{x^{\frac{p(p+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2) \cdots (1-x^p)}$$

Also

$$\varphi_p(x) = \frac{x^{\frac{p(p+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2) \cdots (1-x^p)} = \sum_{m=0}^{\infty} N_p(m) x^m;$$

aber offenbar

$$\psi_p(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2) \cdots (1-x^p)} = \sum_{m=0}^{\infty} M_p(m) x^m.$$

Weiterhin beschäftige ich mich der Einfachheit halber nur mit $\psi_p(x)$ und $M_p(m)$. Durchläuft ϱ_k alle primitiven k^{ten} Einheitswurzeln, so ist

$$\frac{1}{\psi_p(x)} = \prod_{\ell=1}^p (1 - x^\ell) = \prod_{\ell=1}^p \prod_{k|\ell} \prod_{\varrho_k} (1 - \varrho_k x) = \prod_{k=1}^p \prod_{\varrho_k} (1 - \varrho_k x)^{\left[\frac{p}{k}\right]}.$$

Die Partialbruchzerlegung von $\psi_p(x)$ hat daher die Gestalt

$$\begin{aligned} \psi_p(x) &= \sum_{k=1}^p \sum_{\varrho_k} \sum_{\ell=1}^{\left[\frac{p}{k}\right]} \frac{c_{p, \varrho_k, \ell}}{(1 - \varrho_k x)^\ell} \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{\varrho_k} \sum_{\ell=1}^{\left[\frac{p}{k}\right]} \sum_{n=0}^{\infty} c_{p, \varrho_k, \ell} \binom{\ell + n - 1}{\ell - 1} \varrho_k^n x^n. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$(2) \quad M_p(n) = \sum_{k=1}^p \sum_{\ell=1}^{\left[\frac{p}{k}\right]} \binom{\ell + n - 1}{\ell - 1} \cdot \sum_{\varrho_k} c_{p, \varrho_k, \ell} \varrho_k^n$$

Die Berechnung der hier auftretenden Coefficienten

$$\gamma_{p, \varrho_k, \ell, n} = \sum_{\varrho_k} c_{p, \varrho_k, \ell} \varrho_k^n$$

scheint mir hoffnungslos. Schon für $p = 3$ ist sie nicht mühelos. Wenn ich mich nicht verrechnet habe, kommt heraus

$$M_3(n) = \frac{(n+1)(n+2)}{12} + \frac{n+1}{4} + \frac{17}{12} + \frac{1}{8}(-1)^n + \frac{1}{9}(\varrho^n + \varrho^{2n}) \quad \left(\varrho = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right).$$

Es wird also doch bequemer sein, auf die mittels der Recursionsformeln berechneten Tabellen zurückzugreifen. (Euler hat solche in ziemlichem Umfang berechnet: *Introductio in Analysin infinitorum*, pars I, caput 15 und in besonderen arithmetischen Abhandlungen, die vielleicht in Bd. 2 od. 3 der Gesamtausgabe abgedruckt sind).

An die schönen Göttinger Tage denke ich noch mit Vergnügen zurück. Mit herzlichsten Grüßen und besten Ferienwünschen an Sie u. Ihre Gemahlin

Ihr E. B.–H.

Kapitel 2

Weiteres Material zu Hasse/Bessel–Hagen

2.1 05.01.1928, Bessel–Hagen Sen. an Hasse

Charlottenburg. 5. Januar 1928.

Bln W. 15, Kurf. Damm 200

Hochgeehrter Herr Professor!

Zu meinem grossen Bedauern sehe ich mich genötigt, Ihnen mitzuteilen, dass mein Sohn, der Privatdozent Dr. Erich Bessel–Hagen, sich vor einigen Tagen einer neuen Operation unterwerfen musste und deshalb nicht imstande sein wird, rechtzeitig nach Halle zurückzukehren. Mein Sohn, der sich Ihnen bestens empfehlen lässt, wird Ihnen, sobald er das Bett verlassen darf, noch selbst schreiben.

Als mein Sohn hier eintraf, zeigte die kranke Stelle seines Fusses einen wenig erfreulichen Befund. Sie erweckte zudem den Verdacht, als sei das Leiden aus einer besonderen Form einer nicht gleichgültigen Hautinfektion hervorgegangen. Die Erkrankung gab somit zu ernster Sorge Anlass und, da sie keine Neigung zur Besserung zeigte, musste ich mich zur Verhütung schlimmerer Folgen dazu entschliessen, die erkrankte Hautstelle ganz herauszuschneiden und zu entfernen. Ich hoffe, dass damit alles Kranke beseitigt ist und es sich nur noch um eine Heilung gesunden Gewebes in der Operationswunde handeln wird. Aber trotzdem wird die Heilung, da doch ein beträchtliches Stück der Hautdecke an der grossen Zehe verloren gegangen ist, einige Zeit beanspruchen. Unter Voraussetzung eines günstigen Verlaufes möchte ich vorläufig mit einer Dauer von etwa 4 Wochen rechnen. Wahrscheinlich wird auch der Hautverlust noch von einer anderen Körperstelle her gedeckt werden müssen, sodass ein Auftreten und Gehen, bevor die feste Anheilung der aufgepflanzten Haut beendet ist, verboten werden muss.

Unter diesen Umständen werden Sie es, wie ich hoffe, begreiflich finden, wenn ich meinem Sohne den Rat gebe, von einer zu frühen Rückreise nach Halle Abstand zu nehmen.

Mit dem Ausdrücke der vorzüglichsten Hochachtung

Ihr ganz ergebener
Prof. Dr. F. Bessel–Hagen

2.2 22.04.1928, Beilage, von Bessel–Hagen

Halle, 22. Apr. 1928.

p Primzahl, $\equiv 1 \pmod{12}$

$$P_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 12\nu \\ 0 & p \end{pmatrix} \quad \text{für } \nu = 0, \dots, p-1$$

$$P_\infty = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 12\nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R'_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } \nu = 0, \dots, p-1$$

$$R_\infty = \begin{pmatrix} p & p-1 \\ 1-p & 2-p \end{pmatrix}, \quad R'_\infty = \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1-p & 2p-p^2 \end{pmatrix}$$

Dann wird

$$(1) \quad P_0 R_\nu = R'_\nu P_\nu \quad \text{für } \nu = 0, \dots, p-1, \infty.$$

Γ die ganze Modulgruppe, Γ_ψ die Untergruppe $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ mit $\beta \equiv 0 \pmod{p}$.

Dann gilt

$$(2) \quad \Gamma = \Gamma_\psi R_0 + \Gamma_\psi R_1 + \dots + \Gamma_\psi R_{p-1} + \Gamma_\psi R_\infty.$$

Zu untersuchen die Functionen

$$\varphi(P_\nu) = p \frac{\sqrt[12]{\Delta(P_\nu(\omega_1, \omega_2))}}{\sqrt[12]{\Delta(\omega_1, \omega_2)}}$$

Es sei S eine beliebige Modulsstitution, dann ist

$$\varphi(P_\nu S) = p \frac{\sqrt[12]{\Delta(SS^{-1}P_\nu S)}}{\sqrt[12]{\Delta(S)}} = p \frac{\varepsilon_S \sqrt[12]{\Delta(S^{-1}P_\nu S)}}{\varepsilon_S \sqrt[12]{\Delta}} = p \frac{\sqrt[12]{\Delta(S^{-1}P_\nu S)}}{\sqrt[12]{\Delta}},$$

wo die zwölfte Einheitswurzel ε_S herausfällt. □□□ Nach (1) wird

$$(3) \quad S^{-1}P_\nu S = S^{-1}R'_\nu^{-1}P_0R_\nu S \quad (\nu = 0, 1, \dots, p-1, \infty)$$

Nun sei $R_\nu S$ gemäß (2) gleich GR_μ , wo G in Γ_ψ enthalten, sodaß $P_0 G = G' P_0$, wo $G' \in \Gamma$ angehört. (Natürl. bilden die aus $R_\nu S = GR_\mu$ bestimmten μ eine *Permutation* der ν) Weiter folgt dann aus (3)

$$\begin{aligned} S^{-1} P_\nu S &= S^{-1} R_\nu^{-1} P_0 G R_\mu = S^{-1} R_\nu^{-1} G' P_0 R_\mu \\ (4) \qquad &= S^{-1} R_\nu^{-1} G' R'_\mu P_\mu \quad (\text{nach (1)}) \end{aligned}$$

□□□

Einfacher:

$$\begin{aligned} S^{-1} P_\nu S &\equiv S^{-1} \mathcal{E} S \equiv \mathcal{E} \pmod{12} \\ S^{-1} P_\nu S &\equiv S^{-1} R_\nu^{-1} G' R'_\mu P_\mu \\ &\equiv S^{-1} R_\nu^{-1} G' R'_\mu \mathcal{E} \pmod{12} \end{aligned}$$

also

$$S^{-1} R_\nu^{-1} G' R'_\mu \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{12}$$

(also war die Mühe $R_\infty \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ zu machen, überflüssig.)

Jedenfalls folgt nun aus (4)

$$\sqrt[12]{\Delta(S^{-1} P_\nu S)} = \sqrt[12]{\Delta(P_\mu)}$$

und somit

$$\varphi(P_\nu S) = \varphi(P_\mu),$$

d. h. bei Anwendung beliebiger Modulsstitutionen permutieren sich die $\varphi(P_\nu)$ rein ohne hinzutretende 12^{te} Einheitswurzeln ebenso wie die $j(P_\mu)$.

Daher $\varphi(P_\nu) =$ rationale F. von j und $j(P_\nu)$.

Nun sei mit unbestimmtem t

$$\begin{aligned} \Phi(t, j) &= \prod_{\mu=0, \dots, p-1, \infty} (t - j(P_\mu)) \\ F_\nu &= \frac{\Phi(t, j)}{t - j(P_\nu)} \quad (\nu = 0, \dots, p-1; \infty) \end{aligned}$$

Dann wird

$$(5) \quad \sum_{\nu=0, \dots, p-1, \infty} F_\nu \varphi(P_\nu) = H(t, j)$$

$H(t, j)$ ein Polynom in t und j

Reihenentwicklungen:

$$r = e^{2\pi i \omega} \quad (\text{das ist die richtige Entwicklungsgröße}), \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{p}}$$

$$(6) \quad \begin{cases} \varphi(P_\nu) &= \left(\varepsilon^{12\nu} r^{\frac{1}{p}} \right) \mathfrak{P}' \left(\varepsilon^{12\nu} r^{\frac{1}{p}} \right) & (\nu = 0, 1, \dots, p-1) \\ \varphi(P_\infty) &= pr^{\frac{p-1}{12}} \mathfrak{P}''(r) \end{cases}$$

\mathfrak{P}' und \mathfrak{P}'' Potenzreihen mit ganzen rationalen Coefficienten.

Weiter

$$(7) \quad \begin{cases} F_\nu &= r^{-p-1} \sum_{\lambda=0}^p t^\lambda \left(\varepsilon^{12\nu} r^{\frac{1}{p}} \right)^{\lambda+1} \mathfrak{P}_\lambda \left(\varepsilon^{12\nu} r^{\frac{1}{p}} \right) & \nu = 0, 1, \dots, p-1 \\ F_\infty &= r^{-1} \mathfrak{P}_{\infty,0}(r) + \sum_{\lambda=1}^p t^\lambda \mathfrak{P}_{\infty,\lambda}(r) \end{cases}$$

wo die $\mathfrak{P}_\lambda, \mathfrak{P}_{\infty,\lambda}, \mathfrak{P}_{\infty,0}$ Potenzreihen mit ganzen rationalen Coefficienten.

Aus (5), (6), (7) folgt dann sofort

$$H(t, j) = \sum_{\lambda=0}^p t^\lambda L_\lambda(r),$$

wo die L_λ Laurentreihen mit nur endlich vielen negativen Exponenten und durchweg ganzen rationalen Coefficienten. *Folglich hat $H(t, j)$ ganze rationale Coefficienten.*

Ergebnis:

$$\varphi(P_\nu) = \frac{H(j(P_\nu), j)}{\Phi'(j(P_\nu), j)},$$

wo $H(x, y)$ und $\Phi'(x, y)$ zwei Polynome in x u. y mit ganzen rationalen Coefficienten.

Bei anderer Wahl der Repraesentanten für die Transformation p^{ter} Ordnung treten natürlich 12^{te} Einheitswurzeln als Factoren hinzu.

Wenn $p \equiv 5, 7, 11 \pmod{12}$ ist, lassen sich keine Repraesentanten wählen, die $\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{12}$ sind. Dann wird die Untersuchung etwas zu modificiren sein. Ich vermute, daß man dann auf diesem Wege zu einer rationalen Darstellung der $\varphi(P_\nu)$ durch

$$\sqrt[3]{j(P_\nu)}, \sqrt[3]{j} \quad \text{bezw.} \quad \sqrt{j(P_\nu) - 1}, \sqrt{j - 1} \quad \text{bezw. diese vier Größen}$$

gelangen wird. Nach Specialisirung des ω auf einen singulären Modul ist dann die Frage, ob diese Größen im Classenkörper liegen.

Mit besten Grüßen

Ihr E. B.-H.

2.3 Undatiert, Beilage, von Bessel–Hagen

- 1) Demokrits Äußerung, er gäbe all sein Hab und Gut hin, wenn er Beweise für seine Plausibilitätsbetrachtungen hätte, ist mir unbekannt. Wenn sie aus dem Altertum überliefert ist, steht sie in der großen Ausgabe der „Vorsokratiker“ von Herrn Diels. Da ist aber soviel von und über Dem. abgedruckt, dass ein systematisches Suchen jedenfalls längere Zeit in Anspruch nimmt. Ein Versuch, ob die Stelle mir beim Blättern durch Zufall in die Augen fällt, ist mißlungen.
- 2) Seite 3, erster Absatz.

Daß Geometrie ausdrücklich, wie bei Platon, die Gesamtmathematik bedeutet, ist missverständlich. In den mir bekannten Stellen der platonischen Dialoge hat *γεωμετρία* immer die Bedeutung, die wir Deutschen dem Wort beizulegen gewohnt sind, und wo die Gesamtmath. gemeint ist, wird meist aufgezählt, Arithmetik, Geometrie, Logistik (was das ist, ist nicht ganz klar, nach Toeplitz' Ansicht die Lehre von den *λόγος* = Euklid Buch V), Astronomie. Da nun das *μηδεις ἄγεωμέτρητος εἰσιτω* so sehr unsicher ist, darf man nicht den Eindruck erwecken, als ob Platon selbst Wert darauf legte, dass *γεωμ.* für Gesamtmathematik stehe.

Zu dem Wort *μ. ἄγ. εἰσ.* und dem Zusammenhang, in dem Sie es brauchen, wird Sie interessieren Wilamowitz, Platon Bd. 1, S. 490–491 (in d. 1. Aufl.), der daselbst auch eine Goethe–Stelle wörtlich anführt. Sie können ja das Buch im philol. Seminar im Robertinum bequem einsehen ohne die Mühe, es von der Un. Bibl. zu besorgen. Übrigens kennt Wil. ausser der Tzetzes–Stelle auch keine andere Quelle der Anekdote.

Ist denn überhaupt der Passus mit *μηδεις ἄγεωμ. εἰσιτω* nötig? Zur Sache, die zur Discussion steht, trägt er doch nichts bei. Und, da es erstens unsicher ist, ob das Wort überhaupt von Platon herrührt, zweitens unsicher bleibt, wie Platon es gemeint hat, falls es von ihm herrührt, drittens zu viel Raum kosten würde, den Sachverhalt klar zu kennzeichnen, ist es doch das bequemste, sich um alle diese Sorgen zu drücken, indem man den Passus wegläßt, zumal sich der folgende Absatz ohne jede Discontinuität an das Vorangehende anschließt.

3) Seite 7, oben.

Können Sie die Behaupt. verantworten, dass eine unseren Ansprüchen genügende Einführung der negativen Zahlen nirgends gedruckt ist? Übrigens gehört dazu, glaub' ich, nicht einmal der *allerneuste* Stand der Forschung. Ich kann mir gut denken, dass mit etwas anderen Worten aber den selben Gedanken jemand vor 5¹ Jahren schon das Paarverfahren correct dargestellt hätte.

4) Seite 7.

Für das Folgende fehlt mir etwas, dass ich keine Vorstellung davon habe, was „Fictionen“ und „Fictionalismus“ ist.

5) Seite 7, unten.

Die Mathematik steckte nicht in den Kinderschuhen, sondern die *abendländische* Mathematik hatte vergessen u. verlernt, was die Griechen konnten. Euklid B. 5 *beweist* mühsam streng, dass aus $a : b = c : d$ und $a > b$ folgt $c > d$, wo a, b, c, d Größen sind. Jeder Versuch, den Beweis auf negative Zahlen auszudehnen, würde sofort die Stelle aufzeigen, wo ein Axiom benutzt wird, das für Größen, aber nicht für neg. Zahlen gilt.

6) Zu Seite 9.

Wenn Sie *überhaupt* für die geschichtliche Betrachtungsweise Namen nennen, dürfen, wie mir scheint, die Frankfurter (Dehn, Hellinger, Siegel, Epstein) nicht fehlen, selbst wenn Sie keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben.

7) Zu Seite 12 ff.

Ist denn diese Breite zur Erörterung so trivialer und allen nicht auf den Kopf gefallenen Menschen klarer Dinge nötig?

Kleine Bemerkungen.

1. undeutlich; vielleicht auch '50'

- Seite 1 , letzter Satz des Textes: Es fehlt ein Glied in der gedanklichen Verbindung von Vordersatz und Nachsatz.
- Seite 2 , Zeile 10 von oben: *ein Urteil* abzugeben
- " , 4^{te} Zeile vor dem Absatz etwas mildern.
 Statt „so unerfreulich“ vielleicht „mitunter unerfreulich“.

2.4 18.06.2002, Vermerk von Roquette

Aus dem Archiv Halle (18. 6. 02) betr. Bessel–Hagen

Aus dem Schreiben von Hasse vom 5. 7. 1927 an die Fakultät betr. Umhabilitation B.–H. nach Halle:

„Herr Bessel–Hagen wird als eine Persönlichkeit von einstem Verständnis und hoher wissenschaftlicher Kultur gerühmt, der ausgezeichnet durchdachte Vorlesungen hält.“

1924 hat Bessel–Hagen im DMV–Jahresbericht das Buch von Kraitchik besprochen.

Kapitel 3

Register

Allen, 23, 24, 31, 37
 Archimedes, 43, 45, 46, 50
 Aristoteles, 70
 Artin, 5

 Baer, 41, 42, 65
 Becker, 70
 Behmann, 42
 Behnke, 58
 Bessel–Hagen, E., 81, 89
 Bessel–Hagen, F., 29, 31
 Bieberbach, 27, 31, 60, 70
 Bohr, 67, 68
 Brauer, R., 38

 Carathéodory, 70
 Cesàro, 67
 Chowla, 70, 73
 Courant, 13, 15, 29, 30

 de Gruyter, 8
 Dehn, 87
 Demokrit, 44, 86
 Dieck, 46, 55
 Diels, 86

 Epstein, 87
 Eratosthenes, 50
 Erman, 31
 Erman, A., 31
 Eudoxos, 44
 Euklid, 58, 86, 87
 Euler, 79

 Fermat, 60
 Frank, 70
 Fricke, 16, 71

 Goethe, 86
 Grandjot, 40

 Hankel, 48, 54
 Hardy, 70
 Hasse, C., 41
 Hasse, J., 41, 47
 Heath, 43
 Hecke, 70
 Heegner, 64, 65
 Heiberg, 40, 43, 44
 Hellinger, 53, 87
 Hilbert, 5, 6, 8, 9
 Hopf, 38
 Hurwitz, 34
 Hurwitz–Courant, 23

 Jung, 13, 15–17, 19, 25, 28, 38, 39, 42

 Klein, 16, 34
 Kraitchik, 37, 89
 Kronecker, 55, 58
 Kummer, 52

 Landau, 20, 25, 29, 55
 Loewy, 54

 Mahnke, 70
 Mayer, 27
 Mertens, 8

Neuenschwandner, 5, 74
Neugebauer, 69
Noether, E., 8, 40

Pappos, 62
Pascal, 30, 31, 60
Platon, 48, 86
Pringsheim, 54

Rogosinski, 38

Sauerbruch, 61
Scholz, 58
Schur, 40
Siegel, 6, 52, 53, 57, 62, 66, 87
Steinitz, 64, 65, 74
Study, 49
Suetuna, 52

Takagi, 5, 8
Teubner, 8
Titchmarsh, 73
Toeplitz, 30, 31, 41, 42, 44, 47, 50, 62,
67, 73, 86
Tzetzes, 48, 53, 86

Vaihinger, 49
Vandiver, 37, 41, 47

Wahlin, 47
Waring, 25, 29, 58, 60
Weber, 36
Wegener, 69
Wegner, 51, 58
Weierstrass, 62
Weyl, 70
Wilamowitz, 86
Winogradoff, 55

Zeuthen, 43