Jber. d. Dt. Math.-Verein.
91 (1989) 109–125

Über die algebraisch-zahlentheoretischen Arbeiten von Max Deuring*)

P. Roquette, Heidelberg

§ 1 Einleitung

Der Mathematiker, als forschender Wissenschaftler, arbeitet in der Regel nicht isoliert und für sich allein. Vielmehr schließt er in seinen Arbeiten an die Leistungen und Entdeckungen früherer Mathematikergenerationen an, und mit den Wissenschaftlern seiner eigenen Zeit steht er in regem Gedankenaustausch, er empfängt und vergibt mannigfaltige Anregungen und Impulse. Die Entwicklung unserer Wissenschaft vollzieht sich also in einem Spannungsfeld zwischen individueller Originalität des einzelnen Forschers und kollektivem Bewußtsein ganzer Mathematikergenerationen. Im Werk des einzelnen Mathematikers können wir daher auch die großen Entwicklungstendenzen der Mathematik erkennen: einerseits weil durch diese Tendenzen die Arbeit des einzelnen beeinflußt wird, andererseits weil er eben durch seine Arbeit auf den Fortschritt der Mathematik Einfluß nimmt. In diesem Sinne erscheint es reizvoll, die Entwicklungslinien der Mathematik in ihrer Projektion auf das Werk eines Mathematikers zu verfolgen.

Als im vergangenen Jahr die Aufgabe an mich herangetragen wurde, hier heute über das Werk von *Max Deuring* zu berichten, da habe ich das gerne übernommen, weil es mir unter den genannten Gesichtspunkten ganz besonders interessant und ergiebig erschien. Bei der Vorbereitung dieses Vortrages merkte ich jedoch bald, daß ich mich da eigentlich auf ein viel zu anspruchsvolles Vorhaben eingelassen hatte. Das mathematische Werk Deurings ist in vielfältiger Verflechtung eingebettet in die großen zentralen Entwicklungslinien der heutigen Mathematik; es erhält von daher seine Bedeutung und sein Wirkungsfeld. Angesichts der kurzen Vorbereitungszeit, die mir zur Verfügung stand, ist es mir hier nicht recht möglich, eine vollständige und einigermaßen erschöpfende Würdigung zu liefern. So bitte ich um Verständnis und Nachsicht für den reichlich fragmentarischen und zunächst subjektiven Charakter meiner Ausführungen; vielleicht können diese als eine erste, vorläufige Grundlage für eine spätere ausführlichere Darstellung dienen. Nur ein Gefühl der Verpflichtung, die einmal übernommene Aufgabe auch auszuführen, hat mich bewogen, meine Arbeit an diesem Vortrag trotz mancher erkennbarer Unzu-

*) Manuskript eines Vortrages, gehalten am 15. Mai 1986 im Mathematischen Institut der Universität Göttingen.

länglichkeiten nicht vorzeitig aufzugeben. Ich möchte mich an dieser Stelle auch bei Martin Kneser bedanken, der freundlicherweise dadurch Hilfestellung gegeben hat, daß er mir seinen Nachruf auf Max Deuring zugänglich machte, den er für den Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung angefertigt hat*).

Persönlich habe ich Deuring nicht oft getroffen. Jedoch haben seine Arbeiten einen starken und nachhaltigen Eindruck auf mich ausgeübt und üben ihn noch heute aus. Ich habe vieles von ihm gelernt und, in diesem Sinne, kann ich ihn durchaus als meinen Lehrmeister bezeichnen, auch wenn er das nicht im üblichen akademischen Sinne gewesen ist.

§ 2 Algebren

Meine erste Bekanntschaft mit dem Namen und dem mathematischen Werk von Max Deuring wurde vermittelt durch sein berühmtes Buch über *Algebren*. Es war in den ersten Nachkriegsjahren, und ich war junger Student in Erlangen, wo u. a. *Heinrich Grell* lehrte, ein Mathematiker aus dem Kreis um *Emmy Noether*, aus dem ja auch Deuring kam. Grell verstand es durch seinen lebendigen, anspruchsvollen Unterricht, uns für die großartigen Ideen von Emmy Noether zu interessieren und, ich kann wohl sagen, zu faszinieren.

Somit fand ich mich schon in den ersten Studiensemestern tief hineingezogen in die *Klassenkörpertheorie* und die Theorie der sog. *hyperkomplexen Systeme*, also der *Algebren*. In dem für uns Anfänger ja doch ziemlich schwierigen Stoff fanden wir Halt und Ausrichtung eben in Deurings Buch. Hier war in zwar knapper, aber klarer und durchsichtiger Form das gesamte damals relevante Wissen über Algebren dargestellt. Ich kann mich daran erinnern, daß ich damals derart von dem Deuringschen Buch angetan war, daß ich es in einem Zug durcharbeitete – unter vollständiger Vernachlässigung des von uns Anfängerstudenten verlangten Standardstoffes. Es wurde mir gar nicht bewußt, daß es sich bei Deuring ja nicht um ein Anfänger-Lehrbuch handelte, sondern um einen *Ergebnisbericht*, konzipiert als Handbuch für Fachleute, die mit der Materie bereits vertraut sind. In dem Buch fehlte so manches, was heutzutage ein professioneller Didaktiker bei einem Lehrbuch für erforderlich halten würde. Wie so oft, bestätigt sich auch hier, daß Kompetenz, Klarheit und Präzision die besten didaktischen Ingredienzen für ein mathematisches Werk sind und durch keine sekundären Qualitäten ersetzbar sind. Meine eigenen damaligen Erfahrungen sind, glaube ich, nicht singulär gewesen. Das Deuringsche Buch wurde nicht nur als Handbuch benutzt, sondern es hat viele Mathematikergenerationen in die Algebrentheorie eingeführt. Unter allen Ergebnisberichten, die in den dreißiger Jahren in der bekannten Springer-Reihe entstanden, hat wohl das Deuringsche Buch die breiteste Wirkung gehabt – vergleichbar höchstens mit dem Krullschen Idealbericht (der jedoch einen ganz anderen Charakter besitzt). Es gab zwei Nachdrucke: einmal nach Kriegsende im Chelsea Verlag, sozusagen als

---

*) Erschienen in Band 89, Heft 3 (1987) des Jahresberichts. Dort findet sich auch ein Verzeichnis der mathematischen Publikationen von Deuring. Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf jenes Verzeichnis.

Kriegsbeute der Alliierten, und das zweite Mal im Jahre 1968 mit einigen kleineren Korrekturen, aber sonst unverändert.

Worin besteht nun die besondere Qualität des Deuringschen Buches und wie ist seine große Wirkung zu erklären?

Versuchen wir, uns die Göttinger Jahre um 1930 zu vergegenwärtigen! Wie Deuring selbst berichtet, gab es damals in Göttingen ganz inoffiziell verschiedene Arbeitsgruppen, die den einzelnen Professoren zugeordnet waren. Es gab die Gruppe um *Landau*, die Gruppe um *Hilbert* (der damals schon schwerkrank war), die Gruppe um *Courant* und schließlich die Gruppe der Algebraiker um *Emmy Noether* und *van der Waerden*. Deuring, der 1926 sein Mathematikstudium begonnen hatte, schloß sich nach eigenem Bekunden sehr bald den Algebraikern um Emmy Noether und van der Waerden an. Wir können uns also vorstellen, daß er direkt und aus unmittelbarer Nähe die großen Entdeckungen in der Algebrentheorie miterlebt hat, und diese waren damals ziemlich aufregend. Deuring selbst berichtet uns im Vorwort seines Buches, wie die algebrentheoretische Aktivität der damaligen Jahre initiiert worden war, nämlich durch das Erscheinen der deutschen Übersetzung des Buches von *Dickson*, mit dem Titel *„Algebren und ihre Zahlentheorie"*. Die englische, in Amerika erschienene Fassung war von den deutschen Mathematikern kaum beachtet worden; erst nachdem die deutsche Übersetzung, angeregt durch *Andreas Speiser*, herausgekommen war, begann man auch hierzulande darauf aufmerksam zu werden. Das war im Jahre 1927, also gerade zu der Zeit, in der die Klassenkörpertheorie in der uns heute geläufigen Form entdeckt wurde. Erinnern wir uns: 1925 auf der DMV-Tagung in Danzig hatte *Helmut Hasse* seinen berühmten Vortrag zur *Takagischen Klassenkörpertheorie* gehalten, 1927 erschien Hasses Klassenkörperbericht (Teile I und Ia), und im selben Jahr entdeckte *Emil Artin* nach langjährigen Vorarbeiten das allgemeine *Reziprozitätsgesetz*. In diesem Zustand des Übergangs zur modernen Zahlentheorie wirkte das Buch von Dickson wie ein Katalysator. Man erkannte, daß die Dicksonsche Zahlentheorie der nichtkommutativen Algebren eine wesentliche Erweiterung des Horizonts der kommutativen Zahlentheorie bedeutet.

Andererseits war man sich bewußt, daß die neu entwickelten zahlentheoretischen Methoden, insbesondere auch die sogenannte *lokale Methode*, ein viel mächtigeres Werkzeug auch im Nichtkommutativen abgeben. Und man ging sofort ans Werk. In diese Jahre der stürmischen Entwicklung, die Deuring sozusagen hautnah miterlebte (wie man heute vielleicht sagen könnte), fallen die bahnbrechenden Entdekkungen von *Hasse, Brauer und Noether* zur Struktur der einfachen zentralen Algebren über einem Zahlkörper endlichen Grades. Es handelte sich um die Bestimmung der sog. *Brauerschen Gruppe*. Ferner wurde der Zusammenhang der lokalen Arithmetik von Algebren mit dem lokalen Normenrestsymbol der Klassenkörpertheorie entdeckt, und damit der algebrentheoretische, nichtkommutative Beweis der *globalen Produktformel für das Hilbertsche Symbol*. Die Entdeckung der engen Verflechtung zwischen den kommutativen Klassenkörpertheorie und der nichtkommutativen Algebrentheorie stellt nach meiner Meinung einen Höhepunkt des mathematischen Schaffens der damaligen Epoche dar. In späteren Jahren, nach dem Eindringen der Kohomologie in die Zahlentheorie, hat man oft die Meinung gehört, die Rolle der Algebren in der Zahlentheorie sei nur von untergeordneter Bedeutung und lasse sich vollständig reduzieren auf die zweite *Kohomologiegruppe*. Heute, im Zuge der Arbeit an dem sogenannten *Langlandsschen Programm*, setzt sich wieder die Erkenntnis durch, daß die Algebren wesentlich mehr zahlentheoretische Information tragen als es in der Kohomologie zum Ausdruck gebracht werden kann. Der frühere, insbesondere von Emmy Noether vertretene Standpunkt, der den Algebren eine bedeutende Rolle in der Zahlentheorie zuweist, kommt heute wieder zur Geltung.

Parallel zu der geschilderten Entwicklung entstand die *Brandtsche Theorie* der Arithmetik der *Maximalordnungen* einer Algebra, offenbar angeregt durch Emmy Noether. Die mit dieser Theorie verbundenen sog. Brandtschen *Gruppoide* sind als nichtkommutatives Äquivalent der Divisorenklassengruppen im Kommutativen anzusehen. Und schließlich kam noch die auf Algebren bezogene *analytische Theorie* hinzu. Diese ganze Entwicklung geschah innerhalb weniger Jahre, etwa 1927–1932. Danach entstand das Bedürfnis, die erhaltenen Ergebnisse zu sichten, zu ordnen und zu ergänzen, und in systematischer Form darzustellen. Die Publikation sollte in der damals gerade vom Springer-Verlag eingerichteten Serie der „Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete" erfolgen. Die Aufgabe, einen solchen Ergebnisbericht zu schreiben, fiel auf den jungen Max Deuring, damals 23 Jahre alt.

Deuring hatte damals schon einige Publikationen, allerdings nicht eigentlich in Algebrentheorie, sondern in der Galoistheorie der algebraischen Zahlen und Funktionen. Deuring war also damals nicht einer von denen, die Wesentliches beigetragen hatten zur Entwicklung der Algebrentheorie, über die sein Buch berichtet; er war sozusagen Berichterstatter, nicht selbst einer der Akteure.

Seine Meisterschaft zeigte sich in der Art der Berichterstattung. Ich kann hier nicht auf alles eingehen, was zu den Höhepunkten dieses Buches zu zählen ist. Ich möchte jedoch eines davon hervorheben, nämlich das Prinzip der *lokalen Methode* zur Untersuchung von Algebren. Sicherlich stammt dieses Prinzip nicht von Deuring selbst, sondern es hatte sich bereits einige Jahre früher in der bereits oben erwähnten Zusammenarbeit von Emmy Noether, Helmut Hasse und Richard Brauer als fruchtbar und fundamental herausgestellt. Bei Deuring handelt es sich jedoch historisch um die erste zusammenfassende Darstellung in Buchform, in der die lokale Methode systematisch benutzt und als Forschungsprinzip verwendet wurde. Es ist bemerkenswert, mit welcher Sicherheit der damals 23jährige Autor die lokale Methode ansetzt, und sie auch dort verwendet, wo sie in der Literatur bis dahin noch nicht üblich war, z. B. im Zuge der Brandtschen Theorie der Gruppoide von Idealklassen.

Sicherlich könnte man heute einiges aus dem Deuringschen Buch in moderner Form etwas besser darstellen, z. B. die Struktursätze der Algebren, oder die sog. modulare Darstellungstheorie. Auch ist die Entwicklung in so manchen Richtungen weitergegangen, z. B. könnte man sich heute nicht mehr auf die Arithmetik der Maximalordnungen beschränken, sondern wir wissen jetzt, daß zumindest die inzwischen entdeckten hereditären Ordnungen (beziehungsweise die Benzschen Hauptordnungen) mit in den Kreis der Betrachtung eingeschlossen werden sollten. Aber diese Weiterentwicklung der Algebrentheorie beruht ja zu einem erheblichen Teil gerade auf dem Einfluß, den das Deuringsche Buch weltweit ausgeübt hat.

Als Beispiel für die Wirkung des Deuringschen Buches kann ich aus eigener Kenntnis folgendes erwähnen: Im Jahre 1955 fand in Princeton am Institute for Advanced Study ein Seminar über Darstellungstheorie statt. Aus unseren damaligen Seminarnotizen ist deutlich das Bestreben zu erkennen, die algebrentheoretischen Methoden des Deuringschen Buches auch für die ganzzahlige und modulare Darstellungstheorie nutzbar zu machen. An dem damaligen Seminar nahmen auch *Irving Reiner* und *Charles Curtis* teil, deren Arbeiten in späteren Jahren zu dem gemeinsamen Buch über Darstellungstheorie führten, einem bekannten Standardwerk. Irving Reiner hat mir gegenüber öfters betont, daß die Wurzel seines Buches in dem damaligen Seminar in Princeton zu suchen sei und somit also auch in dem Algebren-Bericht von Deuring.

Fassen wir zusammen: Deuring hat in seinem Buch den Wissensstand seiner Zeit unter damals neuen und modernen Gesichtspunkten dargestellt, und er hat dadurch bedeutenden Einfluß auf die weitere Entwicklung der Algebrentheorie aber auch der Darstellungstheorie genommen. Durch diese focussierende Wirkung ist das Buch zu einem „Klassiker" geworden, wenn ich hier dieses etwas abgedroschene Wort gebrauchen darf. Vorbildlich ist auch die Diktion: Klar, präzis, vollständig, aber knapp und ohne unnötige Wiederholungen. Es kommt nicht gerade häufig vor, daß einem Wissenschaftler bereits in so jungen Jahren ein so großer Wurf gelingt.

Was übrigens die häufig lobend erwähnte Knappheit des Stils betrifft, so entspricht sie einerseits wohl dem Wesen von Deuring: auch in Diskussionen sagte er selten ein Wort zuviel. Andererseits hatte wahrscheinlich auch der Verleger, *Ferdinand Springer*, einen gewissen Einfluß auf die Ausbildung dieses knappen Deuring-Stils in dem Buch über Algebren. Denn in dem ursprünglichen Autorenvertrag mit Deuring war nur der Umfang von 5 Druckbögen vorgesehen, das wären also 80 Seiten. Es wurde damals vom Verlag aus Kostengründen sehr darauf geachtet, daß der vorgesehene Umfang nicht überschritten wurde, und Deuring mußte also auch darauf achten. Immerhin wurde schließlich, als Deuring im November 1934 das Manuskript an den Verlag lieferte, der doppelte Umfang erreicht, nämlich 10 Druckbögen. Daß dies vom Verlag dann doch akzeptiert wurde, lag wohl an der Fürsprache von *Emmy Noether*, die das Manuskript offenbar genau durchgesehen hatte, so daß daraufhin *Neugebauer*, einer der Herausgeber der Sammlung, dem Springer-Verlag versichern konnte, es handele sich um ein Thema von höchster Aktualität*). Und das war ja in der Tat der Fall. Aus der Zeittafel (Anhang 2) ersehen wir, daß wichtige Arbeiten von H. Hasse, R. Brauer, E. Noether, C. Chevalley, Ch. Tsen, E. Witt in den Jahren 1931–1934 erschienen waren, unmittelbar vor der Publikation von Deurings Buch 1935. Deuring hatte jene Arbeiten in seinem Buch voll berücksichtigt.

---

*) Nach Mitteilung von Dr. Heinze, Springer Verlag, Heidelberg.

§ 3 Deuring als akademischer Lehrer

Soviel zu dem Buch über Algebrentheorie, das, wie gesagt, meine erste Bekanntschaft mit dem Deuringschen Werk darstellte. Einige Jahre später geriet ich ein zweites Mal unter den Einfluß von Deuring, und diesmal ganz persönlich. Ich war inzwischen als Student von Erlangen nach Hamburg übergewechselt. Es hatte sich dort um die Person von *Hans Zassenhaus* ein Kreis von Studenten gesammelt, die sich aktiv für Algebra und Zahlentheorie interessierten. Im Jahre 1948 ging Zassenhaus nach Kanada, und Deuring nahm einen Ruf nach Hamburg an. Er erklärte sich bereit, unser bisher von Zassenhaus betreutes Seminar weiterzuführen. Somit hatte ich nun aus nächster Nähe Gelegenheit, Deuring als akademischen Lehrer zu erleben. Er ließ den Seminarteilnehmern völlige Freiheit in der Auswahl und Gestaltung der Vortragsthemen. Er gab auch nur spärlich Ratschläge für die zu konsultierende Literatur. Er war jedoch bei jedem Vortrag aufmerksam dabei. Seine knappe, stets präzise und zutreffende Kritik war für uns äußerst lehrreich; er verstand es, durch eine kurze, scheinbar harmlose Frage zum Nachdenken anzuregen und uns dadurch auf seine eigene Weise Erkenntnisse zu vermitteln, die in geschriebener Form schwer oder nur mit sehr viel größerem Aufwand erläutert werden können. Ich entsinne mich an einen Seminarvortrag, den ich selbst zu halten hatte, und in dem ich an einer bestimmten Stelle voller Enthusiasmus eine elegante, abstrakte Schlußweise vortrug (die ich eben gelernt hatte), anstelle der sonst üblichen etwas mühsamen Rechnungen und Abschätzungen. Deuring erkundigte sich, wo ich denn diese Schlußweisen her hätte. Danach forderte er uns durch eine kurze Frage auf, doch einmal darüber nachzudenken, ob denn wirklich die mathematische Erkenntnis aufgrund einer abstrakten Schlußweise wertvoller sei als aufgrund eines konstruktiven Rechenverfahrens. Ich kann den Wortlaut dieser Frage heute nicht mehr zweifelsfrei rekonstruieren, weiß jedoch noch, daß sie uns Anlaß gab, sowohl über den betreffenden Gegenstand als auch über die Natur der mathematischen Erkenntnis ausführlich zu diskutieren und zu reflektieren.

Deuring ging der Ruf als „der große Schweiger" voraus. In unserem damaligen Hamburger Seminar hat er jedoch keineswegs geschwiegen; genau an den Stellen, wo es notwendig wurde, hat er mit seinen Kommentaren nicht zurückgehalten und uns Studenten damit Anleitung und sichere Führung zu den Grenzen der mathematischen Forschung gegeben.

In sachlicher Hinsicht ging es in dem Seminar um Bewertungstheorie, u. a. um die *Hilbertsche Theorie* bewerteter Körper, die von Deuring in einer seiner frühen Arbeiten [1] auf bewertungstheoretischer Grundlage behandelt worden war. Auch lernte ich damals seine *Dissertation* [2] kennen, über eine Klassenkörpertheorie der abelschen Erweiterungen der Funktionenkörper im Kummerschen Fall. Aus Zeitgründen kann ich hier jetzt nicht näher auf diese Arbeiten eingehen. Ich möchte lediglich erwähnen, daß die von Deuring begonnene abstrakte Hilbertsche Verzweigungstheorie später von *O. F. G. Schilling* fortgeführt wurde; heute gehört sie zum Standardrepertoire bei der Untersuchung der bewerteten Körper, insbesondere der formal p-adischen Körper, die bei uns z. Z. in Heidelberg untersucht werden. Die Deuringsche Klassenkörpertheorie von Funktionenkörpern wurde später in den fünfziger Jahren von *Lang* und *Tate* auf kohomologischer Grundlage wieder-entdeckt und ergänzt, jedenfalls im unverzweigten Fall. Später wurden von *Manohar Madan*, einem Schüler von Deuring, auch verzweigte Erweiterungen in den kohomologischen Rahmen aufgenommen, ganz im Sinne der ursprünglichen Deuringschen Dissertation. Das war jedoch bereits Anfang der sechziger Jahre, als Madan mit einem Humboldt-Stipendium zu unserer Tübinger Arbeitsgruppe gekommen war.

Mein Hamburger Studium im Seminar bei Deuring währte nur ein Semester. Danach ging ich nach Berlin, wo ich die Möglichkeit erhalten hatte, bei *Helmut Hasse* zu lernen.

§ 4 Korrespondenzen, Reduktion

Und es war dort, bei Hasse, wo ich zum dritten Mal mit Deurings Werk konfrontiert wurde, diesmal in besonders intensiver Weise und mit sichtbaren Folgen, denn die Deuringsche Arbeit führte mich unmittelbar und direkt auf das Thema meiner eigenen Dissertation. Es handelte sich um Deurings Arbeit zur *Korrespondenzentheorie* [18], [19], die im *Crelleschen Journal* erschienen war: der erste Teil im Jahre 1937 und der zweite Teil 1941. Hasse hatte mich auf diese Arbeit hingewiesen und mich gefragt, ob man nicht mit den Deuringschen Methoden zu einem Beweis der sogenannten *Riemannschen Vermutung für Kongruenzfunktionenkörper* vordringen könne.

Unter einem Kongruenzfunktionenkörper versteht man einen Funktionenkörper einer Variablen, dessen Konstantenkörper endlich ist. In der Zahlentheorie werden solche Kongruenzfunktionenkörper durch Kongruenzen nach einem Primzahlmodul statt durch Gleichungen definiert; dadurch erklärt sich der Name. Zu jedem solchen Kongruenzfunktionenkörper gehört eine *Kongruenzzetafunktion*, die in ganz ähnlicher Weise gebildet ist, wie die *Dedekindsche Zetafunktion* zu einem Zahlkörper. Untersuchungen über diophantische Kongruenzen hatten *Artin* und später *Davenport* zu der Vermutung geführt, daß die Nullstellen dieser Kongruenzzetafunktionen sämtlich den Realteil 1/2 besitzen – in gewisser Analogie zu der klassischen Riemannschen Vermutung, die noch heute unbewiesen ist. Für elliptische Kongruenzfunktionenkörper, also vom Geschlecht 1, war es Hasse im Jahre 1932 gelungen, diese Vermutung zu beweisen; die zugehörigen Arbeiten erschienen bis 1936 im Crelleschen Journal. Danach begann eine intensive Suche nach den geeigneten Konzepten, die zu einem Beweis für Kongruenzfunktionenkörper beliebigen Geschlechts führen könnten. An diesen Aktivitäten beteiligte sich auch Deuring.

In dem Kreis um Hasse und van der Waerden war es bereits Mitte der dreißiger Jahre klar geworden, daß der Schlüssel zum Beweis der Riemannschen Vermutung in der Theorie der *abelschen Funktionen* zu finden sein müsse, genauer: in der Möglichkeit, die analytische Theorie der abelschen Funktionen vollständig zu algebraisieren und damit auch für Primzahlcharakteristik zu erschließen. Nun gab es bereits eine teilweise Algebraisierung, nämlich innerhalb der italienischen Schule der algebraischen Geometrie, zu deren hervorragenden Vertretern damals *Enriques* und *Severi* gehörten. Aber gewisse grundlegende Prinzipien der italienischen algebraischen Geometrie beruhten immer noch auf analytischen Argumenten, die für Primzahlcharakteristik unzugänglich sind. Die gesamte algebraische Geometrie mußte auf neue, algebraische Grundlagen gestellt werden. Eine ganze Reihe von Arbeiten von Emmy Noether, van der Waerden und ihrem Umkreis (z. B. *W. L. Chow*) dienten genau diesem Programm. Deuring, der in diesem Kreis mathematisch groß geworden war, kannte die Problemstellung und die Zielrichtung dieser Arbeiten. Er selber war im Jahre 1930 ein Semester lang mit einem Stipendium in Rom gewesen, wo er direkt bei Enriques und bei Severi Vorlesungen gehört hatte. Von daher trafen also in der Person von Deuring alle Voraussetzungen zusammen für eine erfolgreiche Beteiligung an der Schaffung der Grundlagen für den Beweis der Riemannschen Vermutung. Diese Aufgabe wurde nun in den beiden erwähnten Arbeiten von Deuring zur Korrespondenzentheorie geleistet.

Der Korrespondenzbegriff im Sinne von Deuring ist eine Verallgemeinerung des Begriffs des Automorphismus. Ein Automorphismus ist ein Isomorphismus des Körpers auf sich selbst, unter Festlassung der Konstanten. Eine Korrespondenz des Funktionenkörpers ist eine isomorphe Abbildung in eine endlich-algebraische Erweiterung von sich selbst. Während ein Funktionenkörper höheren Geschlechts nach *Hurwitz* und *H. L. Schmid* nur endlich viele Automorphismen besitzt, so gibt es stets unendlich viele Korrespondenzen. Diese können bei geeigneter Definition zu einem Ring gefügt werden, der die Automorphismengruppe als Einheitengruppe enthält. Dieser Korrespondenzenring wirkt als Operatormodul z. B. auf der Divisorklassengruppe des Funktionenkörpers, d. h. auf seiner abelschen Mannigfaltigkeit (oder jacobischen Mannigfaltigkeit, wie man heute sagt). Die zugehörige Darstellung des Korrespondenzenringes heißt der *Multiplikatorenring* des Funktionenkörpers. (Heute sagt man auch „Endomorphismenring“, unter Bezugnahme auf die zugehörige jacobische Mannigfaltigkeit.) In Spezialfällen war dieser Multiplikatorenring bereits früher in der komplexen Analysis aufgetreten, z. B. bei den Körpern der Modulfunktionen unter dem (heutigen) Namen der Hecke-Algebra, deren Wirkung *Hecke* zunächst mit Hilfe von Integralen definiert hatte. Es ist das Verdienst von Deuring, die aus der komplexen Analysis und der Geometrie herkommende Korrespondenzentheorie auf eine rein algebraische Grundlage gestellt und damit für Primzahlcharakteristik zugänglich gemacht zu haben. Für den heutigen Studenten sieht das wie eine Selbstverständlichkeit aus: denn es gibt heute ja die algebraisch fundierte Theorie der Schnittmultiplizitäten für Kurven auf Flächen, und es ist bekannt, daß sich damit die Deuringsche Korrespondenzentheorie leicht begründen läßt. Aber zu Deurings Zeiten gab es diese Schnittheorie eben noch nicht, oder genauer: es gab sie nur in Charakteristik 0 und basierte dort auf analytisch-geometrischen Überlegungen. Die Bemühungen von *van der Waerden* und *Zariski*, die Theorie der Schnittmultiplizitäten zu algebraisieren, waren noch nicht so weit fortgeschritten, daß Deuring sie benutzen konnte. *André Weil* hatte seine „Foundations of Algebraic Geometry“ noch nicht geschrieben. Heute betrachten wir die Deuringschen Arbeiten zur Korrespondenzentheorie als die erste brauchbare Algebraisierung der Theorie der Schnittmultiplizität auf Flächen, entwickelt mit einer bestimmten Zielsetzung, nämlich der Riemannschen Vermutung für Kongruenzfunktionenkörper. Aus dieser Sicht handelt es sich um eine wichtige Arbeit von *historischer Bedeutung*.

Die Riemannsche Vermutung für Kongruenzfunktionenkörper läßt sich direkt und fast unmittelbar aus den einschlägigen Struktureigenschaften der Multiplikatorenalgebra herleiten. Das ist heute allgemein bekannt, und das war sicherlich auch bereits in den dreißiger Jahren zumindest den Fachleuten geläufig. Auch Deuring muß das wohl gewußt haben, denn seine Arbeit zielte genau in diese Richtung. Er ist jedoch nicht vollständig zu den in Rede stehenden Strukturaussagen und damit zur Riemannschen Vermutung vorgedrungen; bekanntlich ist ihm darin *André Weil* schließlich zuvorgekommen. Auch Weil hatte dazu eine Korrespondenzentheorie entwickelt, genau wie Deuring nach dem Muster der Severischen algebraischen Geometrie, basierend auf der von Weil selbst gelieferten algebraischen Begründung der allgemeinen Schnittmultiplizitäten bei beliebiger Charakteristik. Es gab also eine Parallelarbeit, eine gewisse Konkurrenz zwischen Deuring und André Weil.

Was Deuring veranlaßt hat, unmittelbar vor dem angestrebten Ziel sozusagen kurzzutreten, das ist uns nicht bekannt; seine eigenen Äußerungen geben darüber keine Auskunft. Möglicherweise sind es die damaligen unguten Arbeitsbedingungen, die eine konzentrierte, ungestörte Weiterarbeit an diesem Projekt verhindert haben. Der zweite Teil seiner „Korrespondenzentheorie" erschien im Jahre 1941, also mitten im Kriege, und damals war er an der Sternwarte in Babelsberg tätig und mußte Tabellen für Wetterflieger berechnen. Wir können uns vorstellen, daß die damit verbundenen Umstände sich nicht gerade günstig auf seine Arbeitsbedingungen ausgewirkt haben. Aber auch schon vor dem Kriege, in den Jahren nach der politischen Machtübernahme durch den Nationalsozialismus, erfuhr Deuring erhebliche Behinderungen seiner mathematischen Tätigkeit. 1933 war er von van der Waerden in *Leipzig* zur *Habilitation* vorgeschlagen worden, wo er als Assistent tätig war. Deuring wurde aber dort nicht zur Habilitation zugelassen. Später, im Jahre 1935, hatte er nach Ermunterung durch Hasse einen Habilitationsantrag in *Göttingen* gestellt. Dort wurde ihm zwar schließlich die Würde eines Dr. habil. von der Fakultät verliehen, aber das Ministerium lehnte die Erteilung einer Dozentur ab, trotz der Befürwortung durch Hasse. *Tornier*, der damals in Göttingen zum Nachfolger Landaus ernannt worden war, hatte erklärt, daß er sich mit allen Mitteln gegen die Verleihung einer Dozentur an Deuring wende. Es ist zu vermuten, daß der Widerstand Torniers gegen Deuring politisch motiviert war: wir können uns vorstellen, daß Deuring nicht das damals gefragte gesellschaftliche Bewußtsein zeigte*).

Demnach scheinen die Arbeitsbedingungen für Deuring in den Jahren ab 1933 tatsächlich nicht besonders günstig gewesen zu sein; möglicherweise hat er also deshalb nicht den letzten Schritt auf dem Weg von seiner Korrespondenzentheorie zur Riemannschen Vermutung für Kongruenzfunktionenkörper gefunden.

In diesem Zusammenhang ist es vielleicht von Interesse zu wissen, daß sich Deuring in den Jahren seit 1936 mit dem Plan eines weiteren Buches trug, nämlich einer *Theorie der Algebraischen Funktionenkörper*, die in den Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften des Springer-Verlages erscheinen sollte. 1936 hat er einen entsprechenden Vertrag mit dem Springer-Verlag unterzeichnet; er war als

---

*) Die obigen Informationen aus den Fakultätsakten in Leipzig und Göttingen verdanke ich frdl. Mitteilungen von W. Purkert (Leipzig) und M. Kneser (Göttingen).

Autor von *F. K. Schmidt* und *van der Waerden* empfohlen worden*). Warum dieses Buch nicht fertiggestellt wurde, ist nicht bekannt. Es ist denkbar, daß die Arbeiten über Korrespondenzentheorie sozusagen im Vorgriff auf ein Kapitel des konzipierten Buches publiziert wurden, das dann natürlich auch einen Beweis der Riemannschen Vermutung für Kongruenzfunktionenkörper zu enthalten hätte. Zwanzig Jahre später hielt Deuring am *Tata Institut in Bombay* eine Einführungsvorlesung über Algebraische Funktionenkörper. Eine Niederschrift dieser Vorlesung durch *C. P. Ramanujan* können wir in Band 314 der Springer Lecture Notes nachlesen. Es kann angenommen werden, daß es sich dabei ebenfalls um ein Fragment des ursprünglich konzipierten Buches über Funktionenkörper handelt.

Und noch eine Publikation von Deuring könnte evtl. als eine Vorveröffentlichung zu dem geplanten Buch über Funktionenkörper gelten: seine Arbeit zur Reduktionstheorie [23], erschienen 1942 in der Mathematischen Zeitschrift. Ein algebraischer Funktionenkörper sei gegeben durch eine absolut irreduzible Gleichung $f(x, y) = 0$. Nehmen wir an, die Koeffizienten von f seien ganze Zahlen. Deuring stellt und behandelt die Frage: Was wird aus der Gleichung und dem zugehörigen Funktionenkörper, wenn man die Koeffizienten von f modulo einer Primzahl p reduziert? Deuring erkennt, daß dieses zahlentheoretische Problem ein geometrisches Analogon besitzt: Man nehme an, die Koeffizienten von f seien rationale Funktionen eines Parameters. Was wird aus der Gleichung, wenn der Parameter einer Grenzlage zustrebt? Für dieses geometrische Problem verweist Deuring auf die einschlägigen Arbeiten von *Severi*, die er wohl während seines Studienaufenthaltes in Rom kennengelernt hatte. Er stellt fest, daß die Severische Methode nicht auf Primzahlreduktionen übertragbar ist, daß man also mit den Grundlagen von vorne beginnen müsse.

Wiederum, wie bei der Korrespondenzentheorie, handelt es sich hier um eine neue Begründung einer Theorie, die aus der Geometrie längst bekannt war, die aber nunmehr für algebraische und zahlentheoretische Situationen benötigt wird. Im Gegensatz zu der Korrespondenzentheorie geht es jedoch hier um den Fall gemischter Charakteristik: der reduzierte Funktionenkörper hat im allgemeinen Charakteristik $p > 0$.

Zum ersten Mal in der Geschichte der Zahlentheorie finden wir hier die Reduktionstheorie systematisch dargestellt. Deuring entdeckte das Phänomen der heute sogenannten „*guten Reduktion*“, die bei gegebenem Funktionenkörper für fast alle Primzahlen vorliegt; es bedeutet, daß der reduzierte Funktionenkörper dasselbe Geschlecht besitzt. Deuring selbst spricht von „regulärer“ Reduktion. Wenn auch die endlich vielen Primzahlen mit singulärer Reduktion bei Deuring noch nicht recht diskutiert werden konnten – das geschah später durch *Lamprecht, Nering* und schließlich *Néron* – so finden wir doch schon bei Deuring alle wesentlichen Eigenschaften des Néronschen minimalen Modells im regulären Falle. Später, in den fünfziger Jahren, wurde die Deuringsche Reduktionstheorie durch *Shimura* für beliebige algebraische Mannigfaltigkeiten entwickelt, und heute gehört sie in der Sprache der Schemata zum Allgemeinwissen jedes Zahlentheoretikers, der sich mit diesen Fragen beschäftigt. Wiederum, wie bei den Korrespondenzen, gebührt

*) Siehe Fußnote Seite 113.

Deuring das historische Verdienst, den Anstoß zu einer weit führenden Entwicklung gegeben zu haben. Ich teile nicht die Ansicht von *André Weil*, daß Deuring lediglich bekannte Tatsachen der Severischen algebraischen Geometrie in die Sprache der Funktionenkörper übersetzt hat. (Diese Ansicht vertritt Weil 1940 in seinem bekannten Brief an Simone Weil.) Die Deuringschen Arbeiten sind mehr als nur eine Übersetzung: Im Zeitalter eines Umbruchs der Zahlentheorie zu neuen Fragestellungen unter neuen Gesichtspunkten sind die Deuringschen Beiträge richtungsweisend.

Wenn ich vorhin gesagt habe, daß bei Deuring die Reduktionstheorie zum ersten Mal systematisch untersucht wird, so stimmt das nicht ganz. Es handelt sich ja um eine naheliegende und natürliche Fragestellung, und daher sind in der Geschichte der Zahlentheorie eine Reihe von Vorläufern auszumachen. Insbesondere muß hier Hasse erwähnt werden, der im elliptischen Falle seinen ersten Beweis der Riemannschen Vermutung mit Hilfe einer ad hoc entwickelten Reduktionstheorie für elliptische Körper gegeben hat; dieser erste Beweis ist 1933 publiziert in den Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen. Die Reduktionstheorie gestattete es Hasse, die auf Analysis gegründeten Resultate der sog. *komplexen Multiplikation* auf Kongruenzfunktionenkörper zu übertragen, allerdings nur unter gewissen Voraussetzungen. Vielleicht war Deuring durch die Hassesche Arbeit angeregt worden, seine allgemeine Reduktionstheorie zu entwickeln. Jedenfalls hat Deuring seine Reduktionstheorie später dazu verwendet, die erwähnten Hasseschen Entdeckungen in dem viel allgemeineren Rahmen der komplexen Multiplikation wiederzufinden. Unabhängig davon, ob nun die Methoden der genannten Hasseschen Arbeit als Vorläufer der Deuringschen Reduktionstheorie anzusehen sind oder nicht: die Einstufung der letzteren als *historische Leistung* wird dadurch nicht beeinträchtigt.

§ 5 Elliptische Funktionen und Kurven

Ich komme jetzt auf Deurings berühmte Arbeiten über elliptische Funktionen und elliptische Kurven zu sprechen. Da die Zeit schon recht fortgeschritten ist, muß ich mich dabei kurz fassen. Von der mathematischen Bedeutung her ist das zwar ungerechtfertigt, denn diese Arbeiten stellen den Höhepunkt des mathematischen Schaffens von Deuring dar; wegen dieser Arbeiten wird Deuring zu den großen Meistern der Zahlentheorie gezählt, und gerade diese Arbeiten waren Deurings *Lieblingskinder* (wie es in dem Kneserschen Nachruf heißt). Eigentlich hätte ich also mehr Zeit für Deurings Beiträge zur elliptischen Funktionentheorie veranschlagen und mich dann bei seinen anderen Arbeiten kürzer fassen sollen. Ich habe jedoch sehr bewußt die zeitliche Gewichtung anders gelegt, um nämlich dadurch Gelegenheit zu finden, auch über denjenigen Teil des Deuringschen Werks zu sprechen, der weniger bekannt ist. In der Geschichte der Mathematik finden wir nicht nur die spektakulären Höhepunkte, sondern auch die weniger bekannte, mühsame Kleinarbeit an den Fundamenten, die das Erreichen dieser Höhepunkte erst ermöglicht. Jeder Mathematiker kennt Deuring als den großen Altmeister der elliptischen Funktionen, dessen Entdeckungen bahnbrechend und wegweisend sind. Weniger bekannt sind aber seine früheren Arbeiten. Es war mein Bestreben, hier in Evidenz zu setzen, daß auch die früheren Arbeiten ihre selbständige Bedeutung in der Entwicklung von Algebra und Zahlentheorie besitzen. Darüber hinaus können wir Deurings spätere Arbeiten über elliptische Funktionen in ihrer Methodik und Denkweise nur dann richtig begreifen, wenn wir seine früheren Arbeiten, auf denen sie aufbauen, und deren Entstehungsgeschichte mit in Betracht ziehen.

Die Arbeiten Deurings über elliptische Funktionen beginnen 1941 und 1942, in unmittelbarem Anschluß an seine Arbeit zur Korrespondenzentheorie. Wie wir oben gesehen haben, hat Deuring in der allgemeinen Korrespondenzentheorie nicht den Weg weiter gefunden, der zur Riemannschen Vermutung für Kongruenzfunktionenkörper führt. Im speziellen Fall der elliptischen Funktionenkörper hat er jedoch sehr wohl gesehen, wie es weiter geht, und er ist diesen Weg auch gegangen, der ihn auf einer weiten Wanderung schließlich zu großen Höhen führte.

Das beginnt mit der Arbeit über Korrespondenzen [19], wo er am Schluß des zweiten Teils den elliptischen Fall ausdrücklich hervorhebt und bemerkt, daß seine Theorie in viel einfacherer Weise die früheren Resultate von Hasse herzuleiten gestattet. Der Weg setzt sich fort in der 1941 in den Hamburger Abhandlungen erschienen Arbeit [22], in welcher er die *Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper* vollständig bestimmt. Bei Charakteristik 0 stellt sich heraus, daß es im wesentlichen nur die bekannten Multiplikatorenringe gibt, nämlich entweder **Z** oder die Ordnungen in imaginär quadratischen Körpern, letzteres bei den sogenannten singulären Werten der j-Invariante. In Primzahlcharakteristik p gibt es darüber hinaus noch weitere Fälle, (die sog. supersingulären), nämlich Ordnungen in nichtkommutativen Quaternionenschiefkörpern. Das war zwar schon seit Hasse bekannt: Nunmehr klassifiziert jedoch Deuring alle solche Ordnungen, die als Multiplikatorenringe im elliptischen Falle auftreten. Und zwar sind das genau alle Maximalordnungen in derjenigen Quaternionenalgebra $Q_{\infty,p}$, die nur bei der Primzahl p und im Unendlichen verzweigt ist. Aus der allgemeinen Algebrentheorie folgt, daß es nur eine einzige Quaternionenalgebra mit diesem Verzweigungsverhalten gibt. In einer weiteren Arbeit (1944) bestimmt Deuring die Anzahl t_p der Typen von Maximalordnungen in $Q_{\infty,p}$. Zusammen mit der Klassenzahl h_p von $Q_{\infty,p}$ (die schon früher von *Eichler* bestimmt worden war), ergibt sich damit ein vollständiger Überblick über die *supersingulären Invarianten* in Charakteristik p und deren zugehörige Funktionenkörper. Es ist klar, daß Deuring bei diesen Untersuchungen seine algebrentheoretische Vergangenheit sehr zustatten kam; nur wer sich mit Algebren und insbesondere Quaternionenalgebren im Stile des Deuringschen Buches gut auskannte, konnte mit solcher Leichtigkeit zu diesen umfassenden und vollständigen Ergebnissen gelangen. Auch die von Deuring soeben entwickelte Reduktionstheorie wird hier sofort und in entscheidender Weise benutzt.

Die genannten Arbeiten und auch die unmittelbar folgenden Arbeiten sind in ganz anderem Stil geschrieben als die früheren. Sie sind lebendiger, informeller und mit Fehlern im Detail behaftet. Man hat den Eindruck, daß Deuring jetzt das Thema gefunden hat, das seinem Herzen nahe liegt. Die neuen Erkenntnisse sprudeln nur so aus ihm heraus, er hat offenbar kaum Zeit, sie aufzuschreiben, und etwa eine kritische Durchsicht oder Korrektur kommt ihm im Augenblick nicht in den Sinn. Jede Arbeit dieser Epoche enthält eine Reihe von Korrekturen zu vorangegangenen Arbeiten, aber gleichzeitig wieder ein paar neue Ungenauigkeiten, die dann wiederum später korrigiert werden. Diese Reihe von Arbeiten führt zunächst zu Deurings *Algebraischer Begründung der komplexen Multiplikation* (1949 und 1952), einem ersten Höhepunkt [32], [37].

Vielleicht darf ich an dieser Stelle wiederum eine persönliche Erinnerung einfügen. Im Jahre 1949 gab Hasse in Berlin eine Vorlesung über komplexe Multiplikation. Jeder, der sich einmal damit befaßt hat, wird den Reiz dieser eigenartigen Theorie verspüren, in welcher tiefliegende Ergebnisse der Analysis, Algebra und Arithmetik verwoben werden. Vereinfacht gesagt, handelt es sich um die Erzeugung von Klassenkörpern über imaginär quadratischen Zahlkörpern durch singuläre Werte analytischer Funktionen. Auch die Hörer der damaligen Berliner Vorlesung waren fasziniert von dem Gegenstand. Hasse las ziemlich genau so, wie er es in seinen beiden früheren Crelle-Arbeiten dargestellt hatte. Gegenüber älteren, rein rechnerischen Darstellungen hatte Hasse moderne, strukturelle Gesichtspunkte in den Vordergrund gerückt. Aber es war ihm damals nicht gelungen, eine rein algebraische Begründung der Hauptsätze der komplexen Multiplikation zu liefern. Es blieben immer noch einige restliche Passagen, z. B. die sog. q-Entwicklungsprinzipien, die auf analytischer Grundlage beruhten und rein algebraisch nicht verständlich waren. Hasse formulierte es als ein Ziel, diese analytischen Restbestände zu eliminieren und somit die Theorie der komplexen Multiplikation auf eine rein algebraische Grundlage zu stellen. Für die Hörer der Vorlesung war es daher eine gewisse Sensation, als wir danach von Hasse erfuhren, daß eine solche algebraische Begründung in der Tat schon geleistet worden sei, nämlich durch Deuring. Hasse erklärte uns damals zwar nicht, wie die Deuringsche algebraische komplexe Multiplikation aussieht. Das hätte auch den Rahmen jener Vorlesung gesprengt. Im darauffolgenden Jahr hatte ich Gelegenheit, einen Vortrag von Deuring in Hamburg zu hören. Auch dabei konnte ich nicht alles verstehen, da mir die Voraussetzungen dazu fehlten. Aber angeregt durch den Deuringschen Vortrag, begann ich damit, die einschlägigen Arbeiten zu studieren, um schließlich zu dem Verständnis seiner Theorie zu gelangen.

Übrigens ist die Deuringsche Theorie der komplexen Multiplikation im Jahre 1957 in einem Seminar in Princeton behandelt und in der Sprache der eindimensionalen abelschen Mannigfaltigkeiten dargestellt worden. Das ist nachzulesen in Band 21 der Springer Lecture Notes; als Seminarveranstalter zeichnen *Borel, Chowla, Herz, Iwasawa* und *Serre*.

Vielleicht ist an dieser Stelle ein klärendes Wort angebracht zur Frage der „Algebraischen Begründung" von mathematischen Sachverhalten, die zuvor unter Benutzung auch von nicht-algebraischen Hilfsmitteln entdeckt worden waren. In der Geschichte unserer Wissenschaft beobachten wir oftmals Situationen, in denen eine solche „Algebraische Begründung" die führenden Köpfe bewegte und zu außerordentlichen Leistungen führte. Zum Beispiel: die Schnittmultiplizitäten der algebraischen Geometrie; die Riemannschen Flächen und ihre Funktionenkörper; die diophantischen Gleichungen; die Klassenkörpertheorie und, eben die komplexe Multiplikation. Manchmal wird die Meinung vertreten, die Suche nach einer „algebraischen Begründung" sei eine nutzlose Beschäftigung. Denn eine mathematische Tatsache werde nicht richtiger, wenn man einen neuen algebraischen Beweis liefert. André Weil kritisiert in seinen Erinnerungen, daß sich Hasse und sein Schülerkreis (wozu er auch Deuring zählte) um solche algebraischen Beweise kümmere; dies zeuge von einer gewissen Einseitigkeit oder gar von Beschränktheit (Siegel habe erzählt, daß Hasse die Arbeit von Weil im Journal de Liouville nicht verstehen könne).

Ich meine, daß eine solche Argumentation der Sache nicht gerecht wird. Die Suche nach einer „Algebraischen Begründung" erfolgt in der Regel nicht aus solchen Motiven; weder aus einem abstrakten Bedürfnis nach Reinheit der Methode, noch zur Verbesserung der Verständlichkeit dessen, was man vorher nicht verstehen konnte. Vielmehr geht es um eine Vertiefung und Erweiterung unserer Erkenntnis des mathematischen Universums.

Deuring hat das selbstverständlich auch so verstanden. Er hat nicht deshalb die algebraische Begründung der komplexen Multiplikation gesucht und entdeckt, weil er einseitig auf die Algebra fixiert war oder gar weil er die Analysis nicht verstanden hat. Nein, die Suche nach einer algebraischen Begründung ist bei ihm die Suche nach neuen strukturellen Einsichten und nach einer Erweiterung des Horizonts. Dieses Ziel hat er in eindrucksvoller Weise erreicht.

Deuring hat seine Ansicht über den Wert einer rein algebraischen Theorie der komplexen Multiplikation am Schluß seines Enzyklopädieartikels über die Klassenkörper der komplexen Multiplikation (1958) niedergelegt. Eigentlich sei es, so schreibt er, der Untersuchung eines Zahlkörpers ganz unangemessen, ihn durch eine (oder einige) erzeugende Zahlen festzulegen. Das Ausschalten endlich vieler Primideale habe darin seinen Grund. Weitgehend frei von diesem Mangel sei die rein algebraische Theorie, die aus der Theorie der algebraischen Funktionenkörper entspringt. Deuring verweist dann auf einen weiteren in Aussicht genommenen Enzyklopädieartikel, in dem, wie er sagt, über die rein algebraische Theorie berichtet werden soll. Dieser Enzyklopädiebericht ist jedoch niemals erschienen.

Deurings Arbeiten zur komplexen Multiplikation führten ihn, wie bereits gesagt, zu einem Höhepunkt seines Schaffens. Zu einem weiteren Höhepunkt führt die Serie von Arbeiten über die *Zetafunktion einer elliptischen Kurve* [38]–[44]. Wohlgemerkt: hier handelt es sich nicht um Kongruenzzetafunktionen, sondern um die globale Zetafunktion; die zugrundeliegende elliptische Kurve ist über einem Zahlkörper definiert, und die zugehörige globale Zetafunktion ist das Produkt der zugehörigen Kongruenzzetafunktionen der Reduktionen nach den verschiedenen Primzahlen p. (Die Primzahlen mit nicht-regulärer Reduktion bereiten Schwierigkeiten und müssen gesondert behandelt werden.) Zetafunktionen dieser Art werden heute nach *Hasse und Weil* benannt. Deuring leistete wahrhaft Pionierarbeit bei der Aufklärung der Natur solcher Hasse-Weilschen Zetafunktionen, die bis dahin weitgehend unbekannt waren. Deuring behandelte dabei den Fall elliptischer Kurven mit komplexer Multiplikation. Es wäre äußerst reizvoll, ein ganzes Semester lang über diese Arbeiten von Deuring ein Kolleg aus heutiger Sicht zu halten. Das muß und kann ich jedoch den hiesigen Göttinger Kollegen überlassen; für heute möchte ich meinen Vortrag beenden.

§ 6 Schlußwort

In diesem Vortrag konnte ich nicht alle relevanten Arbeiten von Deuring besprechen. Ich habe bereits eingangs gesagt, daß eine erschöpfende Würdigung der Deuringschen Arbeiten hier nicht erwartet werden konnte. Immerhin möchte ich am Schluß noch auf seine Arbeiten über die *Klassenzahl imaginär quadratischer Zahlkörper* wenigstens hinweisen. Die erste davon [7] erschien 1933 und gab den Anstoß zu *Heilbronns* Beweis der *Gaußschen Vermutung*: daß die Klassenzahl mit der Diskriminante unendlich wird. (Einen effektiven Beweis dafür haben kürzlich *Gross* und *Zagier* gegeben*).) 35 Jahre später, im Jahre 1968, kam Deuring noch einmal auf diesen Fragenkreis zurück [47]. Er zeigte, daß der früher angefochtene Beweis von *Heegner* nach geringfügigen Änderungen richtig wird; es geht um die Bestimmung aller imaginär quadratischer Körper der Klassenzahl 1 und den Nachweis, daß es außer den seit Gauß bekannten Körpern mit Diskriminantenbetrag $|d| \leqslant 163$ keine weiteren gibt. Auch diese Arbeiten zur Klassenzahl zeigen die Merkmale, die wir bei den Deuringschen Arbeiten überall finden: Sie sind jeweils aktuell und stehen im Zentrum des Interesses der mathematischen Forschung; gleichzeitig geben sie den Anstoß zu weiterer, bedeutungsvoller Entwicklung in der Zukunft.

Max Deuring (1907–1984):

Zeittafel (1)

1926	Immatrikulation Göttingen (18 J.)
1928/29	Rom: Vorlesungen bei Severi, Enriques
1929/30	Ausarbeitung der Vorlesung von Emmy Noether
1930	Promotion (22 J.)
Aug. 1931	Vertragsabschluß: „Algebren" (Termin: 31. 5. 1932)
1931	Assistent in Leipzig (bei v. d. Waerden)
1931	Verzweigungstheorie bewerteter Körper (Mathematische Annalen)
1932	Arithmetische Theorie algebraischer Funktionenkörper (Mathematische Annalen)
1933	Imaginär quadratische Zahlkörper der Klassenzahl 1 (Mathematische Zeitschrift)
1923/33	Yale University (bei O. Ore)
Okt. 1933	Vorschlag zur Habilitation in Leipzig (durch v. d. Waerden)
Okt. 1934	Manuskript „Algebren" abgeliefert (erschienen 1935)
1935	Habilitation Göttingen (Hasse)
1938	Umhabilitation von Leipzig nach Jena
1937/41	Korrespondenzentheorie I–II (Crelles Journal)
1942	Reduktion algebraischer Funktionenkörper (Mathematische Zeitschrift)
1947	Marburg
1948	Hamburg
1950	Göttingen

---

*) Frau Olga Taussky-Todd hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß in diesem Zusammenhang auch die vorbereitenden Ergebnisse von *Dorian Goldfeld* zu nennen wären.

Zeittafel (2): Algebren

1923	Dickson: Algebras and their arithmetics
1925	Hasse: Klassenkörper, Vortrag DMV Danzig
1927	Artin: Allgemeines Reziprozitätsgesetz
1927	Dickson: deutsche Übersetzung (Speiser)
1927/28	Brandt: Gruppoid/Idealtheorie
1929/30	Emmy Noether: Vorlesung über hyperkomplexe Systeme (Deuring)
1931	Hasse: Zyklische Algebren
1932	Brauer–Hasse–Noether: Hauptsatz der Algebrentheorie
1932	Chevalley: Normrestsymbol + Algebren
1933	Hasse: Struktur der Brauer-Gruppe
1934	Tsen: Algebren über Funktionenkörpern
1934	Witt: Algebren über reellen Funktionenkörpern
1935	Deuring: Ergebnisbericht „Algebren"

Nachwort

Das vorstehende Manuskript war ursprünglich *nicht* für eine Publikation bestimmt, sondern lediglich zur Dokumentation des gesprochenen Wortes, vornehmlich für die Hörer meines Vortrages in Göttingen. Dadurch erklären sich manche Passagen, die in dieser Form eigentlich nicht in eine Publikation gehören, sondern auf eine Rede zugeschnitten sind. Erst im nachhinein bin ich durch Freunde und Kollegen dazu bewogen worden, das Vortragsmanuskript zur Publikation zu geben und damit einer größeren Öffentlichkeit zugänglich zu machen. Allerdings habe ich mich nicht dazu entschließen können, das Manuskript noch einmal für eine Publikation zu überarbeiten.

Eine der Unzulänglichkeiten dieses Manuskripts liegt darin, daß die verschiedenen Teile des Deuringschen mathematischen Werkes nicht alle mit derselben Ausführlichkeit besprochen werden; das erwies sich als unmöglich in der zur Verfügung stehenden Vortragszeit. Um mit der Zeit auszukommen, mußte der vorzutragende Stoff beschränkt werden; es war notwendig, eine Auswahl zu treffen und Schwerpunkte zu setzen. So kam es, daß ich in dem Vortrag ausführlicher auf die frühen Arbeiten Deurings eingegangen bin, während die späteren Arbeiten, insbesondere über die Zetafunktion einer algebraischen Kurve vom Geschlecht Eins, nur kurz erwähnt wurden. Die Begründung für diese Auswahl habe ich in dem Vortrag selbst gegeben und sie braucht daher hier nicht wiederholt zu werden. Vgl. den Beginn des Abschnitts 5.

Die dem Manuskript beigegebene Zeittafel bezieht sich dementsprechend nur auf die frühere Zeit, bis zum Jahre 1950.

Eine weitere Unzulänglichkeit bildet die unvollständige Dokumentation der historischen Quellen zu diesem Manuskript. Zur Vorbereitung des Vortrages hatte ich nur relativ wenig Zeit zur Verfügung und konnte somit keine umfangreicheren historischen Recherchen durchführen. Von daher erklärt sich der Ansatz, meine eigenen Erfahrungen und Begegnungen mit dem Deuringschen Werk als thematischen Eingang zu benutzen, weil mir nämlich eine historisch besser gesicherte

Grundlage nicht zur Verfügung stand. Das ist bei den Hörern des Vortrages wohl auch meist richtig verstanden worden.

Das Fehlen zuverlässiger Informationen ist auch der Grund dafür, daß ich in dem Vortrag nicht auf die Frage eingegangen bin, wie hoch denn der Anteil von Emmy Noether an dem Deuringschen Buch über Algebren einzuschätzen ist. Deuring war ja ein Schüler von Emmy Noether gewesen, und zwar einer ihrer hervorragenden Schüler, den sie schon während seiner Studienzeit für den am meisten versprechenden Nachwuchsmathematiker Göttingens gehalten hatte. (So berichtet Auguste Dick in ihrer Noether-Biographie.) Nicht nur hat Deuring sein Buch auf Anregung und Empfehlung Emmy Noethers geschrieben, sondern sie hat auch in den Jahren der Niederschrift des Buchmanuskripts lebhaften Anteil daran genommen. Sogar noch von Bryn Mawr aus hat sie brieflich mit Deuring über das Buchmanuskript diskutiert, sozusagen bis zum letzten Augenblick, bis zur Abgabe des Manuskripts beim Verlag. (Dies erfuhr ich durch eine freundliche Mitteilung von Frau Olga Taussky-Todd.) Demnach fällt es auf, daß Deuring im Vorwort seines Buches überhaupt nicht auf die Rolle von Emmy Noether beim Zustandekommen des Buches eingegangen ist, obwohl natürlich in sachlicher Hinsicht explizit und implizit der Noethersche Einfluß deutlich sichtbar ist.

Frau Olga Taussky-Todd, der ich diese Frage vorlegte, antwortete darauf in einem Brief vom 2. September 1986 wie folgt.

> *As to the question whether Deuring owed Noether an acknowledgement in his well known book Algebren. My opinion is „No". They were colleagues in spite of the age difference. Deuring was allowed to call her „Du", and their conversation was simply „talking shop" (in German: fachsimpeln).*

Ich habe diese Äußerung hier zitiert, da sie uns Aufschluß gibt nicht nur über Deurings Verhältnis zu seiner großen Lehrmeisterin, sondern auch über seine mathematische Statur schon in jungen Jahren.

Prof. Dr. Peter Roquette
Math. Institut
Universität Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 288
6900 Heidelberg 1

(Eingegangen: 4. 9. 1987)