

Parabolische Fixpunkte

Julia Mattutat

19. Juni 2021

- 1 Was ist ein parabolischer Fixpunkt?
- 2 Repelling and Attracting Richtungen
- 3 Basin of Attraction und Immediate Basin
- 4 Leau-Fatou Flower Theorem
- 5 Parabolic Linearization Theorem

Parabolischer Fixpunkt

Aus erstem Vortrag:

Ein Punkt z_0 mit periodischem Orbit und Periodenlänge n , heißt

- (1.) instabil periodisch, wenn $|(f^n)'(z_0)| > 1$
- (2.) stabil periodisch, wenn $|(f^n)'(z_0)| < 1$
- (3.) indifferent periodisch, wenn $|(f^n)'(z_0)| = 1$

In diesem Vortrag betrachten wir einen Aspekt der indifferent periodischen Punkte und ihre Umgebung nun genauer.

Definition

Ein periodischer Fixpunkt $z_0 = f^n(z_0)$ heißt **parabolisch**, wenn $\lambda = (f^n)'(z_0) = +1$ und f^n nicht die Identität ist.

(Allgemeiner: Ein Fixpunkt heißt parabolisch, wenn λ eine Einheitswurzel ist und keine Iteration von f die Identität.)

(1.) $f(z) = z + z^5$

$\Rightarrow z = 0$ ist ein Fixpunkt

$$f'(z) = 1 + 5z^4 \quad \Rightarrow \lambda = f'(0) = 1$$

\Rightarrow Fixpunkt ist parabolisch

(2.) $f(z) = \frac{z}{z-1}$

$\Rightarrow z = 0$ und $z = 2$ sind Fixpunkte, jedoch

$$f'(z) = -\frac{1}{(z-1)^2} \quad \Rightarrow \lambda = -1 \quad \text{für } z = 0, 2$$

$$f^2(z) = \frac{\frac{z}{z-1}}{\left(\frac{z}{z-1} - 1\right)} = z \quad \Rightarrow \text{Identitätsfunktion}$$

\Rightarrow Fixpunkte sind nicht parabolisch

Lemma

Jeder parabolische periodische Punkt liegt in einer Julia-Menge.

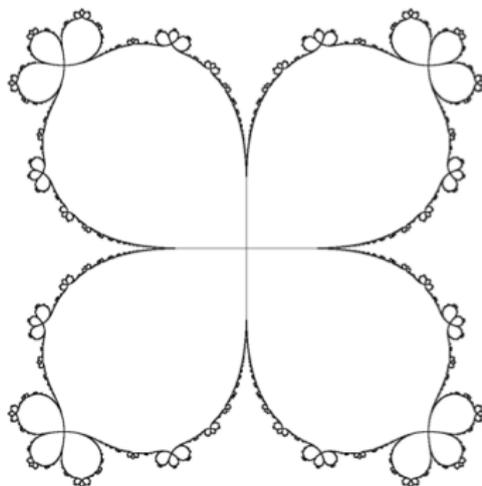


Abbildung: Julia-Menge für $z + z^5$

Parabolischer Fixpunkt

Wir betrachten jetzt Funktionen der Form

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots,$$

die holomorph um den Ursprung sind. Weiter nehmen wir an, dass λ eine Einheitswurzel ist mit $\lambda^q = 1$.

Wir starten mit dem einfachsten Fall $\lambda = 1$ und $a \neq 0$ erster Koeffizient ungleich Null

$$\Rightarrow f(z) = z + az^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \dots = z(1 + az^n + a_{n+2}z^{n+1} + \dots)$$

$n + 1$ heißt **Vielfachheit** des Fixpunktes bei 0.

Ab jetzt sei $n + 1 \geq 2$.

Definition: Repelling und attracting Richtungen

Ein Einheitsvektor v am Ursprung zeigt in eine 'repelling' (abstoßende) Richtung, wenn av^n reell und positiv ist, sodass $v \mapsto v(1 + av^n)$ weg vom Ursprung zeigt. Analog zeigt ein Einheitsvektor am Ursprung in eine 'attracting' (anziehende) Richtung, wenn av^n reell und negativ ist.

Bemerkung:

- (1.) Es gibt jeweils n 'repelling' und n 'attracting' Richtungen, die sich abwechseln
- (2.) 'Repelling' Richtungen für eine Funktion f sind gerade 'attracting' Richtungen für seine Inverse f^{-1} (wohldef. und holomorph um den Ursprung)

Repelling und Attracting Richtungen

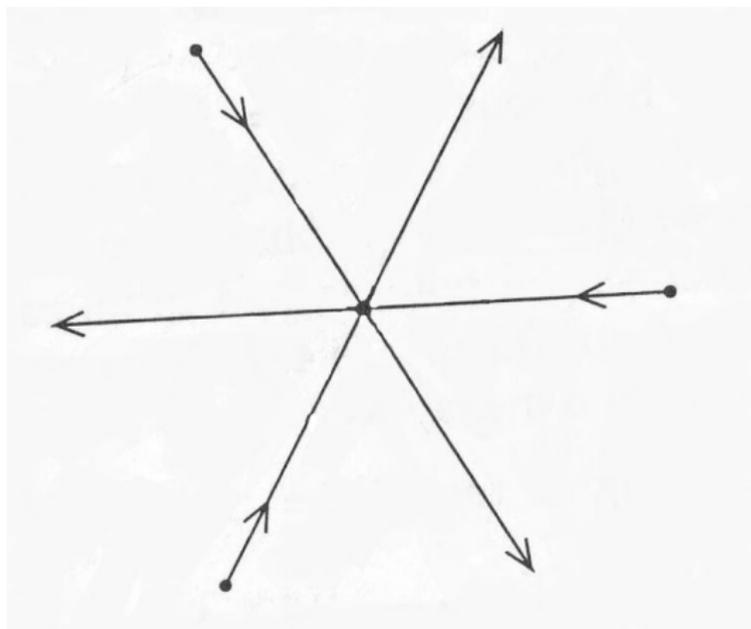


Abbildung: Schema der 'repelling' und 'attracting' Richtungen eines parabolischen Punktes mit Vielfachheit $n + 1 = 4$

Repelling und Attracting Richtungen

Im Weiteren betrachten wir den Orbit $f : z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots$ für Funktionen in obiger Form.

Definition

Wir sagen ein Orbit konvergiert **nicht-trivial** gegen 0, wenn $z_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ mit $z_k \neq 0$ für alle k .

Lemma

Konvergiert der Orbit $f : z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots$ nicht-trivial gegen 0, dann konvergiert $\frac{z_k}{|z_k|}$ gegen einen der n 'attracting' Einheitsvektoren für $k \rightarrow \infty$.

Genauer: Für $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass wenn der Winkel zwischen $\frac{z_0}{|z_0|}$ und den 'repelling' Vektoren größer als ϵ ist und $|z_0| < \delta$, dann konvergiert der Orbit nicht-trivial gegen 0. Weiter konvergiert $\frac{z_k}{|z_k|}$ gegen den zu $\frac{z_0}{|z_0|}$ nächsten 'attracting' Einheitsvektor.

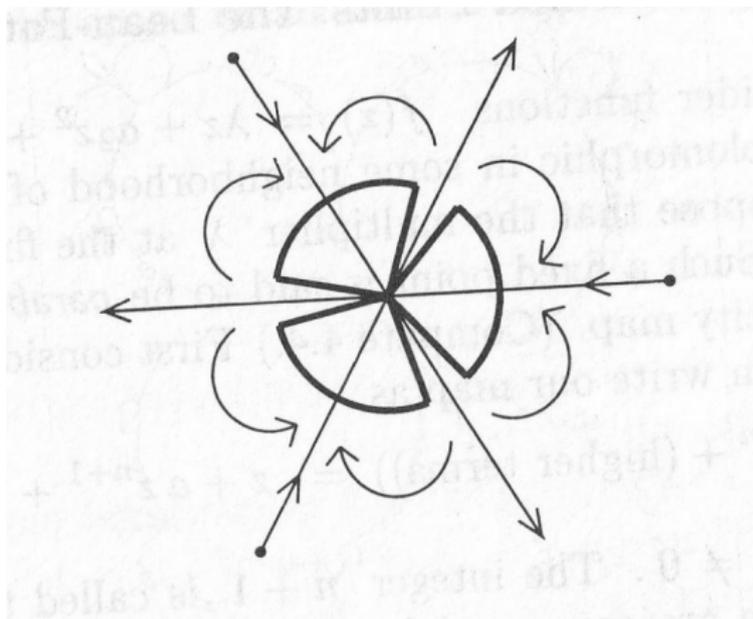
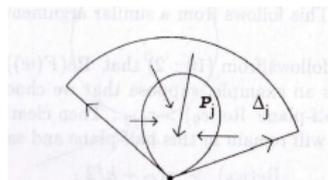


Abbildung: Schema eines parabolischen Punktes mit Vielfachheit $n + 1 = 4$

Repelling und Attracting Direction

Beweisskizze: Wir nutzen einen Kartenwechsel, um die lokale Dynamik im Sektor Δ_j genauer zu beschreiben. (Wir betrachten z in einer ϵ -Umgebung mit Winkel $2\pi/n$, die alle $re^{i\theta} v_j$ enthält mit $0 < r < \epsilon$ und $|\theta| < \pi/n$.)



Wir wählen die Karte φ mit $z \mapsto \omega = \frac{c}{z^n}$ mit $c = -\frac{1}{na}$. Somit bildet φ in die geschlitzte Ebene $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ab. Betrachten wir also

$$f(z) = z(1 + az^n + o(z^n))$$

und die Abbildung

$$\omega \mapsto F(\omega) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(\omega) \quad \text{mit} \quad \varphi^{-1}(\omega) = \sqrt[n]{\frac{c}{\omega}},$$

die wohldefiniert und holomorph ist. Diese ist definiert auf dem Komplement einer Kreisscheibe in der geschlitzten Ebene und nimmt Werte in \mathbb{C} an. Dann ist

$$F(\omega) = \omega \left(1 + a \frac{c}{\omega} + o\left(\frac{1}{\omega}\right) \right)^{-n} = \omega \left(1 + \frac{-nac}{\omega} + o\left(\frac{1}{\omega}\right) \right)$$

Mit $nac = -1$ folgt

$$F(\omega) = \omega + 1 + o(1)$$

Daraufhin können wir zeigen, dass für den Orbit $\omega_0 \mapsto \omega_1 \mapsto \dots$ unter F $\operatorname{Re}(\omega_k) \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$.

$$\Rightarrow \frac{\omega_k - \omega_0}{k} \rightarrow 1 \text{ für } k \rightarrow \infty$$

Da $\frac{\omega_0}{k}$ gegen 0 konvergiert, folgt, dass ω_k asymptotisch gegen $+k$ tendiert.

$$\text{D.h. } |\omega_k| \rightarrow \infty \text{ und } \frac{\omega_k}{|\omega_k|} \rightarrow 1.$$

$$\Rightarrow z_k \rightarrow 0 \text{ und } \frac{z_k}{|z_k|} \rightarrow v_j \text{ für } k \rightarrow \infty$$



Definition

Wir sagen ein Orbit $z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots$ konvergiert gegen 0 **in Richtung v** , wenn der Orbit $z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots$ unter f gegen 0 konvergiert und $\frac{z_k}{|z_k|}$ gegen einen 'attracting' Einheitsvektor v tendiert.

Sei nun v_j eine 'attracting' Richtung im Tangentialraum der Riemannschen Fläche S gegeben an einem mehrfachen Fixpunkt \hat{z} .

Definition

Der parabolische 'Basin of Attraction' $\mathcal{A}_j = \mathcal{A}(\hat{z}, v_j)$ ist die Menge aller $z_0 \in S$ für die der Orbit $z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots$ gegen \hat{z} in Richtung v_j konvergiert.

Die 'Immediate Basin' \mathcal{A}_j^0 ist die eindeutig zusammenhängende Komponente von \mathcal{A}_j , die unter f in sich selbst abbildet.

Basin of Attraction und Immediate Basin

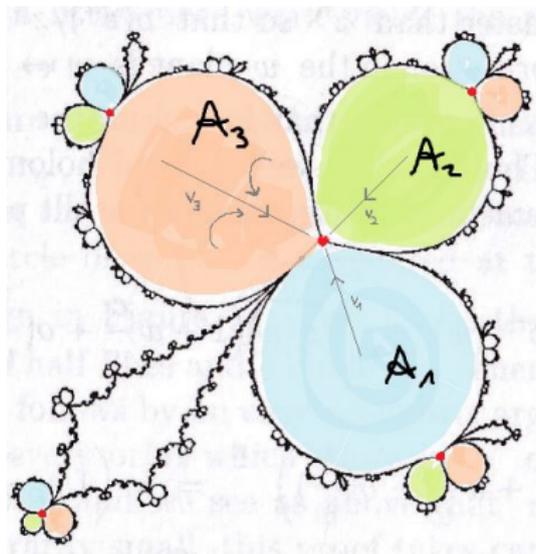


Abbildung: Julia-Menge für $f(z) = z^5 + (0,8 + 0,8i)z^4 + z$

Wir haben also einen parabolischen Fixpunkt bei 0 mit Vielfachheit $n + 1 = 4$ (und einen 'attracting' Fixpunkt bei $z = -0,8 - 0,8i$) und somit 3 'attracting' und 3 'repelling' Richtungen. Die 'Immediate Basins' für die 'attracting' Richtungen ähneln hier Ballons, die am Fixpunkt zusammentreffen.

Basin of Attraction und Immediate Basin

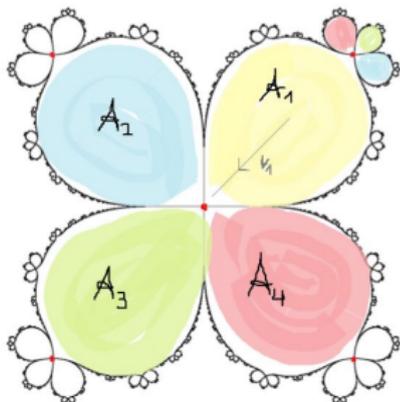


Abbildung: Julia-Menge für
 $f(z) = z^5 + z$

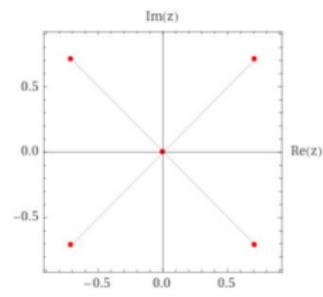


Abbildung: Urbilder für Fixpunkt $z = 0$

Diese Funktion hat einen parabolischen Fixpunkt bei 0 mit Vielfachheit $n + 1 = 5$ und 4 'attracting' und 'repelling' Richtungen.

Bemerkung:

Die $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ sind disjunkte invariante offene Mengen, sodass ein Orbit $z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots$ genau dann unter f nicht-trivial gegen \hat{z} konvergiert, wenn \hat{z} zu einem \mathcal{A}_j gehört.

Bemerkung:

Wir können \mathcal{A}_j auch definieren als die zusammenhängende Komponente der Fatoumenge $S \setminus J$, die diejenigen z_k enthält für k groß, für die der Orbit $z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots$ gegen \hat{z} in Richtung v_j konvergiert.

Korollar

Sei $f : S \rightarrow S$ eine holomorphe Abbildung. Dann ist jede parabolische 'Basin of Attraction' \mathcal{A}_j enthalten in der Fatou-Menge $S \setminus J(f)$ und jeder Rand $\partial\mathcal{A}_j$ enthalten in der Julia-Menge $J(f)$.

Sei jetzt λ eine q -te Einheitswurzel, d.h. $\lambda = \exp\left(\frac{2\pi ip}{q}\right)$ mit $\frac{p}{q}$ klein.

Bemerkung:

Sei $f : S \mapsto S$ eine holomorphe Abbildung. Ist \hat{z} ein periodischer Punkt mit Periode k und Multiplikator λ wie oben für f , dann ist \hat{z} ein Fixpunkt für die Iteration f^{kq} mit $\lambda = +1$. Weiter sind die parabolischen 'Basins of Attraction' für f^{kq} bei \hat{z} gerade die 'Basins of Attraction' für f .

Lemma

Ist λ am Fixpunkt $f(\hat{z}) = \hat{z}$ eine primitive q -te Einheitswurzel, dann ist die Zahl der 'attracting' Richtungen bei \hat{z} ein Vielfaches von q .
Das heißt die Vielfachheit $n+1$ des Fixpunktes \hat{z} von f^q ist kongruent zu 1 mod q .

Beweis:

Sei v eine 'attracting' Richtung für f^q bei \hat{z} . Weiter wählen wir einen Orbit $z_0 \mapsto z_q \mapsto z_{2q} \mapsto \dots$ unter f^q , der gegen \hat{z} konvergiert in Richtung v .

\Rightarrow Das Bild des Orbits unter f $z_1 \mapsto z_{q+1} \mapsto z_{2q+1} \mapsto \dots$ ist dann ein Orbit, der gegen \hat{z} in Richtung λv konvergiert.

D.h. Multiplizieren mit $\lambda = e^{\frac{2\pi ip}{q}}$ permutiert die n 'attracting' Richtungen. \square

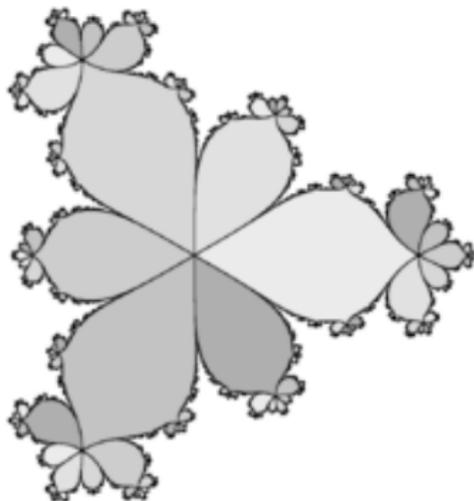


Abbildung: Julia-Menge für $f(z) = z^4 + e^{\pi i} z = z^4 - z$

Hier ist λ eine 2-te Einheitswurzel und mit

$$f^2(z) = (z^4 - z)^4 - z^4 + z = z^{16} - 4z^{13} + 6z^{10} - 4z^7 + z$$

ist $z = 0$ ein parabolischer Fixpunkt mit Vielfachheit $7 = 2 * 3 + 1$. Es gibt somit 6 'attracting' Richtungen.

Basin of Attraction und Immediate Basin

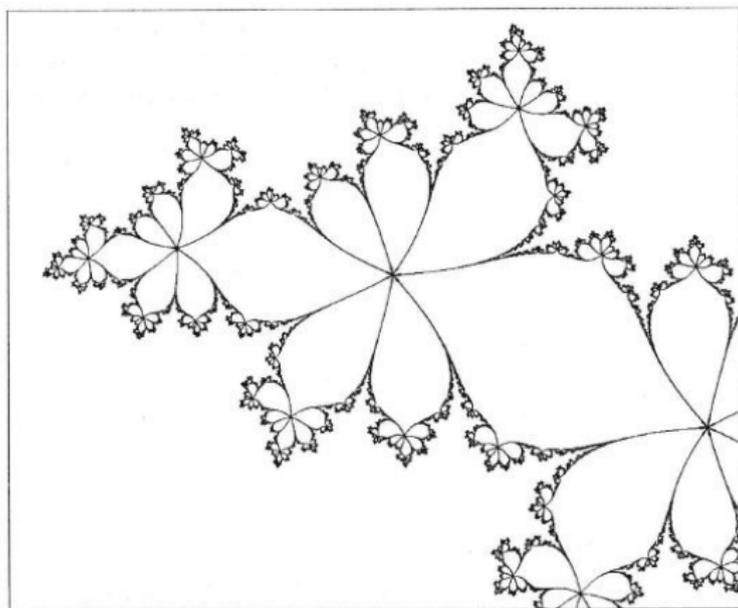


Abbildung: Julia-Menge für $f(z) = z^2 + e^{2\pi i t} z$ mit $t = \frac{3}{7}$

Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt der Julia-Menge für f mit Fixpunkt mit Multiplikator $e^{2\pi i(3/7)}$ und 7 'Immediate Basins'.

Attracting und Repelling Petals

Sei wieder $\lambda = 1$.

Wir wählen jetzt eine Umgebung N von einem Fixpunkt \hat{z} klein genug, sodass f die Umgebung N diffeomorph auf eine Umgebung N' von \hat{z} abbildet. Weiter sei v eine 'attracting' Richtung bei \hat{z} .

(f diffeomorph $\Leftrightarrow f$ bijektiv, stetig differenzierbar und Umkehrung f^{-1} stetig differenzierbar)

Definition: Attracting und Repelling Petals

Eine einfach zusammenhängende offene Menge $\mathcal{P} \subset N \cap N'$ mit $f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$ heißt '**Attracting Petal**' für f in Richtung v bei \hat{z} , wenn

- i.) die Folge der Iterationen $f^k|_{\mathcal{P}}$ gleichmäßig gegen die konstante Funktion $z \mapsto \hat{z}$ konvergiert und
- ii.) der Orbit $z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots$ unter f genau dann von der Menge \mathcal{P} absorbiert wird, wenn er in Richtung v gegen \hat{z} konvergiert.

Analog nennen wir eine einfach zusammenhängende offene Menge $\mathcal{P}' \subset N \cap N'$ '**Repelling Petal**' für eine 'repelling' Richtung v' , wenn \mathcal{P}' ein 'Attracting Petal' für f^{-1} für diese Richtung ist.

Leau-Fatou Flower Theorem

Sei \hat{z} ein Fixpunkt mit Vielfachheit $n + 1 \geq 2$. Dann existieren zu den n 'attracting' Richtungen bei \hat{z} 'Attracting Petals' $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$ und zu den n 'repelling' Richtungen bei \hat{z} 'Repelling Petals' $\mathcal{P}'_1, \dots, \mathcal{P}'_n$, sodass die Vereinigung der $2n$ 'Petals', zusammen mit \hat{z} , eine Umgebung \mathcal{N}_0 von \hat{z} bilden. Zudem sind diese $2n$ 'Petals' zyklisch angeordnet, sodass sich die 'Petals' genau dann schneiden, wenn der Winkel zwischen den Richtungen $\frac{\pi}{n}$ ist.

Leau-Fatou Flower Theorem

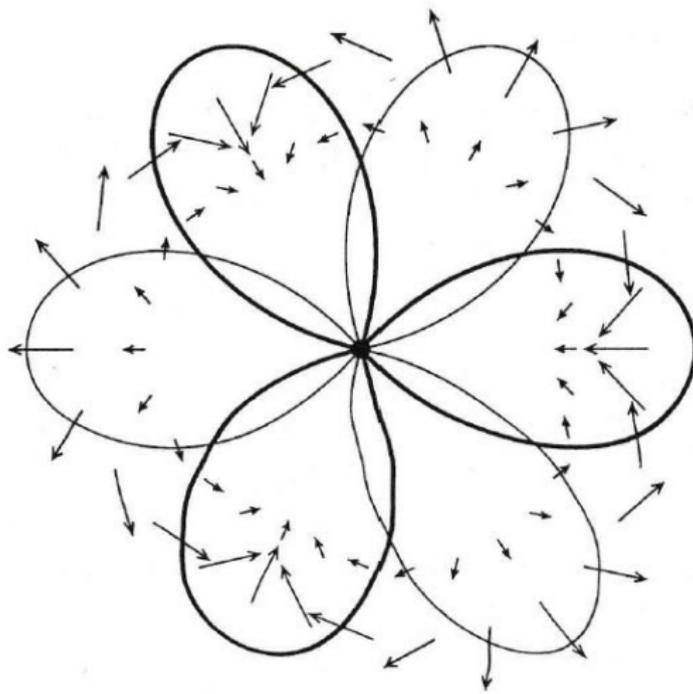


Abbildung: Leau-Fatou Flower mit 3 'Attracting' und 3 'Repelling Petals'

Bemerkung:

Sei $f : S \rightarrow S$ global definiert und holomorph und \hat{z} ein Fixpunkt mit Vielfachheit $n + 1 \geq 2$. Dann bestimmt jedes 'Attracting Petal' \mathcal{P}_j eindeutig eine zugehörige parabolische 'Basin of Attraction' \mathcal{A}_j . Diese enthält dann alle Punkte z_0 , für die der Orbit $z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots$ in \mathcal{P}_j landet.

Parabolic Linearization Theorem

Wir können nun die Geometrie um einen Fixpunkt auch folgendermaßen beschreiben:

Sei f wie zuvor mit $\lambda = 1$. Sei weiter \mathcal{P} entweder einer der 'Attracting' oder einer der 'Repelling Petals'. Dann definieren wir den Quotientenraum \mathcal{P}/f von \mathcal{P} , indem wir z mit $f(z)$ identifizieren, genau dann wenn z und $f(z)$ in \mathcal{P} liegen.

Zylinder Theorem

Für jeden 'Attracting' oder 'Repelling Petal' ist die Quotienten-Mannigfaltigkeit \mathcal{P}/f isomorph zum unendlichen Zylinder \mathbb{C}/\mathbb{Z} .

Parabolic Linearization Theorem

Es existiert genau eine (bis auf Verkettung mit einer Translation) konforme Einbettung α von \mathcal{P} in die universelle Überdeckung \mathbb{C} des Zylinders, die folgende **Funktionalgleichung von Abel** erfüllt

$$\alpha(f(z)) = 1 + \alpha(z) \quad \text{für alle } z \in \mathcal{P} \cap f^{-1}(\mathcal{P}).$$