Siegel Scheiben und Komponenten der Fatou-Menge

1 Vorbereitung

1.1 Fixpunkte

Definition Fixpunkt: Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt

- Fixpunkt, wenn $f(z_0) = z_0$ gilt
- Periodischer Punkt, wenn $f^n(z_0) = z_0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt

Definition Multiplikator:
Für einen Fixpunkt z_0 von f heißt $f'(z_0)$ der Multiplikator von z_0, für einen n-periodischen Punkt $(f^n)'(z_0)$

Klassifikation von Fixpunkten: Ein Fixpunkt z_0 heißt:

- anziehend: $|f'(z_0)| < 1$
- abstoßend: $|f'(z_0)| > 1$
- rational indifferent: $|f'(z_0)| = 1$ und $f'(z_0)$ ist eine Wurzel von 1
- irrational indifferent: $|f'(z_0)| = 1$ und $f'(z_0)$ ist keine Wurzel von 1

Lemma: rational indifferente Fixpunkte
Sei f eine rationale Funktion mit Grad $deg(f) \geq 2$, dann liegt jeder rational indifferente Fixpunkt von f in $J(f)$.

Beweis:

1.2 Hyberbolische Riemansche Flächen

Definition: Eine Teilmenge der Riemannsphäre heißt hyperbolisch, wenn sie konform isomorph zur Einheitsscheibe $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ ist.

Lemma:
Jede offene Teilmenge der Riemannsphäre, derern Komplement mindestens drei Punkte enthält, ist hyperbolisch.

Pick Theorem:
Seien S und S' hyperbolische Riemannsche Flächen, $f : S \to S'$ holomorph. Dann gilt genau einer der folgenden Fälle:

- f ist ein konformer Isomprphismus und eine Isometrie
- f ist nicht injektiev, aber eine lokale Isometrie
- f veringert alle Poincarè Distanzen

Montel Theorem:
Seien U und S Riemannsche Flächen, S hyperbolisch, sei $\mathbb{F}$ eine Familie holomorpher Funktionen $f : U \mapsto S$, dann ist $\mathbb{F}$ eine normale Familie und $\overline{\mathbb{F}}$ ist kompakt.

2 Dynamik auf hyperbolischen Flächen

Wir betrachten im Folgenden eine holomorphe Funktion $f : S \mapsto S$, die eine hyperbolische Fläche S auf sich selbst abbildet.

Lemma: Keine Julia Menge Für jede Abb. $f : S \mapsto S$, S hyperbolisch, ist $J(f) = \emptyset$, entsprechend gibt es keine abstoßenden Fixpunkte.

Beweis:

2.1 Klassifikation von Komponenten der Fatou-Menge

Theorem: Für $f : S \mapsto S$ und S hyperbolisch gilt genau einer der folgenden Fälle:

- **Anziehender Fall:** Hat f einen anziehenden Fixpunkt in S, konvergiert jeder Orbit (gleichmäßig auf kompakten Teilmengen) gegen diesen Punkt.
- **Entkommender Fall:** Hat ein Orbit unter f keinen Häufungspunkt in S, dann hat kein Orbit einen Häufungspunkt in S. Für jede kompakte Teilmenge $K \subset S$ existiert ein n_K, sodass für alle $n \leq n_K$ gilt: $K \cap f^n(K) = \emptyset$
- **Endliche Ordnung:** Hat f zwei verschiedene periodische Punkte, dann ist jeder Punkt ein periodischer Punkt und eine Iteration f^n ist die Identität.
- **Irrationale Rotation:** Ansonsten ist ist S isomorph entweder zu der $\mathbb{D}$, $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ oder $\mathbb{A}_r = \{1 < |z| < r\}$ und entspricht einer irrationalen Rotation $z \mapsto e^{2\pi i\alpha}$ mit $\alpha \notin \mathbb{Q}$

Beweis:

2.2 Siegel-Scheiben

Definiton:
Sei f eine holomorphe Abbildung. Eine Komponente S der Fatou Menge heißt **Siegel Scheibe** um ein $z_0 \in \mathbb{C}$, wenn f konform konjugiert zu einer irrationalen Rotation der Einheitsscheibe $\mathbb{D}$ ist, d.h.es existiert $\Phi : S \mapsto \mathbb{D}$ biholomorph mit $\Phi(z_0) = 0$ und $(\Phi \circ f \circ \Phi^{-1})(z) = e^{2\pi i\alpha}$ mit $\alpha \notin \mathbb{Q}$

Theorem: Sei f eine rationale Funktion von Grad $deg(f) \geq 2$ mit indifferentem Fixpunkt z_0. Dann ist äquivalent:

- f ist lokal linearisierbar um z_0

- z_0 liegt in der Fatou Menge
- Die Komponente U der Fatou Menge, die z_0 enthält, ist eine Siegel Scheibe

Beweis: