RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Geometrische Gruppentheorie
*Heidelberg, 17.10.2019*

Hausaufgaben 1

**Themenblock: Gruppen als Symmetrien**

*Abgabe in Zweierpaaren bis zum 25.11.2019 im ersten Stock*
*Besprechung am 23.11.2019*

---

**Aufgabe 1.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Die additiven Gruppen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}^2$ sind isomorph.
2. Die additiven Gruppen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ sind isomorph.
3. Die Gruppen $S_3$ und $D_3$ sind isomorph.

**Aufgabe 2.** Gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}_{>0}$ eine Teilmenge $X_n \subset \mathbb{R}^2$, so dass die Isometriegruppe von $X_n$ zu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ isomorph ist? Begründen Sie Ihre Antwort!

**Aufgabe 3.** (äußere Automorphismengruppen)

1. Sei $G$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Inn}(G)$ der inneren Automorphismen von $G$ eine normale Untergruppe in $\mathrm{Aut}(G)$ ist.
2. Bestimmen Sie $\mathrm{Out}(\mathbb{Z}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z})/\mathrm{Inn}(\mathbb{Z})$ (und begründen Sie Ihre Antwort).

**Aufgabe 4.** Sei $\Omega = \{1, \dots, n\}$. Eine Permutationgruppe $F < S_n = \mathrm{Aut}(\Omega)$ ist

1. 2-*transitiv*, wenn sie transitiv auf $\Omega^{(2)}$ wirkt.
2. *Primitiv*, wenn sie transitiv auf $\Omega$ wirkt und jede $F$-invariant Partition von $\{1, \dots, n\}$ ist entweder $\{\{1, \dots, n\}\}$ oder $\{\{1\}, \dots, \{n\}\}$.
3. *Quasiprimitiv*, wenn sie transitiv ist, und jede normale Untergruppe $\{e\} \neq N \triangleleft F$ transitiv auf $\{1, \dots, n\}$ wirkt.

Zeigen Sie, dass

$$F \text{ is 2-transitiv} \Rightarrow \text{primitiv} \Rightarrow \text{quasiprimitiv} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} F = F^+ \\ \text{oder} \\ F \text{ einfach und die Wirkung auf } \Omega \text{ frei ist.} \end{cases}$$

Hier $F^+$ ist die Untergruppe, die von den Stabilisatoren von Punkte in $\Omega$ erzeugt wird.

**Aufgabe 5** (Optional)**.** Gibt es zu jeder Gruppe $G$ ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$, so dass die Isometriegruppe von $X$ zu $G$ isomorph ist? Begründen Sie Ihre Antwort!