RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

MATHEMATISCHES INSTITUT

Vorlesung Geometrische Gruppentheorie
Heidelberg, 30.10.2019

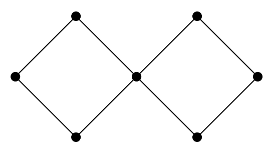
Hausaufgaben 3

Themenblock: Wirkungen auf Bäumen

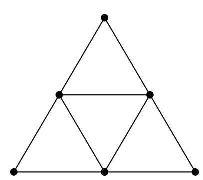
Abgabe in Zweierpaaren bis zum 08.11.2019 im ersten Stock
Besprechung am 06.11.2019

Aufgabe 1. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Es gibt eine nicht-triviale Gruppe, die frei auf folgendem Graphen operiert:



2. Es gibt eine nicht-triviale Gruppe, die frei auf folgendem Graphen operiert:



Aufgabe 2. (Charakterisierung endlicher Bäume)
Sei $G = (V, E)$ ein endlicher zusammenhängender Graph mit $V \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass G genau dann ein Baum ist, wenn

$$|V| = |E| + 1$$

gilt.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie einen Fundamentalbaum für die Wirkung von G_1, G_2 auf $\mathrm{Cay}(\mathbb{F}(\{a, b\}), \{a, b\})$, wobei $G_1 = \langle a, b^2, bab \rangle$ und $G_2 = \langle ab \rangle$.

Aufgabe 4. (Operationen endlicher Gruppen auf Bäumen)
Zeigen Sie (ohne die Charakterisierung freier Gruppen durch freie Operationen auf Bäumen zu verwenden): Jede Operation einer endlichen Gruppe auf einem (nicht-leeren) Baum besitzt einen globalen Fixpunkt (d.h. eine Ecken oder eine Kante, auf der alle Gruppenelemente trivial wirken). Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!
Hinweis. Betrachten Sie die Bahn einer Ecke und die Pfade zwischen den Ecken dieser Bahn.