RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Geometrische Gruppentheorie

Heidelberg, 15.1.2020

Hausaufgaben 11

Thema der Woche: Gruppenwachstum

Keine Abgabe;
Besprechung in der Übung am 22.01.2020

Aufgabe 1. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Jede endlich erzeugte unendliche hyperbolische Gruppe hat exponentielles Wachstum.

2. Jede endlich erzeugte Gruppe mit exponentiellem Wachstum ist hyperbolisch.

3. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein endliches Erzeugendensystem $S \subset \mathbb{Z}^n$ mit: Für alle $r \in \mathbb{N}$ ist
$$B_r^{\mathbb{Z}^n,S}(0) = \{-r, ..., r\}^n$$

Aufgabe 2. (Wachstumstyp der Heisenberggruppe). Sei $H < \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$ die Heisenberggruppe.

1. Zeigen Sie, dass
$$H = \langle x, y, z | [x, z], [y, z], [x, y]z^{-1} \rangle.$$
Wir definieren $S := \{x, y, z\} \subset H$.

2. Seien $n, k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $d_S(x^m y^n z^k, e) \leq |m| + |n| + 6\sqrt{|k|}$.

3. Zeigen Sie, dass $|m| + |n| \leq d_S(x^m y^n z^k, e)$ und $\sqrt{|k|} \leq d_S(x^m y^n z^k, e)$.

4. Folgern Sie, dass die Wachstumsfunktion $\beta_{H,S}$ zu einem Polynom vom Grad 4 quasi-äquivalent ist.

Aufgabe 3. Sei G eine endlich erzeugte Gruppe, die kein exponentielles Wachstum hat und quasi-isometrisch zu $G \times G$ ist. Zeigen Sie dass G mittleres Wachstum hat.

Aufgabe 4. Sei $G = \langle S \rangle$ endlich erzeugt. Sei $L < G$ von endlichem Index, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $c \in (0, 1)$, $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\psi : L \to G^n$ ein injektiver homomorphismus, so dass
$$\sum_{j=1}^{n} d_S(\psi(g)_j, e) \leq c d_S(g) + b.$$

Zeigen Sie, dass G kein exponentielles Wachstum hat.

Folgern Sie, dass die Grigorchukgruppe Gri mittleres Wachstum hat. *Hinweis:* Betrachten Sie den Homomorphismus
$$\begin{array}{rccc} \psi : & L_3 & \to & \prod_{w \in \{0,1\}^3} \mathrm{Gri} \\ & g & \mapsto & (\mathrm{pr}_{i_1}\phi) \circ (\mathrm{pr}_{i_2}\phi) \circ (\mathrm{pr}_{i_3}\phi(g)) \end{array}$$