RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Geometrische Gruppentheorie
Heidelberg, 9.1.2020

Hausaufgaben 11

Themenblock: Ränder hyperbolischer Gruppen

Abgabe in Zweierpaaren bis zum 17.01.2020 im ersten Stock
Besprechung am 15.01.2020

Aufgabe 1. Sei G eine endlich erzeugte hyperbolische Gruppe. Dann induziert die Linkstranslationswirkung von G auf G eine G-Wirkung auf dem Gromov-Rand $\partial_\infty G$ von G. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Die Linkstranslationswirkung von $\mathbb{F}_2$ auf $\partial_\infty \mathbb{F}_2$ ist frei.
2. Sei $x \in \partial_\infty F_2$. Dann ist $\mathbb{F}_2 \cdot x$ der gesamte Rand $\partial_\infty \mathbb{F}_2$.

Aufgabe 2. (Visibilität) Sei X ein eigentlicher hyperbolischer metrischer Raum, und seien $\xi^+ \neq \xi^- \in \partial_\infty X$. Zeigen Sie, dass eine Geodäte $\gamma(-\infty, \infty) \to X$ existiert, so dass $[\gamma|_{[0,\infty)}] = \xi^+$, $[\gamma|_{(-\infty,0]}] = \xi^-$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass keine hyperbolische Gruppe G existiert mit

$$|\partial_\infty G| = 1.$$

Aufgabe 4.

1. Geben Sie ein Beispiel eines hyperbolischen Raumes X, der nicht beschränkt ist, so dass $\partial_\infty X = \emptyset$.
2. Sei G eine endlich erzeugte, hyperbolische Gruppe. Zeigen Sie, dass G endlich ist, genau dann wenn $\partial_\infty G = \emptyset$.

Aufgabe 5. Wir betrachten $X = \mathbb{R}^2$ zusammen mit der 0-hyperbolischen Metrik aus Blatt 8.

1. Sei $\gamma \ : \ [0, \infty) \to X, t \mapsto (0, t)$. Zeigen Sie, dass $[\gamma]$ diskret in $\partial_\infty X$ liegt.
2. Sind die metrischen Räume X und $\mathbb{H}^2$ quasi-isometrisch? Finden Sie zwei verschiedene Begründungen für Ihre Antwort.