RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Geometrische Gruppentheorie
Heidelberg, 17.12.2019

Hausaufgaben 10

Die erste Grigorchuck-Gruppe

Keine Abgabe

Aufgabe 1. (Der Baum) Sei $\{0,1\}^*$ die Menge der endlichen Folgen in $\{0,1\}$, inklusive der leeren Folge $\emptyset$. Der *verwurzelte binäre Baum* ist der Graph

$$T := (\{0,1\}^*, \{(w, wx) | w \in \{0,1\}^*, x \in \{0,1\}\}).$$

1. Zeichnen Sie einen Ausschnitt von T.
2. Zeigen Sie, dass T ein Baum ist.
3. Zeigen Sie, dass $\emptyset$ Grad 2 und dass jede andere Ecke Grad 3 hat.

Aufgabe 2. (Die erste Grigorchuck-Gruppe) Seien $a, b, c, d \in \mathrm{Aut}(T)$ definiert durch Induktion über die Länge von $w \in \{0,1\}^*$ mit

$$\begin{array}{rcl} a : \{0,1\}^* & \to & \{0,1\}^* \\ \emptyset & \mapsto & \emptyset \\ 0w & \mapsto & 1w \\ 1w & \mapsto & 0w \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} b : \{0,1\}^* & \to & \{0,1\}^* \\ \emptyset & \mapsto & \emptyset \\ 0w & \mapsto & 0a(w) \\ 1w & \mapsto & 1c(w) \end{array} \quad \begin{array}{rcl} c : \{0,1\}^* & \to & \{0,1\}^* \\ \emptyset & \mapsto & \emptyset \\ 0w & \mapsto & 0a(w) \\ 1w & \mapsto & 1d(w) \end{array} \quad \begin{array}{rcl} d : \{0,1\}^* & \to & \{0,1\}^* \\ \emptyset & \mapsto & \emptyset \\ 0w & \mapsto & 0w \\ 1w & \mapsto & 1b(w) \end{array}$$

Die *erste Grigorchuck-Gruppe* ist die Untergruppe

$$\mathrm{Gri} := \langle a, b, c, d \rangle < \mathrm{Aut}(T).$$

Zeigen Sie:

1. a, b, c, d haben Ordnung 2;
2. Es gilt
$$bc = d = cb, \quad dc = b = cd, \quad db = c = bd.$$

Aufgabe 3. (Niveaustabilisatoren)
Sei

$$L_n := \{g \in \mathrm{Gri} | \, \forall w \in \{0,1\}^n, \, g(w) = w\} < \mathrm{Gri}$$

1. Zeigen Sie, dass L_n eine normale Untergruppe von Gri und $[\mathrm{Gri} : L_n]$ endlich ist.

2. Zeigen Sie, dass $L_{n+1} < L_n$ und $\bigcap L_n = \{\mathrm{Id}\}$.

Aufgabe 4. (Der Kind-Homomorphismus)
Jedes $g \in L_1$ definiert zwei Elemente $g_0, g_1 \in \mathrm{Gri}$ durch $g(0w) = 0g_0(w)$ und $g(1w) = 1g_1(w)$. Sei

$$\begin{array}{rcl} \phi : L_1 & \to & \mathrm{Gri} \times \mathrm{Gri} \\ g & \mapsto & (g_0, g_1) \end{array}$$

1. Zeigen Sie, dass ϕ ein injektiver Gruppen Homomorphismus ist;

2. Zeigen Sie, dass $\mathrm{pr}_i \circ \phi$ surjektiv ist;

3. Folgern Sie, dass Gri unendlich ist.

Aufgabe 5. (Gri ist eine Torsionsgruppe)

1. Zeigen Sie, dass alle Elemente von L_1 endliche Ordnung haben. (*Hinweis:* Induktion über die Wortlänge)

2. Folgern Sie, dass alle Elemente von Gri endliche Ordnung haben.

Aufgabe 6. (Schwache Selbsthänlichkeit von Gri)
Wir wollen zeigen, dass Gri und Gri $\times$ Gri kommensurabel sind. Sei $N := \langle\langle b \rangle\rangle$ die von b erzeugte normale Untergruppe.

1. Zeigen Sie, dass $\langle a, d \rangle$ zu D_4 isomorph ist.

2. Zeigen Sie, dass $L_1 = \langle b, c, d, aba, aca, ada \rangle$.

3. Zeigen Sie, dass $[\mathrm{Gri} : N] < \infty$.

4. Zeigen Sie, dass $N \times \{e\} \subset \phi(L_1)$, $\{e\} \times N \subset \phi(L_1)$.

5. Folgern Sie, dass $\phi(L_1)$ endlich Index in Gri $\times$ Gri hat.